Радиальное ускорение ионов при адиабатическом разлете многокомпонентной цилиндрической плазмы

В.Ф.Ковалев, С.Г.Бочкарев, В.Ю.Быченков

С использованием методов современного группового анализа построено аналитическое решение задачи Коши для системы кинетических уравнений полностью ионизованной электрон-ионной плазмы, описывающей ускорение ионов при адиабатическом разлете цилиндрической плазмы. Получены временные и пространственные зависимости функций распределения частиц и найдены их интегральные характеристики, такие как плотность, средняя скорость, температура и энергетический спектр. Аналитически описаны формирование энергетического спектра ускоренных ионов, асимптотически повторяющего пространственное распределение их плотности, и остывание электронов в процессе ускорения ионов. Особое внимание уделено исследованию влияния тяжелой ионной компоненты на динамику легкой компоненты. Изучены особенности ускорения ионов в случае двухтемпературной функции распределения электронов, описывающей наличие горячей и холодной электронных компонент, что отвечает типичным условиям эксперимента нагрева плазмы интенсивным лазерным излучением.

Ключевые слова: *ультракороткие лазерные импульсы, лазерная плазма, лазерное ускорение ионов, мишени типа «nanoforest».*

1. Введение

В настоящее время генерация ионов в плазме, созданной мощным импульсом лазерного излучения, представляет интерес для таких приложений, как создание компактных источников радиации с рекордными плотностями потоков вторичных частиц на основе лазерно-инициированных ядерных превращений [1], радиационная медицина и ядерная фармакология [2–4], радиография [5, 6], быстрый поджиг для лазерного термоядерного синтеза [7, 8] и др. Сейчас предложены многочисленные схемы для получения высокоэнергетичных ионов [9, 10] на основе мощных короткоимпульсных лазеров. Среди всевозможных лазерных схем ускорения частиц отметим схемы, отвечающие разлету плазменных образований цилиндрического типа. Естественной реализацией такой схемы является радиальный разлет нагретого лазерно-плазменного канала, возникающего в каустике сфокусированного лазерного пучка или при его самофокусировке [11], и разлет цилиндрических нанотрубок, облучаемых лазерным излучением [12].

В.Ф.Ковалев. Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Россия, 125047 Москва, Миусская пл., 4; Центр фундаментальных и прикладных исследований при «ВНИИА» им. Н.Л.Духова, Россия, 127055 Москва, ул. Сущевская, 22; Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53
С.Г.Бочкарев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53;
e-mail: bochkar@lebedev.ru
В.Ю.Быченков. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Центр фундаментальных и прикладных исследований при «ВНИИА» им. Н.Л.Духова, Россия, 127055 Москва, ул. Сущевская, 22

Поступила в редакцию 15 июня 2017 г., после доработки – 11 августа 2017 г.

Кроме того, в последние годы обсуждаются инновационные мишени с высокой средней плотностью с искусственным покрытием подложки, структура которого состоит из многочисленных нано-/микронитей, вытянутых вдоль нормали к поверхности (nanoforest) [13]. Совсем недавно продемонстрировано, что в лабораторных условиях, при воздействии сверхмощного лазерного импульса на такие мишени, в создаваемой плазме можно добиться давлений, превышающих 1 Гбар [14]. Отметим, что такие давления характерны для «экстремальных» астрофизических объектов. Ожидается, что мишени такого типа будут эффективны для лазерного инициирования ядерных реакций в плазме радиально-разлетающихся многочисленных плазменных микроцилиндров вследствие ее высокой средней плотности [1]. Важно отметить, что для создания источника нейтронов на основе такой схемы не потребуется высоких энергий ускоренных частиц, если использовать микронити, обогащенные D или DT, для инициирования реакций синтеза. Это позволит применять лазерное излучение сравнительно невысокой интенсивности. Практической реализации упомянутых задач должно предшествовать теоретическое изучение радиального разлета нагретой цилиндрической плазмы, чему и посвящена настоящая работа.

Со времени публикации работы Гуревича с соавторами [15] по разлету плазмы в вакуум задача ускорения ионов рассматривалась в многочисленных постановках, включая как различную геометрию (плоскую, цилиндрическую и сферическую), так и разные физические модели описания плазмы – гидродинамические и кинетические. В основе электростатического ускорения ионов в плазме под действием лазерного излучения лежит эффект ускорения частиц полем разделения зарядов, когда электроны плазмы в результате ускорения или нагрева лазером «отрываются» от ионов. Разделение зарядов может быть практически полным, если электроны удаляются из плазмы лазерным полем и ионы ускоряются собственным кулоновским полем (кулоновский взрыв [16–18]), или же быть пренебрежимо малым (квазинейтральный [19, 20] или близкий к квазинейтральному режим [21]). Кроме того, возможен и промежуточный вариант между этими предельными случаями (см., напр., [22–24]), что обуславливает многовариантность динамики плазмы под действием лазерного излучения.

Длительность лазерного импульса, действующего на плазму и создающего ускоряющее электрическое поле, является существенным фактором, задающим динамику частиц плазмы. При длинном лазерном импульсе, когда типичная длительность τ_L (субпикосекундного/пикосекундного масштаба) значительно превышает время ускорения ионов, обычно рассматривается режим изотермического разлета с заданной тепловой энергией электронов [21, 22, 24]. В случае короткого (фемтосекундного) импульса, длительность τ_L которого мала по сравнению с характерным временем ускорения ионов, для разлета плазмы типичным является адиабатический режим, характеризуемый охлаждением электронов, тепловая энергия которых, полученная от лазера, переходит в энергию ускоренных ионов (см., напр., [17, 20]). Именно такой случай и рассматривается в настоящей работе, посвященной детальному исследованию адиабатического радиального разлета цилиндрической плазмы в квазинейтральном приближении, что представляет интерес как для интерпретации недавно полученных экспериментальных результатов [25, 26], так и для планирования новых экспериментов с использованием искусственных микронитей на поверхности мишеней. Заметим, что для длинного лазерного импульса конкурентным механизмом ускорения ионов в условиях цилиндрической геометрии является механизм пондеромоторного ускорения ионов. Последнее характерно для разлета лазерно-плазменного канала [11]. Доминирование того или другого механизма – теплового или пондероморного – может быть установлено из сравнения аналитически полученных характеристик ускоренных частиц.

В настоящей работе мы предлагаем аналитическую теорию, использующую методы современного группового анализа с целью нахождения решений кинетических уравнений для функций распределений электронов и ионов плазмы в модели адиабатического разлета цилиндрической плазмы. Нами было показано, что теоретико-групповой подход является эффективным инструментом для аналитического решения задач лазерно-плазменного ускорения заряженных частиц [20, 27, 28].

