

# Моды нелинейного планарного волновода с диэлектрическим слоем, погруженным в гиперболическую среду

Е.И.Ляшко, А.И.Маймистов

*Теоретически исследованы направленные волны симметричного планарного волновода, образованного помещенным в гиперболическую среду изотропным диэлектриком с кубически-нелинейным откликом. Оптическая ось гиперболической среды направлена вдоль нормали к поверхностям раздела сред. Если диэлектрическая проницаемость сердцевины волновода превышает главную диэлектрическую проницаемость для необыкновенной волны в гиперболической среде, то каждая ТМ мода характеризуется двумя частотами отсечки. Найдены дисперсионные соотношения для данных мод в случае фокусирующей и дефокусирующей сред сердцевины. Число возможных на данной частоте мод зависит от интенсивности излучения. Показано, что в волноводе возможны нулевые значения постоянных распространения мод, что отвечает образованию стоячей волны между границами волновода. Кроме того, в случае дефокусирующего волноводного слоя такие остановленные моды могут быть получены при увеличении интенсивности поля. Найдены и проанализированы зависимости постоянной распространения и ширины поперечного распределения поля моды от интенсивности излучения.*

**Ключевые слова:** метаматериалы, гиперболическая дисперсия, нелинейный диэлектрик, волновод.

## 1. Введение

Гиперболическим материалом называют сильно анизотропную одноосную среду, главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости или магнитной восприимчивости которой имеют противоположные знаки [1, 2]. Распространяющаяся в такой немагнитной среде необыкновенная волна характеризуется изочастотной поверхностью показателя преломления, описывающей гиперболоид в фазовом пространстве. Это приводит к ряду необычных оптических свойств гиперболических сред (см. [3–8], а также обзоры [9–11]).

Плазмонные или фотонные направляющие устройства, такие как волноводы, широко используются в различных коммуникационных сетях и системах обработки информации. Многие направляющие структуры, включающие в себя гиперболическую среду, уже рассмотрены. Среди них – граница раздела диэлектрика и гиперболической среды, поддерживающая распространение поверхностных плазмонных поляритонов [12, 13], волноводы с сердцевиной из гиперболической среды [14–16], характеризующиеся сосуществованием прямых и обратных мод, возможностью замедления света, отрицательным преломлением, а также волноводы с оболочкой из гиперболической среды [17, 18]. Во всех обозначенных работах рассмотрены лишь линейный отклик сред на приложенное излучение.

**Е.И.Ляшко.** Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141707 Долгопрудный, Институтский пер., 9; e-mail: ostroukhova.ei@gmail.com  
**А.И.Маймистов.** Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141707 Долгопрудный, Институтский пер., 9; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: aimaimistov@gmail.com

Поступила в редакцию 21 июля 2017 г., после доработки – 28 сентября 2017 г.

В работе [18] изучен оптически линейный планарный волновод с прозрачным изотропным диэлектрическим слоем, помещенным в гиперболическую окружающую среду. Если ось анизотропии гиперболической среды направлена перпендикулярно границам раздела сред, то ТМ волны являются необыкновенными волнами в этой среде и обыкновенными волнами в диэлектрическом волноводном слое. Вследствие этого, в отличие от обычных диэлектрических волноводов, в волноводах с гиперболической оболочкой каждая ТМ мода характеризуется двумя частотами отсечки, т.е. каждая ТМ мода существует в волноводе только в определенном диапазоне частот при фиксированной толщине [18].

Нелинейные направленные моды в асимметричном планарном волноводе, который был образован изотропным диэлектрическим слоем, помещенным на линейную или нелинейную подложку и покрытым гиперболическим материалом, исследованы в [10]. В этом случае помимо направленных волноводных мод появляются дополнительные моды, которые возникают тогда, когда в нелинейной подложке присутствует локальный максимум электрического поля. Эти моды отсутствуют в линейном случае и могут быть возбуждены при превышении мощностью излучения определенного порога; частоты отсечки каждой из них определяются диэлектрическими проницаемостями сред и интенсивностью поля излучения.

В настоящей работе определены моды направленной волны в симметричном планарном волноводе, который образован изотропным нелинейным диэлектрическим слоем, окруженным гиперболическим линейным материалом (рис.1). Рассматриваются кубически-нелинейный отклик среды, из которой изготовлен волноводный слой, и его влияние на дисперсионные характеристики ТМ мод. Аналитически получены и проанализированы распределения полей направленных волн и дисперсионное соотношение, связывающее постоянную распространения и

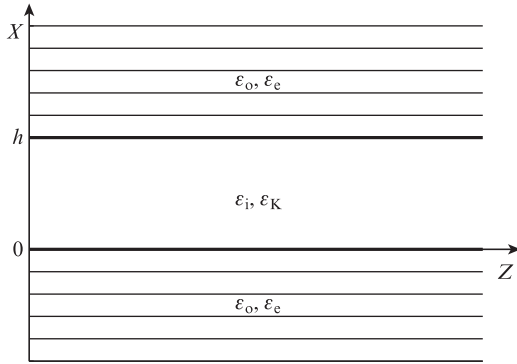


Рис.1. Схема гиперболического симметричного планарного волновода.

частоту излучения. Рассмотрены случаи фокусирующей и дефокусирующей керровских сред волноводного слоя. Во всех рассмотренных случаях ТМ моды также характеризуются двумя частотами отсечки. Для фокусирующей среды эффективный показатель преломления (или постоянная распространения) моды монотонно увеличивается с ростом интенсивности поля. В случае дефокусирующей среды постоянная распространения монотонно уменьшается, в пределе достигая нулевого значения. Эта ситуация соответствует нулевому потоку энергии вдоль волновода, или «остановленному свету», и возникает именно в симметричном гиперболическом волноводе. Показано, что плотность мод на единицу приведенной толщины волновода монотонно зависит от интенсивности излучения. Это дает возможность контролировать число возбуждаемых в волноводе мод, изменяя интенсивность излучения. Также показано, что в случае дефокусирующей сердцевинки ширина моды уменьшается с ростом интенсивности поля.

## 2. Основные уравнения

Рассматривается планарный волновод, диэлектрическая сердцевина которого, или волноводный слой, имеет толщину  $h$  и изготовлена из прозрачного немагнитного материала. Подложка и покровный слой являются одноосным гиперболическим материалом, оптическая ось которого направлена перпендикулярно оси волновода (рис.1). Электромагнитные свойства гиперболического материала определяются главными диэлектрическими проницаемостями (собственными значениями тензора диэлектрической проницаемости)  $\epsilon_o$  и  $\epsilon_e$ , имеющими разные знаки. Волноводный слой представлен прозрачным кубически-нелинейным (керровским) изотропным диэлектриком, характеризующимся линейной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_i$  и константой Керра  $\epsilon_K$ . Координатные оси определены следующим образом. Ось  $X$  направлена нормально к плоскости раздела сред, оси  $Y$  и  $Z$  лежат в плоскости волновода, причем ось  $Z$  совпадает с направлением распространения излучения в волноводе. В такой геометрии электромагнитные поля не зависят от координаты  $y$ .

В общем случае система уравнений, описывающая распространение волны с напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$  в анизотропной среде с оптической осью, направленной вдоль оси  $X$ , имеет следующий вид [18, 19]:

$$\left[ \frac{\epsilon_e(x)}{\epsilon_o(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_e(x) \right] E_x + 4\pi k_0^2 P_{nlx} = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_o(x) \right] E_y + 4\pi k_0^2 P_{nly} = 0, \tag{1}$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_o(x) \right] E_z + \frac{\Delta \epsilon(x)}{\epsilon_o(x)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} E_x + 4\pi k_0^2 P_{nlz} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{P}_{nl}$  – вектор нелинейной поляризации;  $k_0 = \omega/c$  – волновое число в вакууме;  $\Delta \epsilon(x) = \epsilon_e(x) - \epsilon_o(x)$ .

Для рассматриваемого планарного волновода линейные главные диэлектрические проницаемости можно представить кусочно-непрерывной функцией поперечной координаты

$$\epsilon_{o,e}(x) = \begin{cases} \epsilon_{o,e}, & x < 0, \\ \epsilon_i, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_{o,e}, & x > h. \end{cases} \tag{2}$$

В планарной геометрии (рис.1) ТЕ и ТМ волны могут рассматриваться независимо. Настоящая работа посвящена изучению направленных ТМ волн, которые здесь являются необыкновенными и описываются векторами  $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$  и  $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$ . Компоненты этих векторов связаны друг с другом уравнениями

$$H_y = \frac{i}{k_0} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = ik_0 \epsilon_e(x) E_x + i4\pi k_0 P_{nlx}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -ik_0 \epsilon_o(x) E_z - i4\pi k_0 P_{nlz}.$$

Предполагается, что никаких параметрических процессов (генерации гармоник или сложения частот) не происходит. Нелинейная поляризация ТМ волны в изотропном диэлектрике может быть представлена выражениями

$$P_{nlx} = (\gamma_{xx}|E_x|^2 + \gamma_{xz}|E_z|^2)E_x,$$

$$P_{nlz} = (\gamma_{zz}|E_z|^2 + \gamma_{zx}|E_x|^2)E_z,$$

где параметры  $\gamma_{ij}$  зависят от компонент тензора нелинейной восприимчивости четвертого ранга  $\chi_{mnlk}$ . При данном анализе будет полагаться справедливым приближение

$$\mathbf{P}_{nl} = \frac{\epsilon_K}{4\pi} |E_z|^2 E_z \mathbf{e}_z, \tag{4}$$

которое использовалось в ряде работ (напр., [20–24]), где исследовалось влияние нелинейного отклика среды на направленные волны. Такое приближение было достаточным для выявления основных особенностей направляющих структур.