Работа состоит из четырех разделов и Приложения. В разд.2 формулируются исходные уравнения для теоретического анализа процесса разлета частиц плазмы. С использованием теоретико-группового подхода к этим уравнениям, на основе группы симметрий специального вида (причем бóльшая часть формул, связанных с нахождением группы, вынесена в Приложение) построены инвариантно-групповые аналитические решения исходной начальной задачи для кинетических уравнений частиц плазмы. В качестве примера эти решения анализируются для случая плазмы с начальными максвелловскими функциями распределения частиц по скоростям (разд. 3). Изучена типичная для эксперимента ситуация, когда имеются тяжелая (доминирующая) ионная компонента и примесная легкая компонета, а функция распределения электронов, кроме основной компоненты, имеет горячую компоненту. Все это и определяет максимальную энергию разлетающихся примесных ионов. В разд.4 обсуждаются полученные результаты и подводятся итоги работы. В Приложение вынесены формулы, иллюстрирующие свойства симметрии обсуждаемых уравнений и объясняющие способы построения аналитического решения.

2. Исходные уравнения: электрон-ионная плазма

Динамика адиабатического разлета цилиндрического плазменного сгустка определяется решениями кинетических уравнений для функций распределения частиц плазмы сорта α (электронов и ионов). Учитывая осевую симметрию задачи вдоль оси цилиндра z и рассматривая эти уравнения в цилиндрических координатах $\{t, r, \varphi, z, v_r^\alpha, v_\varphi^\alpha, v_z^\alpha\}$, будем считать функции распределения частиц не зависящими от координат z и φ, а распределение по скоростям вдоль z полагаем максвелловскими (для каждой группы частиц) с температурами T_α. Электрическое поле в плазме также полагаем аксиально-симметричным, имеющим единственную отличную от нуля компоненту $E_r(t, r)$ вдоль радиуса r. С учетом сделанных предположений получаем простое уравнение для проинтегрированной по z-компоненте скорости функции распределения частиц сорта α, т. е. для

$$f_\perp^\alpha(t,r,v_r^\alpha,v_\varphi^\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_z^\alpha f^\alpha,$$

которое будем рассматривать как исходное:

$$\frac{\partial f_\perp^\alpha}{\partial t} + v_r^\alpha \frac{\partial f_\perp^\alpha}{\partial r} + \frac{v_\varphi^\alpha}{r}\left(v_\varphi^\alpha \frac{\partial f_\perp^\alpha}{\partial v_r^\alpha} - v_r^\alpha \frac{\partial f_\perp^\alpha}{\partial v_\varphi^\alpha}\right) + \frac{e^\alpha}{m^\alpha} E_r \frac{\partial f_\perp^\alpha}{\partial v_r^\alpha} = 0. \quad (1)$$

Здесь m^α и e^α – масса и заряд частиц сорта α. В настоящей статье будет подробно проанализирован случай электрон-ионной плазмы с двумя сортами ионов, что отвечает двум возможным значениям, $i = 1$ и $i = 2$. В этом случае $e^e = -e$ и $e^i = Z_i e$, где Z_i – зарядовое число ионов; $m^e = m$ и $m^i = M_i$.

Кинетические уравнения (1) следует использовать совместно с уравнением, задающим условие квазинейтральности в плазме,

$$\sum_\alpha e^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_r^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_\varphi^\alpha f_\perp^\alpha = 0. \quad (2)$$

Решения уравнений вида (1), (2) с использованием теоретико-группового подхода обсуждались нами ранее в приложении к задаче адиабатического разлета плазмы в плоской [20, 27] и сферической [28] геометриях. В основе этого подхода лежит представление о ренормгрупповой симметрии решения с соответствующим инфинитезимальным оператором, под действием которого решение искомой начальной задачи при $t = 0$ преобразуется в решение при $t \neq 0$. При этом функции распределения частиц записываются через инварианты оператора ренормгрупповой симметрии. Применительно к начальной задаче для уравнений (1), (2) с начальными условиями, отвечающими изотропным в пространстве скоростей начальным функциям распределения частиц с однородной начальной температурой и нулевой начальной средней скоростью, формулы для функций распределения частиц имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
f_\perp^\alpha = F^\alpha\left[\frac{1}{2}\left(i_{\alpha 1}^2 + i_{\alpha 2}^2 + \Omega^2 i_0^2\right) + \frac{e^\alpha m}{m^\alpha e}\Phi(i_0)\right],\\
E_r = -\frac{m/e}{(1+\Omega^2 t^2)^{3/2}}\frac{\partial\Phi}{\partial i_0},\\
i_0 = \frac{r}{\sqrt{1+\Omega^2t^2}},\ i_{\alpha 1} = \sqrt{1+\Omega^2t^2}\,(v_r^\alpha - u),\\
i_{\alpha 2} = \sqrt{1+\Omega^2t^2}\,v_\varphi^\alpha,\quad \Omega^2 = \frac{c_s^2}{L^2},
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где $u = \Omega^2 rt/(1+\Omega^2t^2)$ – локальная скорость течения плазмы; Ω – частота, определяемая отношением скорости звука c_s к характерному начальному радиусу плазменного цилиндра L; $c_s = \sqrt{Z_1T_c/M_1}$ – характерная скорость звука, определяемая ионами основного сорта с зарядом и массой Z_1, M_1 и температурой холодных электронов T_c, что подтверждается работами [22, 23]. Отметим, что, хотя найденное решение пригодно в случае произвольного числа сортов частиц, ниже мы будем изучать ситуацию, когда имеются основная ионная компонента и малая примесь, а функция распределения электронов является двухтемпературной, т.е. содержит горячую и холодную компоненты. Введенный в (3) электрический потенциал Φ перенормирован, $e\Phi/m \to \Phi$, и, таким образом, он имеет размерность квадрата скорости. Его зависимость от инварианта i_0 находится из условия квазинейтральности (2), которое с учетом (3) принимает вид

$$
\sum_\alpha e^\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}i_{\alpha 1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}i_{\alpha 2}F^\alpha = 0. \tag{4}
$$

В следующем разделе мы проанализируем решения (3), (4) для случая плазмы с начальными максвелловскими функциями распределения частиц.