## 3. Распределения полей для ТМ волн

Рассматриваемый волновод однороден в направлении оси  $Z$ , так что поля направленной волны могут быть представлены как  $\mathbf{E} = (\tilde{E}_x, 0, \tilde{E}_z) \exp(i\beta z)$  и  $\mathbf{H} = (0, \tilde{H}_y, 0) \times \exp(i\beta z)$ , где  $\beta$  – постоянная распространения. В этом предположении из (1) следует система уравнений для компоненты  $\tilde{E}_z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{E}_z + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_c} (k_0^2 \epsilon_c - \beta^2) \tilde{E}_z &= 0, \quad x < 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{E}_z + (k_0^2 \epsilon_i - \beta^2) \tilde{E}_z + k_0^2 \epsilon_K \tilde{E}_z^3 &= 0, \quad 0 \leq x \leq h, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{E}_z + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_c} (k_0^2 \epsilon_c - \beta^2) \tilde{E}_z &= 0, \quad x > h. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее вводятся параметры  $q^2 = (\epsilon_0/\epsilon_c)(\beta^2 - k_0^2 \epsilon_c)$ ,  $p^2 = k_0^2 \epsilon_i - \beta^2$ . Для направленных волн должно выполняться условие  $q^2 > 0$ . В случае окружающих гиперболических сред данное неравенство выполняется только при  $\epsilon_0 < 0$  и  $\epsilon_c > 0$ . Это так называемая гиперболическая среда металлического типа [11].

На знак величины  $p^2$  ограничений нет. Случай  $p^2 < 0$  соответствует паре поверхностных волн (плазмонных поляритонов [12, 13]), распространяющихся вдоль границ волновода. Случай  $p^2 > 0$  отвечает направленным волнам, которые называются волноводными модами. В дальнейшем рассматривается только случай  $p^2 > 0$ .

Первое и последнее уравнения системы (5) легко интегрируются:

$$\tilde{E}_z^{(1)} = A_0 \exp(qx), \quad \tilde{E}_z^{(3)} = A_h \exp(-qx). \quad (6)$$

Верхними индексами «1» и «3» помечены подложка и покровный слой соответственно.

Решение второго уравнения (5) может быть выражено через эллиптические функции Якоби [25]. Для этого надо один раз проинтегрировать уравнение (5), что даст

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}_z \right)^2 + p^2 \tilde{E}_z^2 + \frac{1}{2} k_0^2 \epsilon_K \tilde{E}_z^4 = G, \quad (7)$$

где  $G$  – постоянная интегрирования.

В последующем выводе мы ограничимся случаем дефокусирующей среды сердцевинки волновода ( $\epsilon_K < 0$ ). Случай фокусирующей среды ( $\epsilon_K > 0$ ) может быть рассмотрен аналогично.

Далее вводится зависящая переменная  $v = \sqrt{\alpha} \tilde{E}_z$ , где  $\alpha = \sqrt{k_0^2 |\epsilon_K|/2}$  – параметр нелинейности. Из (7) следует уравнение

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \alpha(v^2 - v_1^2)(v^2 - v_2^2). \quad (8)$$

Здесь

$$v_1^2 = \frac{p^2}{2\alpha} - \sqrt{\left(\frac{p^2}{2\alpha}\right)^2 - G}; \quad v_2^2 = \frac{p^2}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{2\alpha}\right)^2 - G}.$$

Замена  $w(x)$  на  $v(x)/v_1$  в (8) дает уравнение

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \alpha v_2^2 (1 - w^2)(1 - \xi^2 w^2), \quad (9)$$

где  $\xi^2 = v_1^2/v_2^2$ ;  $0 \leq \xi^2 \leq 1$ ;  $\xi$  монотонно растет с  $G$ . Следовательно, параметр  $\xi$  можно рассматривать как альтернативную  $G$  постоянную интегрирования. Параметры в (8) выражаются через  $\xi$  следующим образом:

$$v_1^2 = \frac{p^2}{\alpha} \frac{\xi^2}{1 + \xi^2}, \quad v_2^2 = \frac{p^2}{\alpha} \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Интегрирование в (9) приводит к выражению

$$\pm \frac{p(x - x_0)}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \int_0^w \frac{d\tilde{w}}{\sqrt{(1 - \tilde{w}^2)(1 - \xi^2 \tilde{w}^2)}}, \quad (10)$$

где  $x_0$  – вторая постоянная интегрирования. Интеграл в правой части этого уравнения есть эллиптический интеграл первого рода [25]. Следовательно,  $w(x)$  можно выразить через функцию Якоби – эллиптический синус:

$$w(x) = \pm \operatorname{sn} \left[ \frac{p(x - x_0)}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \xi \right].$$

Тогда  $z$ -компонента электрического поля в сердцевине волновода (индекс «z») определяется выражением

$$\tilde{E}_z^{(2)} = \frac{v_1}{\sqrt{\alpha}} w(x) = \pm \frac{p}{\alpha} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \operatorname{sn} \left[ \frac{p(x - x_0)}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \xi \right].$$

Максимальное значение  $z$ -компоненты электрического поля  $E_z$  есть

$$A_{\max} = \frac{p}{\alpha} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (11)$$

Принимая во внимание выражения (6) для электрического поля в подложке и покровном слое, можно записать систему

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z^{(1)}(x) &= \pm A_{\max} \operatorname{sn} \left[ \frac{-px_0}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \xi \right] \exp(qx), \quad x < 0, \\ \tilde{E}_z^{(2)}(x) &= \pm A_{\max} \operatorname{sn} \left[ \frac{p(x - x_0)}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \xi \right], \quad 0 \leq x \leq h, \\ \tilde{E}_z^{(3)}(x) &= \pm A_{\max} \operatorname{sn} \left[ \frac{p(h - x_0)}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \xi \right] \exp[q(h - x)], \quad x > h, \end{aligned} \quad (12)$$

так что  $\tilde{E}_z^{(1)}(0) = \tilde{E}_z^{(2)}(0)$  и  $\tilde{E}_z^{(2)}(h) = \tilde{E}_z^{(3)}(h)$ , т.е., как и положено, тангенциальные составляющие напряженностей электрического поля непрерывны на границах раздела сред.

В случае фокусирующей среды сердцевинки волновода распределение  $z$ -компоненты электрического поля следует из (12) при использовании замены  $\xi = i\kappa$ , где  $0 \leq \kappa \leq 1$ .

Компоненты  $\tilde{H}_y$  и  $\tilde{E}_x$  можно выразить через  $\tilde{E}_z$ , используя следующие формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y &= \frac{ik_0 \epsilon_c(x)}{k_0^2 \epsilon_c(x) - \beta^2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}_z, \\ \tilde{E}_x &= \frac{i\beta}{k_0^2 \epsilon_c(x) - \beta^2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Данные выражения следуют из системы (3) и предположения (4).

Интересно проанализировать, как система (12) преобразуется в линейном случае, когда величина  $\epsilon_K$  пренебрежимо мала. Тогда для параметра  $\xi$  выполняется

$$\xi^2 = \frac{p^2 - \sqrt{p^4 - G(2\alpha)^2}}{p^2 + \sqrt{p^4 - G(2\alpha)^2}} \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow 0),$$

$$\operatorname{sn}[p(x - x_0); 0] \rightarrow \sin[p(x - x_0)].$$

Следовательно, максимальное значение  $\tilde{E}_z^{(1,2,3)} = A_{\max}$  примет вид

$$A_{\max}^2 = \frac{p^2 \xi^2}{\alpha^2 1 + \xi^2} \rightarrow \frac{G}{p^2}, \tag{14}$$

где использовались определение  $\xi$  и правило Лопиталья. Таким образом, константа  $G$  связана с максимальной интенсивностью поля в линейном случае.

#### 4. Дисперсионные соотношения

С учетом условий непрерывности  $\tilde{H}_y$  на границах  $x = 0$ ,  $x = h$ , из системы (12) и уравнений (13) можно получить следующие соотношения:

$$-\frac{\varepsilon_0 p \sqrt{1 + \xi^2}}{\varepsilon_i q} = \frac{\text{cn}(-px_0/\sqrt{1 + \xi^2}; \xi) \text{dn}(-px_0/\sqrt{1 + \xi^2}; \xi)}{\text{sn}(-px_0/\sqrt{1 + \xi^2}; \xi)},$$

$$\frac{\varepsilon_0 p \sqrt{1 + \xi^2}}{\varepsilon_i q} \tag{15}$$

$$= \frac{\text{cn}[p(h - x_0)/\sqrt{1 + \xi^2}; \xi] \text{dn}[p(h - x_0)/\sqrt{1 + \xi^2}; \xi]}{\text{sn}[p(h - x_0)/\sqrt{1 + \xi^2}; \xi]}.$$

Сравнивая уравнения этой системы, можно заметить, что  $x_0 = h/2 + NT\sqrt{1 + \xi^2}/p$ , где  $T$  – период эллиптической функции  $\text{sn}(x, \xi)$ ,  $N$  – целая постоянная. Периоды эллиптических функций  $\text{sn}(x, \xi)$  и  $\text{cn}(x, \xi)$  одинаковы, период функции  $\text{dn}(x, \xi)$  равен  $T/2$ . Поэтому пара уравнений (15) сводится к единственному уравнению:

$$\frac{\varepsilon_0 p \sqrt{1 + \xi^2}}{\varepsilon_i q} = \frac{\text{cn}(ph/2\sqrt{1 + \xi^2}; \xi) \text{dn}(ph/2\sqrt{1 + \xi^2}; \xi)}{\text{sn}(ph/2\sqrt{1 + \xi^2}; \xi)}. \tag{16}$$

Выражение (16) связывает постоянную распространения  $\beta$ , содержащуюся в параметрах  $p$  и  $q$ , с частотой излучения  $\omega$ , которая входит в определение  $k_0$ . Таким образом, полученное уравнение является дисперсионным соотношением. При подстановке  $\xi = ik$  из (16) следует дисперсионное соотношение в случае фокусирующей среды волноводного слоя ( $\varepsilon_K > 0$ ).

Параметр  $\xi$  учитывает нелинейные свойства среды волноводного слоя. Из (11) следует, что его величина увеличивается с ростом  $A_{\max}^2$ .

В линейном случае ( $\xi = 0$ ) эллиптические функции заменяются их тригонометрическими аналогами и система уравнений (15) приводит к дисперсионному уравнению, полученному ранее [18]:

$$hk_0 \sqrt{\varepsilon_i - n_{\text{eff}}^2} = -2 \arctan \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_i^2 \varepsilon_e - n_{\text{eff}}^2}{|\varepsilon_0| \varepsilon_e \varepsilon_i - n_{\text{eff}}^2}} \right) + \pi m, \tag{17}$$

где  $m$  – целое число, которое можно использовать как маркер моды (его обычно называют индексом моды или порядком моды).

В дальнейшем анализе вместо постоянной распространения  $\beta$  будет использована величина  $n_{\text{eff}} = \beta k_0$ , называемая эффективным показателем преломления моды. В предыдущем разделе было показано, что параметр  $q$  должен удовлетворять неравенству  $q^2 > 0$ . В случае гиперболического окружения с главными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_0 < 0$  и  $\varepsilon_e > 0$  это условие ограничивает

возможные значения эффективного показателя преломления  $n_{\text{eff}}$ :

$$0 \leq n_{\text{eff}}^2 \leq \min(\varepsilon_e, \varepsilon_i), \tag{18}$$

где  $n_{\text{eff}} = 0$  соответствует нулевому значению постоянной распространения  $\beta$ , т.е. формированию стоячей волны между ограничивающими сердцевину средами. В лучевом представлении  $n_{\text{eff}} = \sqrt{\varepsilon_i} \sin \alpha_{\text{in}}$ , где  $\alpha_{\text{in}}$  – угол падения излучения на границу диэлектрик–гиперболическая среда. Таким образом, при  $\varepsilon_e < \varepsilon_i$  из (18) следует, что существует критический угол падения  $\alpha_{\text{cr}}$ , определяющий условие полного внутреннего отражения  $\sin \alpha_{\text{in}} \leq \sin \alpha_{\text{cr}} = \sqrt{\varepsilon_e/\varepsilon_i}$ , поэтому полное отражение излучения от границы диэлектрик–гиперболическая среда наблюдается для всех углов падения, меньших критического. В этом гиперболические среды отличаются от обычных анизотропных сред.

Следует отметить, что в случае обычного диэлектрического волновода возможные значения  $n_{\text{eff}}$  заключены в интервале

$$\varepsilon_e \leq n_{\text{eff}}^2 \leq \varepsilon_i. \tag{19}$$

Полное отражение от границы раздела двух диэлектриков возникает при  $\sin \alpha_{\text{in}} \geq \sin \alpha_{\text{cr}} = \sqrt{\varepsilon_e/\varepsilon_i}$ . На рис.2 представлены дисперсионные кривые для ТМ мод диэлектрического волновода с параметрами  $\varepsilon_i = 4.0$ ,  $\varepsilon_e = \varepsilon_0 = 2.25$ . Каждая кривая имеет начальную точку (частоту отсечки), где  $n_{\text{eff}}^2 = \varepsilon_e$ , и далее стремиться к общему для всех мод значению  $n_{\text{eff}}^2 = \varepsilon_i$ , которое достигается при  $hk_0 \rightarrow \infty$ .

Представленные в (16) эллиптические функции являются периодическими для всех  $\xi$ , исключая  $\xi = 1$ . Поэтому можно предположить, что уравнение (16), как и (17), обладает множеством ветвей решений  $n_{\text{eff}}^2(hk_0)$ , которые представляют собой дисперсионные характеристики волноводных мод. Каждая мода также помечена целочисленным индексом  $m$ .

В случае гиперболической среды при  $\varepsilon_e < \varepsilon_i$  значение  $n_{\text{eff}}^2 = \varepsilon_i$  не достижимо (18) и поведение дисперсионных кривых заметно отличается от представленного в случае обычного волновода (рис.2).

На рис.3 представлены функции  $n_{\text{eff}}^2(hk_0)$ , которые являются численными решениями уравнения (16) для нескольких значений  $\xi$ . Решения при  $\xi = 0$  соответствуют случаю (17). Полагалось, что линейные диэлектрические проницаемости слоев волновода таковы:  $\varepsilon_i = 4.0$ ,  $\varepsilon_e = 3.0$ ,

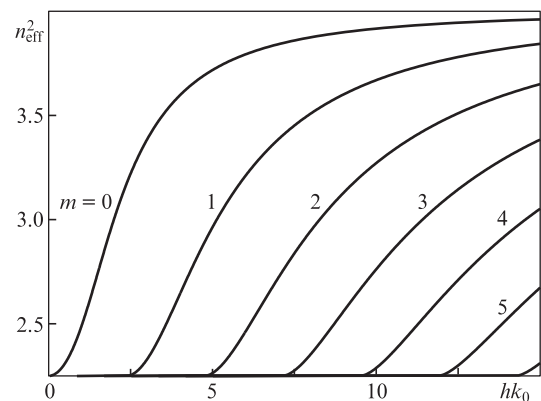


Рис.2. Дисперсионные кривые для ТМ мод обычного диэлектрического волновода с  $m = 0-5$ .



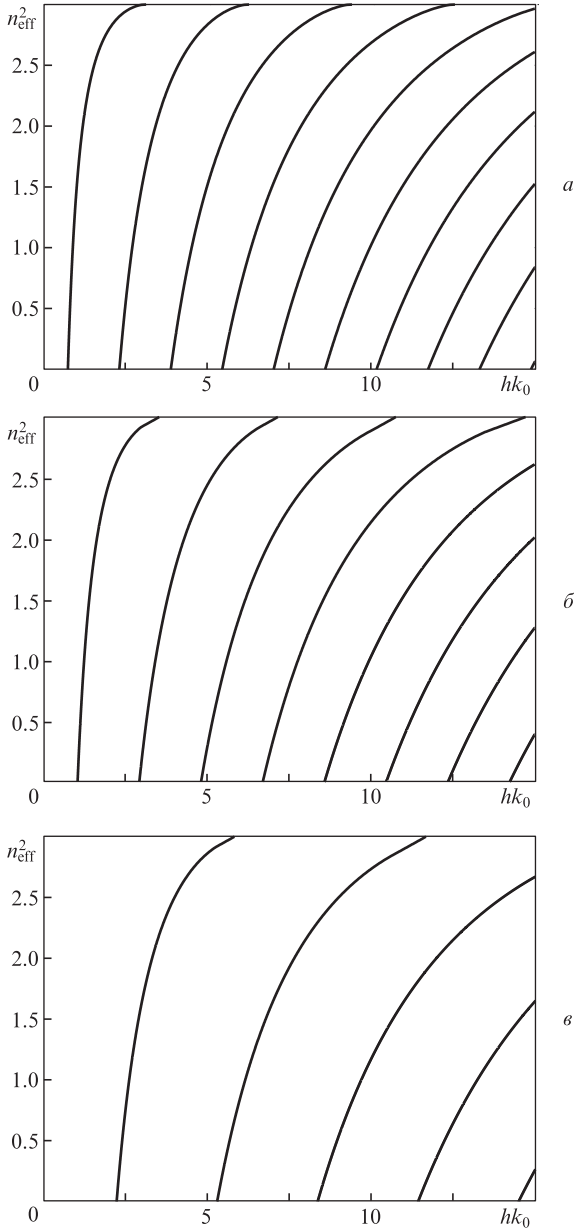


Рис.3. Дисперсионные кривые для ТМ мод в случае дефокусирующей среды,  $\epsilon_K < 0$ ,  $\epsilon_e < \epsilon_i$ , при индексах мод  $m = 1-9$  (а),  $1-8$  (б) и  $1-1057$  (в);  $\xi = 0$  (а),  $0.5$  (б) и  $0.9$  (в).