3. Адиабатический разлет максвелловской плазмы. Интегральные характеристики ускоренных частиц

Конкретизируем решения (3), (4) для случая плазмы с начальными максвелловскими распределениями ионов двух сортов с зарядами $e^1 = Z_1e$ и $e^2 = Z_2e$, максимальными концентрациями n_{10} и n_{20}, температурами T_1 и T_2. Начальную функцию распределения для электронов принимаем в виде суммы двух максвелловских функций распределений по скоростям с разными тепловыми скоростями с максимальными концентрациями n_{c0} и n_{h0} и температурами T_c и T_h для холодных и горячих электронов соответственно. Тогда для функций $f_\perp^\alpha$ получаем:

$$
\begin{gathered}
f_\perp^c = \frac{n_{c0}}{2\pi V_{T_c}^2}\exp\left[-\frac{1}{2V_{T_c}^2}\left(i_{e1}^2 + i_{e2}^2 + \rho^2\right) + \frac{\Phi(i_0)}{V_{T_c}^2}\right],\\
f_\perp^h = \frac{n_{h0}}{2\pi V_{T_h}^2}\exp\left[-\frac{1}{2V_{T_h}^2}\left(i_{e1}^2 + i_{e2}^2 + \rho^2\right) + \frac{\Phi(i_0)}{V_{T_h}^2}\right],\\
f_\perp^1 = \frac{n_{10}}{2\pi V_{T_1}^2}\exp\left[-\frac{1}{2V_{T_1}^2}\left(i_{11}^2 + i_{12}^2 + \rho^2\right) - \frac{Z_1 m}{M_1}\frac{\Phi(i_0)}{V_{T_1}^2}\right],\\
f_\perp^2 = \frac{n_{20}}{2\pi V_{T_2}^2}\exp\left[-\frac{1}{2V_{T_2}^2}\left(i_{21}^2 + i_{22}^2 + \rho^2\right) - \frac{Z_2 m}{M_2}\frac{\Phi(i_0)}{V_{T_2}^2}\right],
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где $\rho = \Omega i_0$; $f_\perp^e = f_\perp^h + f_\perp^c$ – функция распределения электронов. Здесь потенциал $\Phi(i_0)$ определяется через параметры плазмы решением следующего трансцендентного уравнения:

$$
\begin{aligned}
&n_{c0}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2V_{T_c}^2} + \frac{\Phi}{V_{T_c}^2}\right) + n_{h0}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2V_{T_h}^2} + \frac{\Phi}{V_{T_h}^2}\right)\\
&\quad = Z_1 n_{10}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2V_{T_1}^2} - \frac{Z_1 m}{M_1}\frac{\Phi}{V_{T_1}^2}\right)\\
&\quad + Z_2 n_{20}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2V_{T_2}^2} - \frac{Z_2 m}{M_2}\frac{\Phi}{V_{T_2}^2}\right).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Без ограничения общности можно выбрать $\Phi(0) = 0$ и, таким образом, получить соотношение между максимальными концентрациями:

$$
\sum_i Z_i n_{i0} = n_{c0} + n_{h0} = n_{e0},\ i = 1, 2.
$$

Для сравнения с экспериментальными данными зачастую представляет интерес не вид функции распределения, а ее интегральная характеристика. Концентрация ионов определяется выражением

$$
n_i = \frac{n_{i0}}{1+\Omega^2t^2}N_i(\rho), \tag{7}
$$

где

$$
N_i = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2V_{T_i}^2} - \frac{Z_i m}{M_i}\frac{\Phi}{V_{T_i}^2}\right)
$$

– универсальная функция, которая, как будет показано ниже, определяет не только распределения концентрации и потока частиц, но и асимптотические спектры ионов.

Поток ионов сорта i, который измеряют датчики, расположенные на расстоянии r_0 в радиальном направлении от оси, определяется простым выражением:

$$
J_{r\,i}(t, r_0) = \frac{n_{i0}}{1+\Omega^2t^2}u_0 N_i(\rho_0), \tag{8}
$$

где

$$
\rho_0 = \frac{\Omega r_0}{\sqrt{1+\Omega^2t^2}};\ u_0 = \frac{\Omega^2 r_0 t}{1+\Omega^2t^2}.
$$

Спектральное распределение ускоренных ионов в радиальном направлении по энергии

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\epsilon_i} &= \frac{2n_{0i}}{\Omega^2}\sqrt{\frac{\pi\chi}{\epsilon_i T_i}}\exp\left(-\frac{\chi\epsilon_i}{T_i}\right)\times\\
&\times\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\,\rho\cosh(b^i\rho)\exp\left(-\frac{Z_i m\Phi}{M_i V_{T_i}^2} - \frac{\rho^2\chi}{2V_{T_i}^2}\right),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $\epsilon_i = (M_i/2)(v_r^i)^2$; $b^i = \Omega t\sqrt{2\epsilon_i\chi/T_i}/V_{T_i}$; $\chi = 1 + \Omega^2 t^2$. Отметим, что особый интерес представляют спектры, соответствующие наблюдаемым в эксперименте величинам. Приведем асимптотическое выражение, которое можно получить из (9) в пределе $\Omega t \to \infty$, используя метод перевала:

$$\frac{dN_{\rm as}}{d\epsilon_i} = \frac{2\pi}{M_i\Omega^2} n_{i0} N_i\left(\rho = \sqrt{\frac{2\epsilon_i}{M_i}}\right). \qquad (10)$$

Проанализируем решение задачи в конкретном случае, который является типичным для эксперимента, а именно, когда имеются тяжелые ионы (основная компонента, индекс «1») и более легкие ионы (примесь, «2»), т.е. $Z_2M_1/(Z_1M_2) > 1$ и $n_{20} < n_{10}$. Анализ уравнения (6) позволяет получить приближенное решение для распределения концентрации плазмы и спектральных распределений. Выделим в уравнении для потенциала (6) доминирующие слагаемые в левой и правой частях. Приравняв их, получим приближенные аналитические выражения для потенциала в виде бинома по ρ^2.

Сравним сначала слагаемые в левой части (6), отвечающие горячим и холодным электронам. Тогда получим характерное значение потенциала

$$\Phi_{\rm el} = \rho^2/2 + V_{T_{\rm c}}^2(1 - T_{\rm c}/T_{\rm h})^{-1}\ln(n_{\rm h0}/n_{\rm c0}). \qquad (11)$$

Из анализа (6) следует, что при при $\Phi > \Phi_{\rm el}$ ($\Phi < 0$) доминирует вклад холодных электронов, а при $\Phi < \Phi_{\rm el}$ ($|\Phi| > |\Phi_{\rm el}|$) – горячих. Сравним теперь вклады ионов первого и второго сортов. Оба вклада сравниваются при

$$\Phi_{\rm ion} = V_{T_{\rm c}}^2 \frac{T_1}{Z_1 T_{\rm c}}\left(\frac{Z_2 T_1}{Z_1 T_2} - 1\right)^{-1}$$
$$\times\left[\ln\left(\frac{Z_2 n_{20}}{Z_1 n_{10}}\right) + \frac{\rho^2}{2V_{T_1}^2}\left(1 - \frac{T_1 M_2}{T_2 M_1}\right)\right]. \qquad (12)$$

Отметим, что при $\Phi > \Phi_{\rm ion}$ доминирует вклад ионов первого сорта, а при $\Phi < \Phi_{\rm ion}$ – второго.