$\epsilon_o = -3.5$ . В работах [17, 18] было показано, что в волноводе с окружением из гиперболического материала отсутствует фундаментальная мода с  $m = 0$ . Уравнения (16) и (17) также не имеют решений при  $m = 0$ . Таким образом, во всех представленных на рис.3 случаях индексы мод начинаются с  $m = 1$ .

Из зависимостей, представленных на рис.3, следует, что ТМ моды в каждом случае имеют по две частоты отсечки. С изменением частоты при  $n_{\text{eff}}^2(hk_0) = 0$  мода возникает в волноводе, а при  $n_{\text{eff}}^2(hk_0) = \epsilon_e$  она исчезает – излучение выходит из сердцевины волновода (6). Это явление отсутствует в обычном диэлектрическом волноводе. Таким образом, обнаруженное в линейном случае присутствие дополнительной частоты отсечки для направленных ТМ мод [18] имеет место и при оптически нелинейном волноводном слое.

Сравнивая результаты, представленные на рис.3, можно заметить, что с ростом нелинейного параметра плот-

ность мод на единицу приведенной толщины  $hk_0$  уменьшается, при этом каждая дисперсионная кривая смещается в сторону больших значений приведенной толщины. Это позволяет предположить, что с ростом интенсивности поля в случае дефокусирующей среды эффективный показатель  $n_{\text{eff}}$  уменьшается и в итоге достигает нуля (при постоянной частоте излучения). Поскольку постоянная распространения  $\beta$  пропорциональна  $n_{\text{eff}}$ , случай  $n_{\text{eff}} = 0$  отвечает формированию стоячей волны в таком волноводе, т.е. отсутствию бегущей волны вдоль оси волновода.

На рис.4 представлены дисперсионные кривые для ТМ волн в случае фокусирующей среды ( $\epsilon_K > 0$ ) для нескольких значений нелинейного параметра  $\kappa$ . Из приведенных зависимостей следует, что в этом случае каждая ТМ мода также имеет две частоты отсечки. Однако, в отличие от ситуации с дефокусирующей средой, здесь с ростом параметра  $\kappa$  плотность возбуждаемых мод (частота следования дисперсионных кривых) увеличивается. И

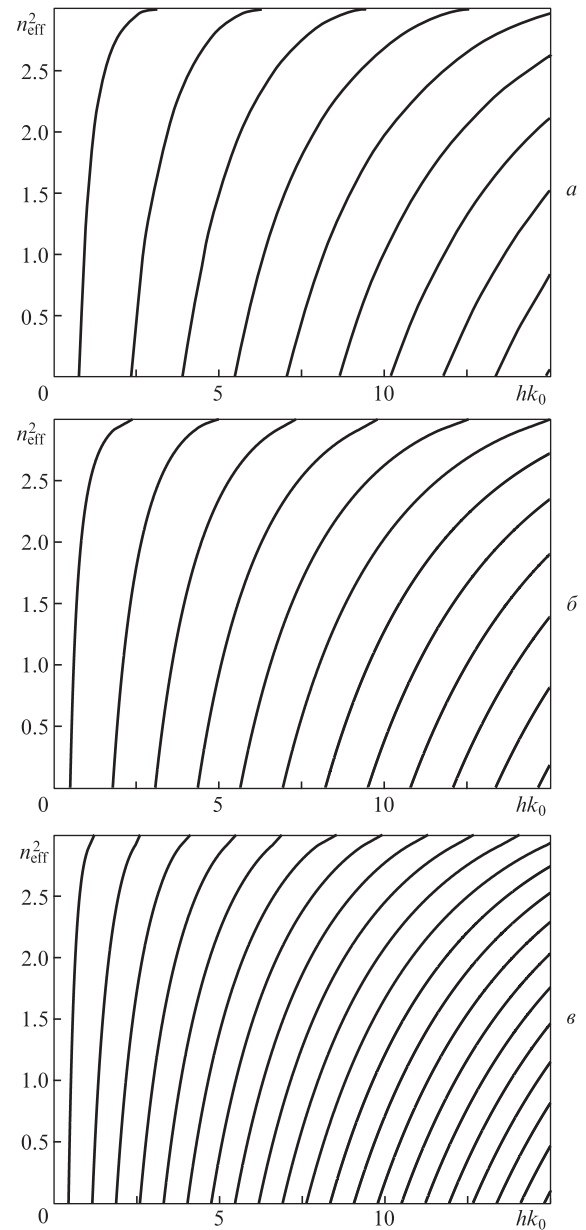


Рис.4. Дисперсионные кривые для ТМ мод в случае фокусирующей среды,  $\epsilon_K > 0$ ,  $\epsilon_e < \epsilon_i$ , при индексах мод  $m = 1-9$  (а),  $1-12$  (б) и  $1-21$  (в);  $\kappa = 0$  (а),  $0.5$  (б) и  $0.85$  (в).

при этом каждая из дисперсионных кривых смещается в сторону меньших значений  $hk_0$ . Поэтому в случае  $\epsilon_K > 0$  значение  $n_{\text{eff}}^2$  увеличивается с ростом интенсивности излучения при постоянной частоте. В результате достигается значение  $n_{\text{eff}}^2 = \epsilon_e$ , соответствующее частоте отсечки, и рассматриваемая мода перестает удерживаться волноводом.

Сопоставляя результаты для  $\epsilon_K < 0$  и  $\epsilon_K > 0$ , можно прийти к выводу, что случай  $\epsilon_K < 0$  является более интересным: число возможных мод здесь с ростом интенсивности уменьшается. Это может означать уменьшение количества возбуждаемых мод для данной ширины сердцевинного волновода и меньшую вероятность возникновения межмодовой дисперсии. К тому же увеличение интенсивности способствует замедлению распространяющейся моды.

Далее будет рассмотрен более подробно именно случай дефокусирующей среды диэлектрического слоя.

Отметим, что для максимально возможной интенсивности направленной волны нелинейный параметр  $\xi$  становится равным единице и эллиптические функции, входящие в дисперсионное соотношение (16), сводятся к соответствующим гиперболическим функциям [25]. Уравнение (16) принимает тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} & \tanh\left(\frac{hk_0}{2\sqrt{2}}\sqrt{\epsilon_i - n_{\text{eff}}^2}\right) \cosh^2\left(\frac{hk_0}{2\sqrt{2}}\sqrt{\epsilon_i - n_{\text{eff}}^2}\right) \\ &= -\frac{\epsilon_i}{\sqrt{|\epsilon_o| \epsilon_e}} \sqrt{\frac{\epsilon_e - n_{\text{eff}}^2}{\epsilon_i - n_{\text{eff}}^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь учтены знаки главных диэлектрических проницаемостей гиперболического материала,  $\epsilon_o < 0$  и  $\epsilon_e > 0$ , а также использованы явные выражения для параметров  $p$  и  $q$ . Поскольку  $hk_0 \geq 0$ , уравнение (20) имеет решение только в случае

$$n_{\text{eff}}^2 = \epsilon_e, \quad hk_0 = 0.$$

Однако эти условия лишены физического смысла, т.к. они реализуются при  $h = 0$ .

### 5. Влияние плотности энергии поля на характеристики мод волновода

Данный раздел посвящен анализу влияния плотности энергии волноводной моды на параметры ее распространения, такие как эффективный показатель преломления, частоты отсечки и ширина поперечного распределения электрического поля моды в случае  $\epsilon_K < 0$ .

В предыдущих разделах для учета нелинейных эффектов во всех уравнениях, описывающих направленную волну, использовался безразмерный параметр  $\xi$ . Однако простого физического смысла величина  $\xi$  не имеет, поэтому в последующем анализе в качестве параметра, определяющего степень нелинейности волновода, будет рассмотрена плотность переносимой волной энергии  $W$ .

Плотность энергии плоской монохроматической волны в среде на заданной частоте определяется с помощью формулы Бриллюэна:

$$W = \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon_e(x)|\tilde{E}_x|^2 + \epsilon_o(x)|\tilde{E}_z|^2 + |\tilde{H}_y|^2) dx, \quad (21)$$

где компоненты электрического поля ТМ волны определяются уравнениями (12) и (13), а поперечные распределения главных диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_e(x)$  и  $\epsilon_o(x)$  определены выражением (2).