Таким образом, при малых ρ основную роль в уравнении для потенциала играют холодные электроны и ионы основного сорта. Баланс этих вкладов дает спад потенциала Φ (рост $|\Phi|$) до наибольшего из двух значений, которое определяется выражением (11) либо (12), в зависимости от соотношения параметров задачи. Дальнейший спад потенциала происходит по одному из двух сценариев.

Первый сценарий (вариант I) предполагает ситуацию, когда величина Φ спадает до значения $\Phi_{\rm ion}$ при $\rho = \rho_{\rm ion\,1}$. В интервале $0 < \rho < \rho_{\rm ion\,1}$ потенциал определяется балансом холодных электронов и основных ионов. Приведем соответствующее выражение, которое легко получить из (6):

$$\Phi \approx \hat{\Phi}(\rho, Z_1, T_1, M_1, T_{\rm c}, n_{\rm c0}, n_{10}) = V_{T_{\rm c}}^2\left(1 + \frac{Z_1 T_{\rm c}}{T_1}\right)^{-1}$$
$$\times\left[\frac{\rho^2}{2V_{T_1}^2}\left(\frac{T_1 m}{T_{\rm c} M_1} - 1\right) - \ln\left(\frac{n_{\rm c0}}{Z_1 n_{10}}\right)\right]. \qquad (13)$$

В интервале $\rho_{\rm ion\,1} < \rho < \rho_{\rm el\,2}$ распределение потенциала определяется балансом холодных электронов и ионов второго сорта (примесные ионы). Его легко получить заменой в (13) индекса $1 \to 2$. Величина $\rho_{\rm el\,2}$ может быть найдена из решения уравнения $\Phi(\rho_{\rm el\,2}) = \Phi_{\rm el}(\rho_{\rm el\,2})$. В области $\rho_{\rm el\,2} < \rho < \infty$ приближенное решение для потенциала определяется балансом горячих электронов и ионов второго сорта. Оно получается заменой в (13) индексов c $\to$ h и $1 \to 2$.

Второй возможный сценарий предполагает спад потенциала от $\Phi(\rho = 0)$ до $\Phi_{\rm el}(\rho_{\rm el\,1})$ в области $0 < \rho < \rho_{\rm el\,1}$, в которой распределение Φ определяется балансом холодных электронов и основных ионов (13), далее, в области $\rho_{\rm el\,1} < \rho < \rho_{\rm ion\,2}$, – балансом горячих электронов и основных ионов и, наконец, в области $\rho_{\rm ion\,2} < \rho < \infty$ – балансом горячих электронов и ионов второго сорта. Здесь $\rho_{\rm el\,1}$ и $\rho_{\rm ion\,2}$ находятся из условий $\Phi(\rho_{\rm el\,1}) = \Phi_{\rm el}(\rho_{\rm el\,1})$ и $\Phi(\rho_{\rm ion\,2}) = \Phi_{\rm ion}(\rho_{\rm ion\,2})$, где функции $\Phi_{\rm el}$ и $\Phi_{\rm ion}$ определяются выражениями (11) и (12), а Φ – приближенным решением (6), полученным в результате формального пренебрежения не доминирующими группами частиц (формула (13) и ее аналоги). Так, в области, где доминируют горячие электроны и более легкие ионы второго сорта ($Z_2/M_2 > Z_1/M_1$), мы пренебрегаем вкладом холодных электронов и ионов первого сорта.

Рассмотрим теперь спектры ускоренных ионов с использованием полученных приближенных решений. Анализ проведем для первого сценария. Выражения для потенциала на конечных временах можно использовать с целью аналитического описания временной эволюции спектра, вычислив интеграл (9) с помощью описанного выше представления потенциала в виде бинома. В результате получим выражение в виде суммы трех вкладов:

$$\frac{{\rm d}N}{{\rm d}\epsilon_i} = \frac{2n_{0i}}{\Omega^2}\sqrt{\frac{\pi\chi}{T_i\epsilon_i}}\exp\left(-\frac{\chi\epsilon_i}{T_i}\right)$$
$$\times\left[H(0, \rho_{\rm ion\,1}, a_1^i, b^i, c_1^i) + H(\rho_{\rm ion\,1}, \rho_{\rm el\,2}, a_2^i, b^i, c_2^i)\right]$$
$$+\frac{2n_{0i}}{\Omega^2}\sqrt{\frac{\pi\chi}{T_i\epsilon_i}}\exp\left(-\frac{\chi\epsilon_i}{T_i}\right)H(\rho_{\rm el\,2}, \infty, a_3^i, b^i, c_3^i), \qquad (14)$$

где

$$a_k^i = \frac{Z_i m_{\rm e}}{T_i}\varphi_{1k} + \frac{1 + \Omega^2 t^2}{2V_{T_i}^2};\; c_k^i = -\frac{Z_i m_{\rm e}}{T_i}\varphi_{0k};$$

коэффициенты φ_{0k} и φ_{1k} выражаются следующим образом: $\wedge\Phi_k = \varphi_{0k} + \rho^2\varphi_{1k}$; функция $\wedge\Phi_1$ определяется выражением (13); $\wedge\Phi_2 = \hat{\Phi}(\rho, Z_2, T_2, M_2, T_{\rm c}, n_{\rm c0}, n_{20})$; $\wedge\Phi_3 = \hat{\Phi}(\rho, Z_2, T_2, M_2, T_{\rm h}, n_{\rm h0}, n_{20})$; функция

$$H(\rho_1, \rho_2, a', b', c') = \int_{\rho_1}^{\rho_2} {\rm d}\rho\,\rho\cosh(b'\rho)\exp(-a'\rho^2 + c')$$

выражается в квадратурах:

$$H = \frac{{\rm e}^{c'}}{8a'^{3/2}}\Bigg\{-4\sqrt{a'}\,{\rm e}^{-a'\rho^2}\cosh(b'\rho) + \sqrt{\pi}\,b{\rm e}^{b'^2/4a'}$$
$$\times\left[{\rm Erf}\left(\frac{2a'\rho - b'}{2\sqrt{a'}}\right) - {\rm Erf}\left(\frac{2a'\rho + b'}{2\sqrt{a'}}\right)\right]\Bigg\}\Bigg|_{\rho_1}^{\rho_2}.$$

Здесь

$${\rm Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}{\rm e}^{-\xi^2}{\rm d}\xi - 1$$

– функция ошибок.

Рассмотрим подробно спектральные распределения в пределе $t \to \infty$. В этом случае удается получить простые аналитические формулы. В области $\epsilon_\alpha < M_\alpha \rho_{\rm ion1}^2/2$ энергетические спектры запишутся в следующем виде:

$$\frac{dN}{d\epsilon_1} = \frac{2\pi}{M_1 \Omega^2} n_{10} \left(\frac{n_{c0}}{Z_1 n_{10}}\right)^{\left(1+\frac{T_1}{Z_1 T_c}\right)^{-1}} \times \exp\left[-\frac{\epsilon_1(1 + Z_1 m/M_1)}{Z_1 T_c + T_1}\right],$$

$$\frac{dN}{d\epsilon_2} = \frac{2\pi}{M_2 \Omega^2} n_{20} \left(\frac{n_{c0}}{Z_1 n_{10}}\right)^{\left(\frac{Z_1 T_2}{Z_2 T_1}+\frac{T_2}{Z_2 T_c}\right)^{-1}} \times \exp\left[-\frac{\epsilon_2(1 + Z_1 T_c/T_1 - Z_2 T_c/T_2 + Z_2 m T_1/M_1 T_2)}{Z_1 T_c (T_2/T_1) + T_2}\right]. \quad (15)$$

В интервале $\rho_{\rm ion\,1} < \rho < \rho_{\rm el2}$ (отвечает интервалу $M_2(\rho_{\rm ion\,2})^2/2 < \epsilon < M_2(\rho_{\rm el2})^2/2$) получим

$$\frac{dN}{d\epsilon_2} = \frac{2\pi}{M_2 \Omega^2} n_{20} \left(\frac{n_{c0}}{Z_2 n_{20}}\right)^{\left(1+\frac{T_2}{Z_2 T_c}\right)^{-1}} \times \exp\left[-\frac{\epsilon_2(1 + Z_2 m/M_2)}{Z_2 T_c + T_2}\right]. \quad (16)$$

В интервале $\rho_{\rm el2} < \rho$ (отвечает $\epsilon_2 > M_2(\rho_{\rm el2})^2/2$) имеем

$$\frac{dN}{d\epsilon_2} = \frac{2\pi}{M_2 \Omega^2} n_{20} \left(\frac{n_{h0}}{Z_2 n_{20}}\right)^{\left(1+\frac{T_2}{Z_2 T_h}\right)^{-1}} \times \exp\left[-\frac{\epsilon_2(1 + Z_2 m/M_2)}{Z_2 T_h + T_2}\right]. \quad (17)$$

Следуя описанной выше схеме, легко получить формулы для функций $\rho_{\rm ion1}^2$ и $\rho_{\rm el2}^2$:

$$\rho_{\rm ion1}^2 = 2V_{T_1}^2 \left[\left(\frac{Z_2 T_1}{Z_1 T_2} - 1\right)\left(1 - \frac{T_1 m}{T_c M_1}\right) + \left(1 - \frac{T_1 M_2}{T_2 M_1}\right)\left(1 + \frac{T_1}{Z_1 T_c}\right)\right]^{-1} \times \left[\left(\frac{Z_2 T_1}{Z_1 T_2} - 1\right)\ln\left(\frac{Z_1 n_1}{n_{c0}}\right) + \left(1 + \frac{T_1}{Z_1 T_c}\right)\ln\left(\frac{Z_1 n_{10}}{Z_2 n_{20}}\right)\right], \quad (18)$$

$$\rho_{\rm el2}^2 = 2V_{T_2}^2 \left(1 + \frac{Z_2 m}{M_2}\right)^{-1} \left[\ln\left(\frac{Z_2 n_2}{n_{c0}}\right) - \left(\frac{1 + Z_2 T_c/T_2}{1 - T_c/T_h}\right)\ln\left(\frac{n_{h0}}{n_{c0}}\right)\right].$$

Ниже представлены результаты численного решения уравнения (6) и описаны интегральные характеристики; полученные данные сопоставлены с приближенными выражениями для спектров (15)–(18).

Приступим к анализу полученного решения. Выберем следующие параметры: $Z_1 = 3$, $M_1 = 15$, $Z_2 = 8$, $M_2 = 16$, $n_{20} = 10^{-3} n_{e0}$, $n_{h0}/n_{e0} = 3\times10^{-2}$, $T_h/T_c = 300$, $T_1/T_c = 10^{-2}$, $T_2/T_1 = 1$.

На рис.1 приведено численное решение (6) для потенциала. Это решение наложено на кусочно-гладкую функцию (штриховая кривая), являющуюся приближенным решением, процедура нахождения которого описана выше. Рисунки *а* и *б* отвечают различным областям значений ρ^2. Из рис.1 следует, что предлагаемая модель хорошо согласуется с найденным численным решением (6).

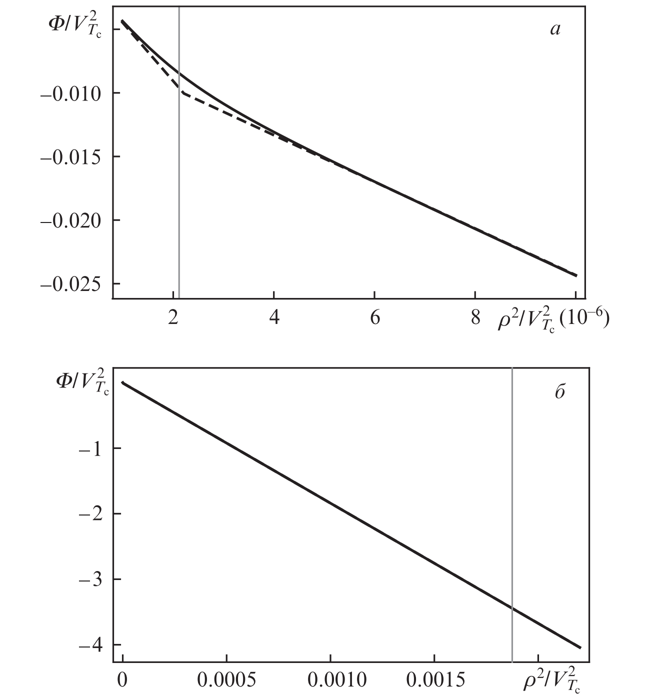

Рис.1. Зависимость потенциала Φ от переменной ρ^2 (сплошная кривая) и приближенная зависимость (штриховая кривая); *а* – область малых значений ρ^2, *б* – более широкий диапазон ее значений. Вертикальными серыми линиями отмечены величины $\rho_{\rm ion1}^2$ (*а*) и $\rho_{\rm el2}^2$ (*б*).