#### 5.1. Эффективный показатель преломления

Рассматривается планарный волновод с фиксированной толщиной волноводного слоя. Частота излучения полагается постоянной и такой, что  $hk_0 = 5$ . Значения линейных диэлектрических проницаемостей такие же, как и в предыдущем разделе, керровская константа  $\epsilon_K = -10^{-9}$  ед. СГС (в единицах СИ это значение соответствует  $-10^{-18}$  м<sup>2</sup>/В<sup>2</sup>). На рис.5,а представлены дисперсионные кривые для линейного случая. Штриховая вертикальная

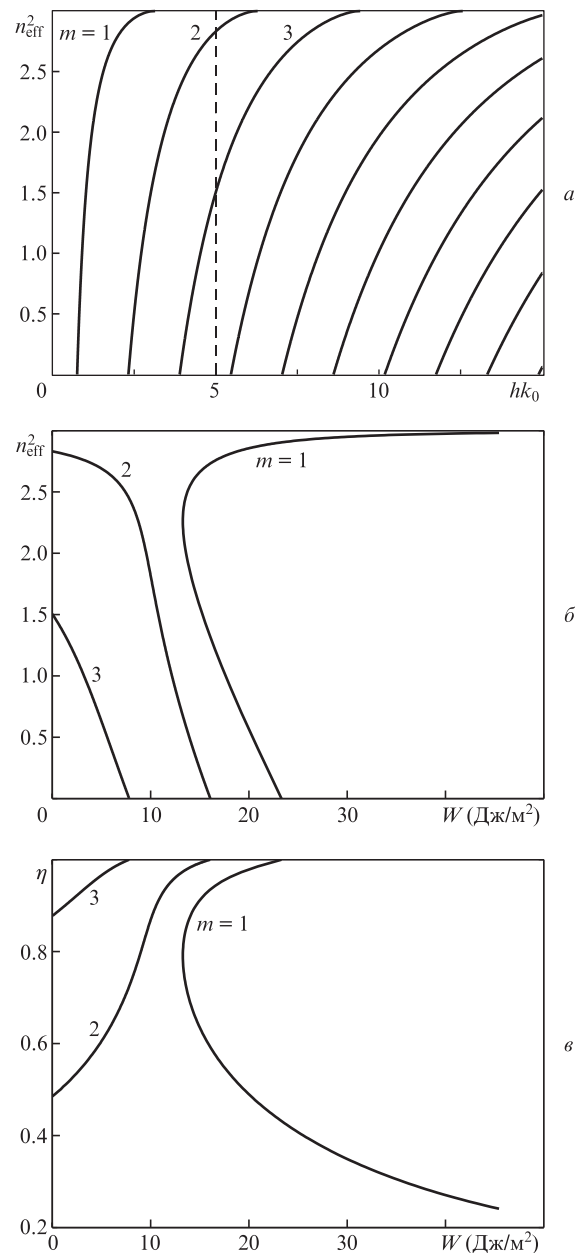


Рис.5. Поведение мод в гиперболическом волноводe при  $hk_0 = 5$ : а – дисперсионные кривые при  $\xi = 0$ , б – зависимость эффективного показателя преломления от плотности переносимой волной энергии и в – зависимость доли энергии, содержащейся в сердцевинном волноводe, от плотности переносимой энергии.

линия соответствует  $hk_0 = 5$ . Видно, что в данном случае при заданных ширине волноводного слоя и частоте излучения в волноводе могут быть возбуждены ТМ моды с индексами  $m = 2$  и  $3$ . Сравнивая зависимости, представленные на рис.3,а–в, можно заметить, что с ростом параметра нелинейности  $\xi$  дисперсионные кривые с индексами  $m = 2$  и  $3$  перестают пересекаться с прямой  $hk_0 = 5$ . Это означает, что, начиная с некоторых значений  $\xi$ , соответствующие моды в линейном волноводе не возбуждаются. Также при достаточно больших значениях  $\xi$  в волноводе с  $hk_0 = 5$  может быть возбуждена единственная мода с индексом  $m = 1$ , тогда как моды с  $m = 2$  и  $3$  им уже не удерживаются.

Аналогичное поведение дисперсионных кривых представлено на рис.5,б. Здесь показано, как квадрат эффективного показателя преломления всех возможных при  $hk_0 = 5$  мод изменяется с ростом плотности энергии  $W$ . При  $W = 0$  значения  $n_{\text{эф}}^2$  для индексов  $m = 2$  и  $3$  такие же, как и в линейном случае при  $hk_0 = 5$  (см. рис.5,а).

С увеличением плотности энергии  $W$  значения  $n_{\text{эф}}^2$  для  $m = 2$  и  $3$  уменьшаются. При некотором значении  $W$  распространение моды с индексом  $m = 3$  прекращается, т. к. соответствующий ей эффективный показатель  $n_{\text{эф}}$  или, что равносильно, постоянная распространения становятся равными нулю. При дальнейшем увеличении  $W$  мода с  $m = 3$  становится затухающей. При еще большем увеличении  $W$  становится равным нулю эффективный показатель преломления моды с индексом  $m = 2$  и мода покидает волновод.

Мода с индексом  $m = 1$  представляет собой особый случай. Она отсутствует в линейном случае, но если  $W$  превысит некоторый порог, данная мода может быть возбуждена. Другая особенность функции  $n_{\text{эф}}^2(W)$  при  $m = 1$  состоит в том, что она двузначна. Одна ветвь кривой ведет себя схожим образом как при  $m = 2$ , так и при  $m = 3$ :

$n_{\text{эф}}^2$  уменьшается до нуля, другая ветвь стремится к максимально возможному значению  $n_{\text{эф}}^2 = \epsilon_e$ .

На рис.5,в представлена зависимость доли энергии  $\eta$  направляемой волны, содержащейся в сердцевине волновода, от  $W$ , определенная как

$$h = W_{\text{core}}/W,$$

где  $W_{\text{core}}$  – плотность переносимой энергии, сконцентрированной в сердцевине волновода. Сравнивая рис.5,б и в, следует обратить внимание на то, что с уменьшением  $n_{\text{эф}}$  направленная волна лучше концентрируется в сердцевине волновода. Более подробно этот факт будет рассмотрен в следующем подразделе работы. Если  $n_{\text{эф}}^2$  стремится к  $\epsilon_e$  (мода с  $m = 1$ ), то направляемая волна постепенно покидает волновод. Две ветви кривой с  $m = 1$  соответствуют двум распространяющимся модам. Поле одной из них преимущественно содержится в сердцевине волновода, а поле второй сосредоточено главным образом в окружающей гиперболической среде.

На рис.6 и 7 представлены несколько примеров распределений поля ТМ мод при  $hk_0 = 5$  и  $\epsilon_K = -10^{-9}$  ед. СГС. На рис.6 показаны распределения электрического поля моды с  $m = 2$  при минимальном и максимальном значениях  $W$ . Случаи а и в отвечают  $W \leq 1$  Дж/м<sup>2</sup>,  $n_{\text{эф}}^2 = 2.83$ , случаи б и г соответствуют  $W \geq 15$  Дж/м<sup>2</sup>,  $n_{\text{эф}}^2 = 0.05$  (см. рис.5,б). Из представленных зависимостей следует, что длина затухания поля в подложке и в покрывном слое волновода меньше при малых значениях  $n_{\text{эф}}$ .

На рис.7 представлены распределения электрического и магнитного полей для нелинейной моды с  $m = 1$ . Случаи а и в отвечают  $n_{\text{эф}}^2 = 2.88$ , случаи б и г соответствуют  $n_{\text{эф}}^2 = 1.66$ .

Для сравнения на рис.8 представлены аналогичные рис.5 зависимости для обычного диэлектрического вол-