Распределение концентраций ионов и электронов показано на рис.2. Видно существование характерных областей, в которых баланс зарядов определяется холодными электронами и тяжелой ионной компонентой, далее – легкой ионной примесью и холодными электронами, а при

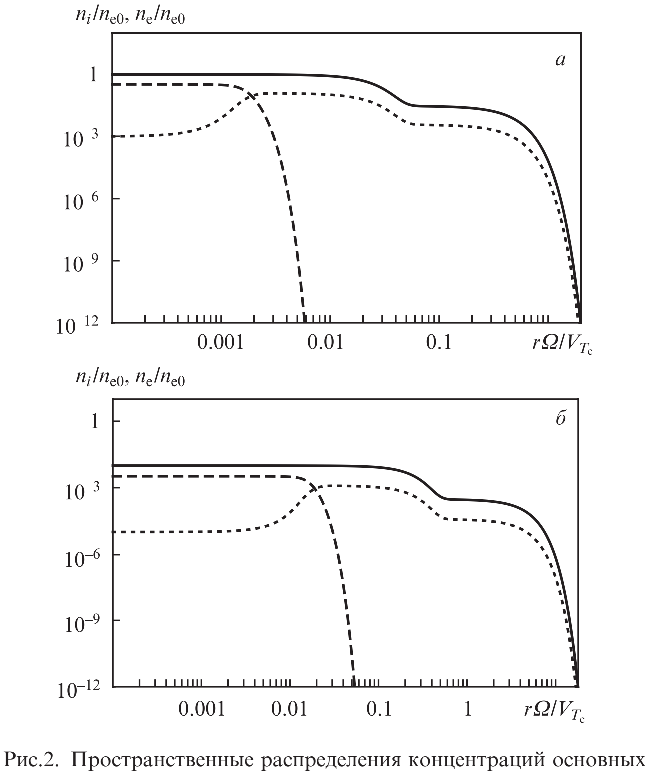

Рис.2. Пространственные распределения концентраций основных (штриховые кривые) и примесных (пунктир) ионов. Сплошные кривые отвечают суммарной концентрации электронов n_e. Распределения представлены для моментов времени $t = 0$ (*а*) и $\Omega t = 10$ (*б*).

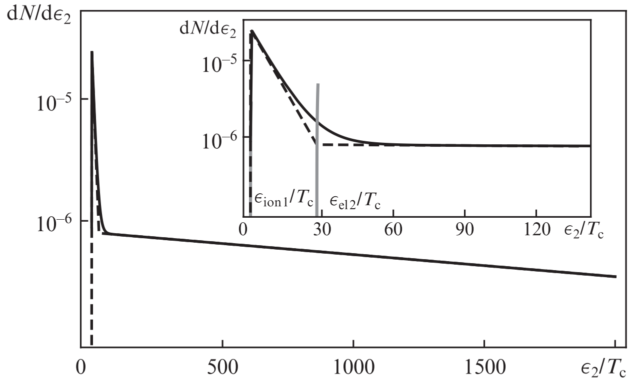

Рис.3. Асимптотический спектр легких ионов (сплошная кривая) и приближение (штриховая кривая), полученное по формулам (15)–(18). На вставке – диапазон малых энергий ($\epsilon < Z_2T_h$), а на основном рисунке – весь диапазон, представляющий интерес. Серыми линиями обозначены величины $\epsilon_{ion1} = M_2\rho_{ion1}^2/2$ и $\epsilon_{el2} = M_2\rho_{el2}^2/2$.

бóльшем удалении от оси симметрии задачи – горячими электронами и примесными легкими ионами. Динамику плазмы можно проследить, сравнивая рис.2,*а* и *б*. Отметим, что на больших временах течение выходит на автомодельный режим [27], а распределение концентрации и спектральные распределения определяются универсальной функцией N_i (см. формулу (7)).

Энергетический спектр ионов примеси продемонстрирован на рис.3. Хорошо наблюдаемые два наклона в спектральном распределении отвечают переходу из области доминирования холодных электронов в область, где доминируют горячие, т.е., в соответствии с формулами (11)–(15), при $\epsilon_2 \simeq M_2\rho_{el2}^2/2$.

На рис.4 показан ток примесных ионов (8), наблюдаемый на детекторе. Видны два характерных всплеска. Сначала вклад в ток вносят быстрые ионы (из той пространственной области, где баланс определяется горячими электронами), а затем – медленные ионы из области, где баланс определяется холодными электронами. Время прихода на детектор определяется звуковой скоростью плазмы; это означает, что ионы основного сорта придут на детектор существенно позже. Их распределение при этом содержит единственный пик. По нашему мнению, из двух представленных сценариев наиболее типичен именно первый, однако в определенных случаях может быть реализован и второй сценарий.

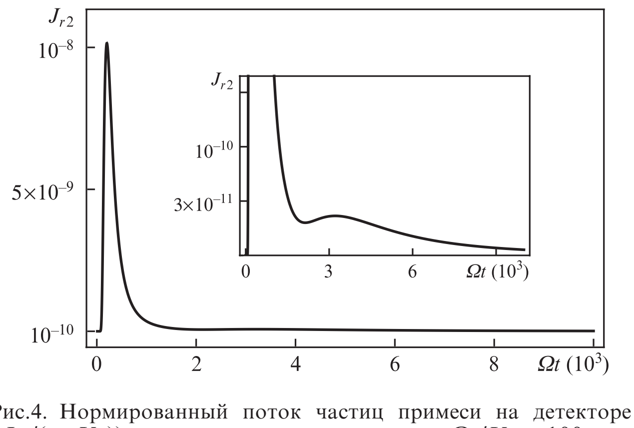

Рис.4. Нормированный поток частиц примеси на детекторе ($J_{r2}/(n_{e0}V_{T_c})$), наблюдаемый на расстоянии $\Omega r/V_{T_c} = 100$. На вставке – характерный всплеск тока примесных ионов, связанный с наличием двухтемпературного распределения электронов.

4. Обсуждение результатов и выводы

В настоящей работе с использованием группового подхода получено решение системы кинетических уравнений, описывающей динамику радиального разлета многокомпонентной плазмы. Получены интегральные характеристики ускорения ионов, в том числе распределение плотностей и потоков частиц (ионов), а также их энергетические спектры. Найденное асимптотическое решение для спектральной функции повторяет распределение концентрации ионов. Особое внимание уделено анализу случая, весьма типичного для эксперимента, когда можно выделить основную тяжелую компоненту и легкую малоплотную примесь. Для этого случая в частности получены простые асимптотические аналитические выражения, описывающие спектральные распределения частиц. Особенностью кривых, задающих спектры легких ионов, является их близость к кусочно-линейному виду и наличие нескольких наклонов, что отвечает доминированию той или иной группы частиц. Таким образом, развитая модель может быть использована для предсказания характеристик ускоренных ионов, например цилиндрической нано-/микроплазмы или ускорения ионов из плазменного канала.

Сравним теперь эффективность рассмотренного теплового механизма ускорения ионов с пондеромоторным механизмом их ускорения на примере лазерно-нагретого цилиндрического плазменного канала [11, 29]. Согласно [29], энергия лазерно-генерируемых ионов при пондеромоторном ускорении мала по сравнению с энергией, набираемой при тепловом расширении, в случае достаточно короткого лазерного импульса, т.е. при выполнении условия

$$\tau_L < \frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{M_{ion}}{Z_{ion}^2 m}\frac{\epsilon_{ion}}{mc^2}}\frac{(1+a_0^2)^{1/2}}{a_0^2}, \qquad (19)$$

где r_0 – радиус канала; ϵ_{ion} – характерная энергия ускоренных ионов. Например, для параметров излучения титан-сапфирового лазера с длиной волны $\lambda = 0.8$ мкм, интенсивностью $I_L \simeq 5\times10^{18}$ Вт/см^2, что отвечает безразмерной амплитуде поля $a_0 \approx 1.5$ ($a_0 = 0.85\times10^{-9}\,\lambda$ [мкм] $I_L^{1/2}$ [Вт×см$^{-1}$]^2), длительностью импульса $\tau_L \approx 30$ фс и радиусом канала $r_0 = 4$ мкм получим, что в случае ускорения протонов отношение энергии, набираемой ими за счет пондеромоторного механизма, к характерной энергии для протонов при тепловом расширении ($\epsilon_2 \simeq T_h$) составляет $\sim10^{-2}$. Здесь принято, что температура горячей компоненты электронов определяется часто используемым пондеромоторным скейлингом: $T_h \simeq mc^2\left(\sqrt{1+a_0^2}-1\right) \approx$ 400 кэВ [30].

Как отмечалось во Введении, новыми инновационными лазерными мишенями являются мишени типа «nano-forest» [13, 14]. По нашему мнению, такие мишени, например мишень из титановых нано-/микронитей с добавлением дейтерия, являются перспективными для инициирования ядерных DT-реакций и генерации нейтронов. Действительно, высокая средняя плотность такого покрытия может обеспечить высокий выход нейтронов. Известно, что DT-реакция эффективно идет при относительно низкой энергии сталкивающихся частиц ($\sim$100 кэВ), поэтому, в отличие от проблемы лазерной генерации ионов высоких энергий, сверхвысоких плотностей потока энергии лазерного излучения не требуется. Если рассмотреть лазерно-нагреваемую поверхность мишени в виде цилиндрических нитей TiD диаметром $D \sim 150$ нм и средним расстоянием между ними $\sim$500 нм, то именно такую характерную энергию (100 кэВ) наберут дейтроны при интенсивности лазерного излучения $I_L \simeq 10^{18}$ Вт/см^2 за время разлета нити на расстояние порядка характерного расстояния между нитями.

Полученные выше оценки исходят из предположения о квазинейтральном характере разлета плазмы. Однако при облучении наномишений возможен переход из квазинейтрального режима в режим с сильным разделением зарядов и, в пределе, в режим кулоновского взрыва. Это происходит при $\lambda_D/D > 1$ ($\lambda_D = \sqrt{T_e/(4\pi n_{e0}e^2)}$ – радиус Дебая, D – диаметр наноцилиндра). Для приведенного выше примера $\lambda_D/D \approx 5\times10^{-2}$ при $n_{e0} \approx 5\times10^{23}$ см$^{-3}$, следовательно, $\lambda_D \approx 7$ нм, т.е. режим разлета близок к квазинейтральному. Таким образом, разлет будет происходить в квазинейтральном режиме или близком к нему, если не использовать очень тонкие ($D \lesssim 10$ нм) нити.

В заключение отметим перспективность использования мощных коротковолновых (ультрафиолетовых) лазеров (см., напр., [31]). Переход к коротковолновому излучению позволит еще больше увеличить эффективную плотность наноструктурированной поверхности мишени и, следовательно, выход нейтронов, за счет сближения обогащенных дейтерием нано-/микронитей, не уменьшая проникновения лазерного излучения. Более детальное исследование нейтронного источника на основе мишеней такого типа будет проведено в дальнейшем.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №17-12-01283).

Приложение. Группа Ли точечных преобразований

Наиболее наглядный вид группа Ли точечных непрерывных преобразований, допускаемых системой кинетических уравнений для проинтегрированной по z-компоненте скорости функций распределения частиц сорта α, т.е. для $f_\perp^\alpha$, и нелокальным условием квазинейтральности, имеет в прямоугольных координатах. Рассматривая преобразования в плоскости, перпендикулярной оси z, запишем соответствующие инфинетизимальные операторы группы точечных симметрий (подробности вычисления симметрий для систем интегродифференциальных уравнений можно найти в [32]):

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t},\;\; X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\;\; X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\;\; Y_1 = \sum_\alpha f^\alpha \frac{\partial}{\partial f^\alpha},$$

$$Y_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \sum_\alpha \left(v_x^\alpha \frac{\partial}{\partial v_x^\alpha} + v_y^\alpha \frac{\partial}{\partial v_y^\alpha}\right) + E_x\frac{\partial}{\partial E_x} + E_y\frac{\partial}{\partial E_y},$$

$$Y_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \sum_\alpha \left(v_x^\alpha \frac{\partial}{\partial v_x^\alpha} + v_y^\alpha \frac{\partial}{\partial v_y^\alpha}\right) - 3E_x\frac{\partial}{\partial E_x} - 3E_y\frac{\partial}{\partial E_y}, \qquad (\text{П}1)$$

$$G_1 = t\frac{\partial}{\partial x} + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial v_x^\alpha},\;\; G_2 = t\frac{\partial}{\partial y} + \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial v_y^\alpha},$$

$$Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \sum_\alpha \left(v_y^\alpha \frac{\partial}{\partial v_x^\alpha} - v_x^\alpha \frac{\partial}{\partial v_x^\alpha}\right) + E_y\frac{\partial}{\partial E_x} - E_x\frac{\partial}{\partial E_y},$$

$$X_{pr} = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + ty\frac{\partial}{\partial y} + \sum_\alpha \left[\left(x - v_x^\alpha t\right)\frac{\partial}{\partial v_x^\alpha} + \left(y - v_y^\alpha t\right)\frac{\partial}{\partial v_y^\alpha}\right] - 3tE_x\frac{\partial}{\partial E_x} - 3tE_y\frac{\partial}{\partial E_y}.$$

Операторы (П1) имеют простой физический смысл: первые три оператора, X_0, X_1 и X_2, соответствуют преобразованиям переноса по времени t и координатам x и y. Следующие три оператора, Y_1, Y_2 и Y_3, описывают преобразования растяжений. Преобразования с операторами G_1 и G_2 соответствуют галилеевским преобразованиям вдоль осей x и y соответственно, а оператор Z – преобразованию поворота в плоскости $\{x, y\}$. Наконец, оператор X_{pr} отвечает группе проективных преобразований.