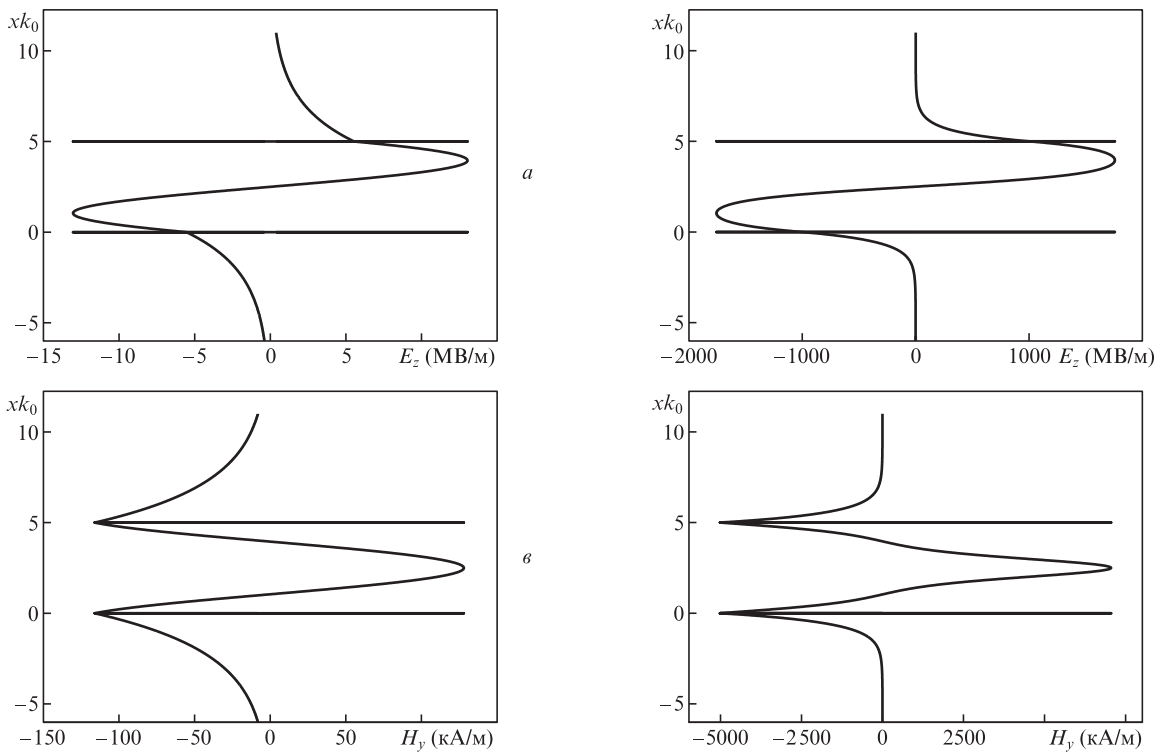


Рис.6. Распределения электрического ( $E_z$ ) и магнитного ( $H_y$ ) полей в гиперболическом волноводе с  $hk_0 = 5$  для ТМ моды с  $m = 2$  при малых (а, в) и больших (б, г) значениях интенсивности.

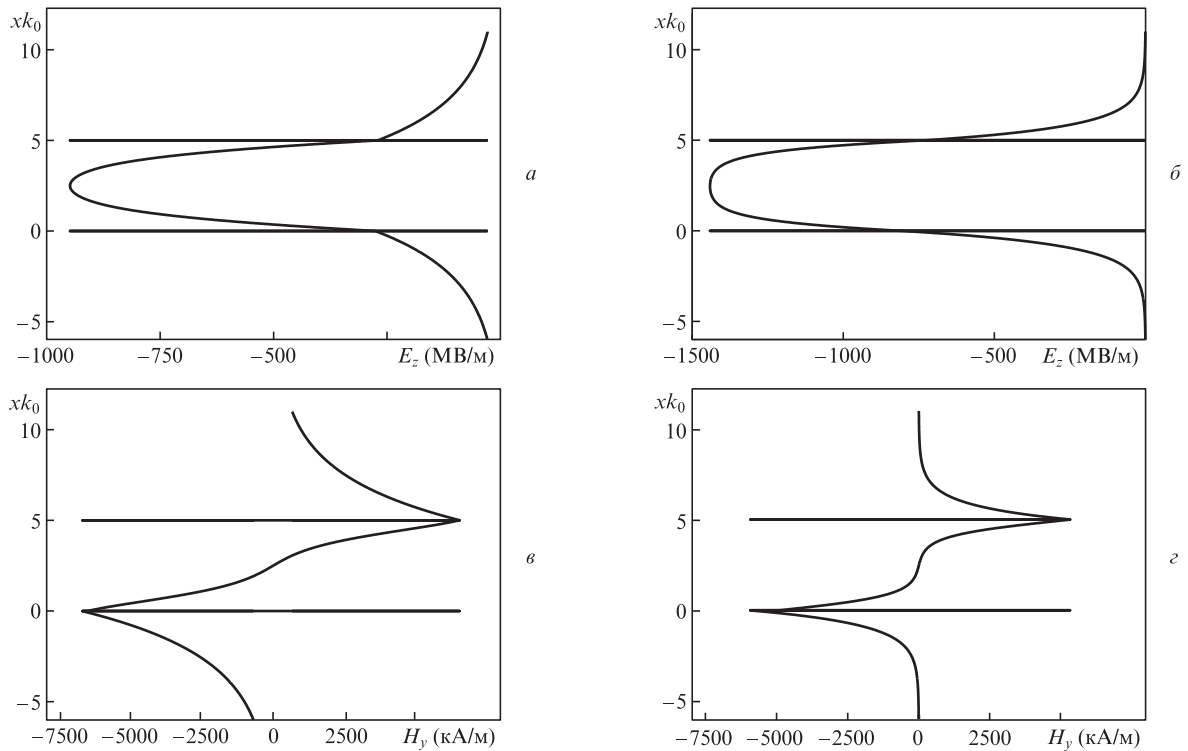


Рис.7. Распределения электрического ( $E_z$ ) и магнитного ( $H_y$ ) полей в гиперболическом волноводе с  $hk_0 = 5$  для ТМ моды с  $m = 1$  при  $n_{\text{эф}}^2 = 2.88$  (а, в) и 1.66 (б, г).

новода с  $\epsilon_1 = 4.0$ ,  $\epsilon_e = \epsilon_o = 2.25$ ,  $\epsilon_K = -10^{-9}$  ед. СГС. Приведенная толщина волноводного слоя (сердцевины волновода)  $hk_0$  полагалась равной 10. В случае сколь угодно

слабых полей в волноводе могут быть возбуждены моды с индексами  $m = 0-4$ . С увеличением интенсивности поля линейные значения  $n_{\text{эф}}^2$  каждой моды уменьшаются до своего минимального предела:  $n_{\text{эф}}^2 = \epsilon_e = \epsilon_o$ . Никаких дополнительных мод при этом не возникает.

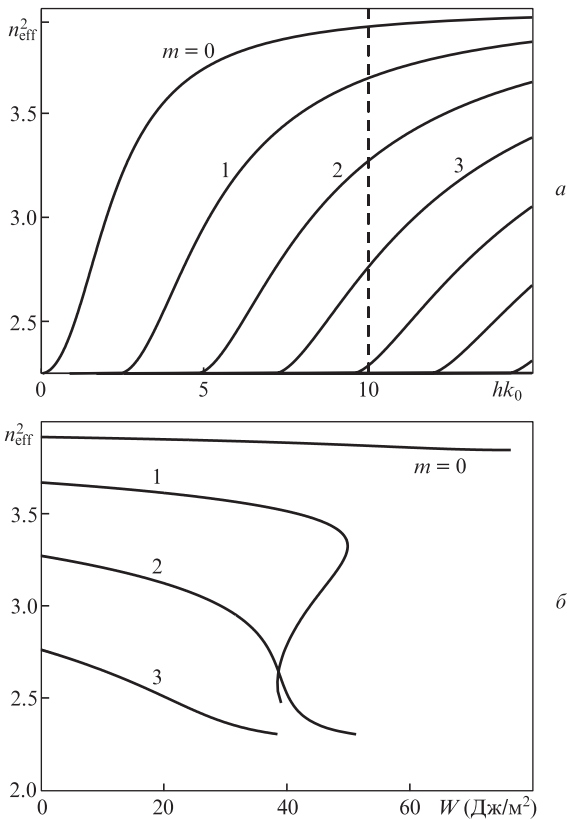


Рис.8. Дисперсионные кривые при  $\xi = 0$  (а) и зависимости эффективного показателя преломления от плотности переносимой энергии (б) для обычного диэлектрического волновода при  $hk_0 = 10$ .

### 5.2. Ширина поперечного распределения напряженности электрического поля

Из выражений (6) следует, что параметр  $q$  определяет затухание поля каналируемой вдоль оси  $X$  волны вне волноводного слоя. Определим длину затухания излучения вне волноводного слоя в единицах длины волны  $\lambda$  как

$$L_d = \frac{1}{4\pi\tilde{q}},$$

где  $\tilde{q} = q/k_0$  – нормированное значение  $q$ . Следовательно, на расстоянии  $L_d$  интенсивность поля  $|E_z|^2$  уменьшится в  $e$  раз. Поскольку  $n_{\text{эф}}$  зависит от плотности переносимой энергии  $W$ , длина  $L_d$  также будет изменяться с  $W$ .

На рис.9 представлены зависимости величины  $L_d$  от  $W$  для симметричного гиперболического и обычного диэлектрического волноводов. Для иллюстрации в обоих случаях выбрана мода с индексом  $m = 2$ . Как было показано ранее, в случае дефокусирующей керровской среды эффективный показатель преломления с ростом  $W$  уменьшается, а для гиперболической среды с  $\epsilon_o < 0$  и  $\epsilon_e > 0$  параметр  $q$  с увеличением  $W$  растет. В свою очередь  $q \sim 1/L_d$ . Таким образом, с ростом  $W$  концентрация излучения в сердцевине волновода увеличивается и ширина поперечного распределения напряженностей полей, которую можно назвать шириной моды, уменьшается. В случае обычного диэлектрического волновода параметры  $n_{\text{эф}}$  и  $q$  изменяются одинаково и, следовательно, с рос-



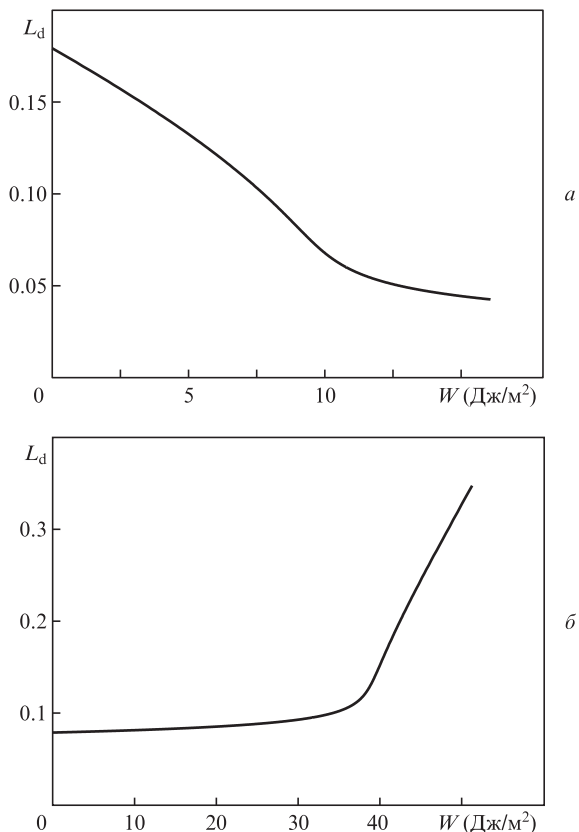


Рис.9. Зависимости длины затухания энергии моды с  $m = 2$  вне сердцевины волновода в единицах  $\lambda$  от плотности энергии для гиперболического волновода (а) и для обычного диэлектрического волновода (б).

том интенсивности поля  $W$  ширина моды увеличивается и излучение проникает глубже в оболочку.

### 5.3. Частоты отсечки

Ранее было показано, что каждая ТМ мода в гиперболическом волноводе при  $\epsilon_e < \epsilon_i$  и фиксированной толщине волноводного слоя существует только в определенном частотном интервале. Таким образом, каждая мода характеризуется двумя частотами отсечки. Далее рассматривается зависимость частот отсечки от плотности переносимой волной энергии. Для иллюстрации выбрана мода с индексом  $m = 2$ .

Частоты отсечки определяются следующим образом. Приведенные толщины  $hk_0$ , при которых  $n_{\text{эф}}^2 = 0$  и  $\epsilon_e$ , обозначаются как  $V_{\text{cm}}^{(1)}$  и  $V_{\text{cm}}^{(2)}$  соответственно, поэтому гиперболический волновод с толщиной волноводного слоя  $h$  удерживает ТМ моду с индексом  $m$  только для частот, лежащих в интервале

$$\frac{c}{h} V_{\text{cm}}^{(1)} \leq \omega \leq \frac{c}{h} V_{\text{cm}}^{(2)}. \tag{22}$$

Частоты отсечки могут быть получены из уравнения (16) как функции нелинейного параметра  $\xi$  при подходящих значениях  $p(n_{\text{эф}}^2)$  и  $q(n_{\text{эф}}^2)$ . Результаты для моды с  $m = 2$  представлены на рис.10,а. Исходные значения  $V_{\text{cm}}^{(1)}$  и  $V_{\text{cm}}^{(2)}$  при  $\xi = 0$  были найдены в линейном случае (17). Изменение частот отсечки с увеличением энергии поля  $W$  показано на рис.10,б. При построении зависимостей зна-

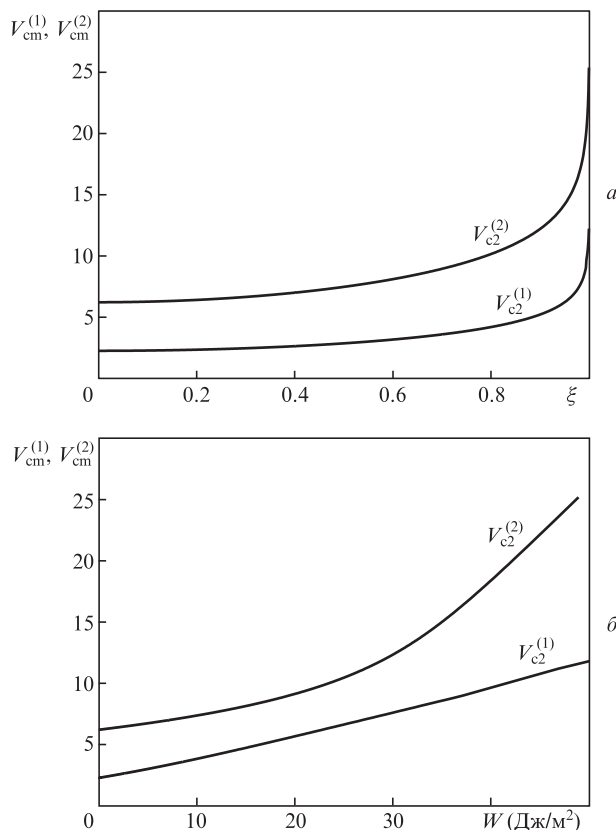


Рис.10. Зависимости частот отсечки от  $\xi$  (а) и  $W$  (б).

чения диэлектрических констант были выбраны теми же, что и ранее, а  $\epsilon_K = -10^{-9}$  ед. СГС.

Из рис. 10 следует, что обе частоты отсечки увеличиваются с ростом параметра нелинейности  $\xi$  (или интенсивности поля). Ширина интервала ( $V_{\text{cm}}^{(1)}, V_{\text{cm}}^{(2)}$ ) при этом увеличивается незначительно. При  $\xi \rightarrow 1$  обе частоты стремятся к бесконечности, и это означает, что в волноводе уже нельзя возбудить направленные волны.

### 6. Влияние потерь в окружающей гиперболической среде

Гиперболические среды, как правило, представляют собой композитные метаматериалы, в структуру которых входят проводящие компоненты, такие как металлические пластины или нанопроволочки. Это ведет к возникновению потерь энергии проходящего через такую среду электромагнитного излучения. Для реальной гиперболической среды главные диэлектрические проницаемости  $\epsilon_o$  и  $\epsilon_e$  представляют собой комплексные величины. Если частота излучения далека от всех характерных для среды резонансов, мнимые части  $\epsilon_o$  и  $\epsilon_e$  незначительны по сравнению с действительными [19]. Однако в силу комплексности  $\epsilon_o$  и  $\epsilon_e$  постоянная распространения  $\beta$  становится тоже комплексной величиной:  $\beta = k_0(n_{\text{эф}} + i\delta)$ . Коэффициент  $\delta$  определяет поглощение переносимой волной энергии в линейном случае, когда  $W(z) \sim \exp(-2k_0\delta z)$ .

На рис.11 представлены дисперсионные кривые для ТМ мод при  $\epsilon_e = 3 + 0.05i$ ,  $\epsilon_o = -3.5 + 0.1i$ ,  $\epsilon_i = 4$  и  $\epsilon_K = 0$ . Мнимые части  $\epsilon_o$ ,  $\epsilon_e$  такого порядка могут быть получены в реальных гиперболических средах без применения каких-либо способов компенсации энергетических потерь [26]. Зависимости действительной и мнимой частей пара-

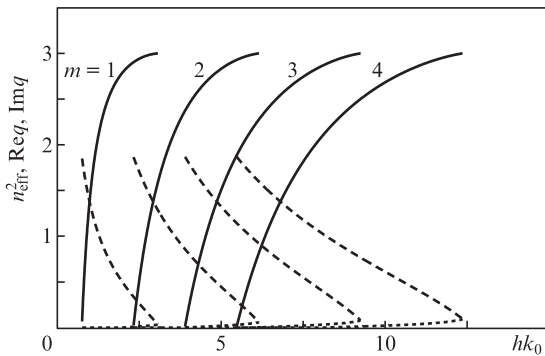


Рис.11. Зависимости  $n_{\text{eff}}^2$  (сплошные кривые),  $\text{Re } q$  (штриховые кривые) и  $\text{Im } q$  (пунктир) от приведенной толщины волновода  $hk_0$  для первых четырех мод.

метра  $q$  от  $hk_0$  приведены на этом же рисунке. Значения  $n_{\text{eff}}^2$  представляют собой квадраты действительной части нормированной постоянной распространения  $\text{Re } \beta/k_0$ .

При наличии потерь энергии частота отсечки определим следующим образом:  $V_{\text{cm}}^{(1)}$  определяется как и прежде, приведенная толщина  $hk_0$ , при которой  $\text{Re } q = \text{Im } q$ , будет обозначена как  $V_{\text{cm}}^{(2)}$ . При наличии потерь максимально возможное значение  $n_{\text{eff}}^2$  несколько превышает  $\text{Re } \epsilon_c$ . Как было показано в работе [19], вторая частота отсечки исчезает при сильной диссипации, когда  $\text{Re } \epsilon_{c,o} \sim \text{Im } \epsilon_{c,o}$ .