Интересующее нас аксиально-симметричное инвариантно-групповое решение возникает при использовании двумерной алгебры $L_2 = \{Z, R\}$, составленной из оператора вращения Z и оператора $R = X_0 + \Omega^2 X_{pr}$ и представляющей собой линейную комбинацию оператора сдвига по времени X_0 и оператора проективной группы X_{pr}. В цилиндрической геометрии оператор $Z = \partial/\partial\varphi$ соответствует сдвигу по углу φ, а оператор R выглядят следующим образом:

$$R = (1 + \Omega^2 t^2)\frac{\partial}{\partial t} + \Omega^2 tr\frac{\partial}{\partial r} + \Omega^2 + \Omega^2 \sum_\alpha \left[\left(r - tv_r^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial v_r^\alpha} - tv_\varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial v_\varphi^\alpha}\right] - 3\Omega^2 tE_r\frac{\partial}{\partial E_r} - 3\Omega^2 tE_\varphi\frac{\partial}{\partial E_\varphi}. \qquad (\text{П}2)$$

Инвариантность относительно оператора Z дает аксиально-симметричное решение, которое не зависит от угловой переменной φ, а оператор ренормгрупповой симметрии R задает конечные преобразования, связывающие начальные значения функций распределения частиц и электрического поля при $t = 0$ с их значениями при $t \neq 0$, т.е. дает искомое решение начальной задачи для уравнений (1), (2) с начальными условиями, отвечающими изотропным начальным максвелловским функциям распределения частиц с однородной начальной температурой и нулевой начальной средней скоростью. При этом решение выражается через инварианты оператора R,

$$i_0 = \frac{r}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}},\;\; i_{\alpha 1} = \sqrt{1 + \Omega^2 t^2}\, v_r^\alpha - \frac{\Omega^2 tr}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}},$$

$$i_{\alpha 2} = \sqrt{1 + \Omega^2 t^2}\, v_\varphi^\alpha,\;\; i_{\alpha 3} = f_\perp^\alpha,\;\; i_4 = E_r(1 + \Omega^2 t^2)^{3/2}, \qquad (\text{П}3)$$

$$i_5 = E_\varphi(1 + \Omega^2 t^2)^{3/2}.$$

Для рассматриваемого в работе решения с $E_\varphi = 0$ инвариант i_5 равен нулю, а связь $i_{\alpha 3}$ и i_4 с остальными инвариантами дается формулами (3), (4).

1. Быченков В.Ю., Тихончук В.Т., Толоконников С.В. *ЖЭТФ*, **115** (6), 2080 (1999).
2. Буланов С.В., Хорошков В.С. *Физика плазмы*, **28**, 493 (2002).
3. Nemoto K., Maksimchuk A., Banerjee S., et al. *Appl. Phys. Lett.*, **78**, 595 (2001).
4. Bychenkov V.Yu., Brantov A.V., Mourou G. *Laser Part. Beams*, **32**, 605 (2014).

5. Borghesi M et al. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **43**, A267 (2001).
6. Mackinnon A.J. et al. *Rev. Sci. Instrum.*, **75**, 3531 (2004).
7. Roth M. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 436 (2001).
8. Быченков В.Ю., Розмус В., Максимчук А. и др. *Физика плазмы*, **27**, 1076 (2001).
9. Daido H., Nishiuchi M., Pirozhkov A.S. *Rep. Progr. Phys.*, **75**, 056401 (2012).
10. Быченков В.Ю., Брантов А.В., Говрас Е.А., Ковалёв В.Ф. *УФН*, **185**, 77 (2015).
11. Sarkisov G.S., Bychenkov V.Y., Novikov V.N., et al. *Phys. Rev. E*, **59**, 7042 (1999).
12. Murakami M., Tanaka M. *Appl. Phys. Lett.*, **102**, 163101 (2013).
13. Lećz Zs., Andreev A. *Phys. Plasmas*, **24**, 033113 (2017).
14. Bargsten C., Hollinger R., Capeluto M.G., et al. *Sci. Adv.*, **3**, e1601558 (2017).
15. Гуревич А.В., Парийская Л.В., Питаевский Л.П. *ЖЭТФ*, **49**, 647 (1965).
16. Nishihara K., Amitani H., Murakami M., et al. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, **464**, 98 (2001).
17. Ковалев В.Ф., Быченков В.Ю. *ЖЭТФ*, **128** (8), 243 (2005).
18. Popov K.I., Bychenkov V.Yu., Rozmus W., et al. *Laser Part. Beams*, **27**, 321 (2009).
19. Дорожкина Д.С., Семенов В.Е. *Письма в ЖЭТФ*, **67**, 543 (1998).
20. Ковалев В.Ф., Быченков В.Ю., Тихончук В.Т. *ЖЭТФ*, **122**, 264 (2002).
21. Mora P. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 185002 (2003).
22. Бочкарев С.Г., Быченков В.Ю., Тихончук В.Т. *Физика плазмы*, **32** (3) 230 (2006).
23. Bochkarev S.G., Golovin G.V., Uryupina D.S., Shulyapov S.A., Andriyash A.V., Bychenkov V.Yu., Savel'ev A.B. *Phys. Plasmas*, **19**, 103101 (2012).
24. Говрас Е.А., Быченков В.Ю. *Письма в ЖЭТФ*, **98**, 78 (2013).
25. Kahaly S., Sylla F., Lifschitz A., et al. *Scientific Rep.*, **6**, 31647 (2016).
26. Lifschitz A., Sylla F., Kahaly S., et al. *New J. Phys.*, **16**, 033031 (2014).
27. Ковалев В.Ф., Быченков В.Ю., Тихончук В.Т. *Письма в ЖЭТФ*, **74**, 12 (2001).
28. Kovalev V.F., Bychenkov V.Yu. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, (18), 185004 (2003).
29. Sarkisov G.S., Bychenkov V.Yu., Novikov V.N., et al. *Phys. Rev. E*, **59** (6) 7042 (1999).
30. Wilks S.C., Kruer W.L., Tabak M., Langdon A.B. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1383 (1992); Malka G., Miquel J.L. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 75 (1996).
31. Zvorykin V.D., Didenko N.V., Ionin A.A., et al. *Laser Part. Beams*, **25**, 435 (2007).
32. Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F., Meleshko S.V. *Lecture Notes in Physics* (Heidelberg: Springer, 2010, Vol. 806).