Длина распространения направленной моды в единицах длины волны излучения  $\lambda$  в линейном случае определяется как  $L_p = 1/(4\pi\delta)$ . Зависимости  $L_p$  от приведенной толщины волноводного слоя  $hk_0$  для нескольких первых ТМ мод представлены на рис.12. Для их построения главные диэлектрические проницаемости гиперболической среды были выбраны такими же, как и в [14], где рассматривался волновод с сердцевинной из гиперболической среды:  $\epsilon_c = 5.97 + 0.065i$ ,  $\epsilon_o = -3.44 + 0.15i$ . Для рассматриваемого в данном разделе волновода выбрано  $\epsilon_i = 7$ . Предполагается также, что частота излучения остается неизменной.

Из рис.12 видно, что для волновода с гиперболическим окружением длина распространения равна десяткам длин волн. Для волновода с сердцевинной из гиперболического материала, рассмотренного в [14], длина распространения составляла менее  $4\lambda$ . В рассмотренном нами здесь случае излучение локализовано главным образом в прозрачном диэлектрике, и только экспоненциально убывающие хвосты распределения полей находятся в гиперболическом материале.

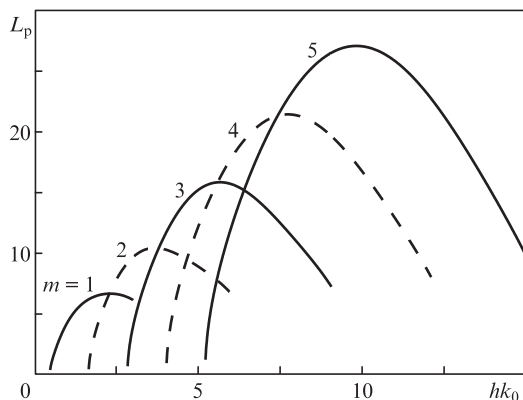


Рис.12. Зависимости длины распространения  $L_p$  в единицах  $\lambda$  от приведенной толщины  $hk_0$  для первых пяти мод.

В заключение следует отметить, что для гиперболических материалов со слабой диссипацией, когда  $\text{Im } \epsilon_{c,o} < 0.1 \text{Re } \epsilon_{c,o}$ , все полученные результаты сохраняются. Поглощение в окружающей диэлектрической среде приводит главным образом к потерям переносимой энергии и мало влияет на фазовые соотношения, которые диктуют свойства моды. Как обычно, потери приводят к конечной длине распространения излучения в волноводе.

## 7. Заключение

В настоящей статье теоретически исследованы свойства направленных ТМ мод планарного гиперболического волновода. Планарный волновод образован недиссипативным диэлектрическим слоем и окружен гиперболической средой с осью анизотропии, направленной вдоль нормали к границам раздела сред. В работе основное внимание уделено роли кубически-нелинейного отклика диэлектрического слоя.

Получено дисперсионное соотношение для направленных мод симметричного нелинейного гиперболического волновода. Показано, что если диэлектрическая проницаемость волноводного слоя превышает необыкновенную компоненту тензора диэлектрической проницаемости окружающих сред, то каждая ТМ мода характеризуется двумя частотами отсечки, так же как и в случаях, рассмотренных ранее [18, 19]. Это приводит к тому, что каждая мода может быть возбуждена только в определенном частотном интервале. В отличие от волновода, рассмотренного в [19], в настоящей работе основная часть энергии направленного излучения сосредоточена в нелинейной диэлектрической среде. По этой причине плотность мод на единицу приведенной толщины  $hk_0$  зависит от интенсивности излучения в волноводе. В случае фокусирующей среды плотность мод растет с интенсивностью поля, а в случае дефокусирующей среды – уменьшается.

В случае дефокусирующей среды постоянная распространения моды уменьшается с ростом интенсивности электромагнитного поля. Кроме того, при некотором ее значении постоянная распространения обращается в ноль. С дальнейшим увеличением интенсивности поля рассматриваемая мода становится экспоненциально затухающей и перестает распространяться в волноводе. Таким образом, можно говорить о новом механизме замедления света, который реализуется в нелинейном гиперболическом волноводе. Степень замедления контролируется интенсивностью излучения в волноводе. Оптически контролируемая плотность мод может стать основой для оптических модуляционных устройств и переключателей.

Были также проанализированы зависимости ширины моды и частот отсечки от плотности переносимой волной энергии. Показано, что с ростом энергии электромагнитного поля ширина поперечного распределения моды уменьшается. В случае обычного диэлектрического волновода эта зависимость является обратной.

Влияние диссипации в гиперболической среде покровного слоя планарного волновода обсуждалось в работе [19]. Как в указанной, так и в настоящей работе показано, что присутствие потерь ведет к уменьшению амплитуды направленной волны. Эффект потерь энергии в рассмотренных гиперболических волноводах во многом подобен эффекту, имеющему место в случае волноводов с металлическими стенками [27–30].

Для практической реализации рассмотренной волноводной структуры необходимо выполнение ряда основных требований. Потери энергии в гиперболической оболочке должны быть малыми ( $\text{Im}\epsilon_{o,e} < 0.1\text{Re}\epsilon_{o,e}$ ), линейная диэлектрическая проницаемость сердцевины должна превышать главную необыкновенную компоненту проницаемости гиперболической среды ( $\epsilon_i > \epsilon_e$ ), сердцевина должна представлять собой кубически-нелинейную среду с достаточно большим модулем керровской константы  $\epsilon_K$ . Рассмотренный волновод может быть реализован, например, при использовании следующих сред. В качестве гиперболической оболочки волновода могут выступать рассмотренные в [11] метаматериалы, образованные чередующимися субволновыми слоями Ag/SiO<sub>2</sub>, с объемной долей серебра 0.4. При этом диэлектрические константы таковы:  $\epsilon_e = 3.7 + 0.01i$ ,  $\epsilon_o = -8.8 + 0.24i$  (при  $\lambda = 0.75$  мкм). Дополнительные частоты отсечки существуют, если диэлектрическая проницаемость сердцевины превышает  $\epsilon_e$ . Достаточно большими значениями диэлектрических проницаемостей обладают полупроводники, например  $\epsilon_i = 11.68$  (Si), 13.1 (GaAs), 9.2 (ZnSe), 10 (SiC) (значения даны для низких частот). Кроме того, полупроводники обладают значительным нелинейным откликом:  $\epsilon_K \sim 10^{-10} - 10^{-9}$  ед. СГС ( $10^{-19} - 10^{-18}$  м<sup>2</sup>/В<sup>2</sup>), что позволяет рассматривать их в качестве возможной сердцевины гиперболического волновода. При этом требуемые плотности мощности излучения составят 50–500 МВт/см<sup>2</sup>.

Авторы выражают благодарность И.Р.Габитову и К.Баюну за многочисленные плодотворные дискуссии. Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 15-02-02764).

1. Elser J., Wangberg R., Podolskiy V.A., Narimanov E.E. *Appl. Phys. Lett.*, **89**, 261102 (2006).
2. Noginov M.A., Barnakov Yu.A., Zhu G., Tumkur G., Li H., Narimanov E.E. *Appl. Phys. Lett.*, **94**, 151105 (2009).
3. Poddubny A.I., Belov P.A., Ginzburg P., Zayats A.V., Kivshar Yu.S. *Phys. Rev. B*, **86**, 035148 (2012).
4. Poddubny A.I., Belov P.V., Kivshar Yu.S. *Phys. Rev. A*, **87**, 035136 (2013).
5. Ferrari L., Dylan Lu, Lepage D., Zhaowei Liu. *Opt. Express*, **22**, 4301 (2014).
6. Benedicto J., Centeno E., Polles R., Moreau A. *Phys. Rev. B*, **88**, 245138 (2013).
7. Zapata-Rodriguez C.J., Miret J.J., Vukovic S., Belic M.R. *Opt. Express*, **21**, 19113 (2013).
8. Ni Xingjie, Ishii Satoshi, Thoreson M. D., Shalaev V.I. M., Seunghoon Han, Sangyoon Lee, Kildishev A.I. *Opt. Express*, **19**, 25242 (2011).
9. Drachev V. P., Podolskiy V.A., Kildishev A.I. *Opt. Express*, **21**, 15048 (2013).
10. Shekhar P., Atkinson J., Jacob Z. *Nano Convergence*, **1** (14), 1 (2014).
11. Ferrari L., Wu Chihhui, Lepage D., Zhang X., Liu Zh. *Progr. Quantum Electron.*, **40**, 1 (2015).
12. Babicheva V.E., Shalaginov M.Y., Ishii S., Boltasseva A., Kildishev A.I. *Opt. Express*, **23**, 31109 (2015).
13. Babicheva V.E., Shalaginov M.Y., Ishii S., Boltasseva A.I., Kildishev A.I. *Opt. Express*, **23**, 9681 (2015).
14. Huang Y.J., Lu W.T., Sridhar S. *Phys. Rev. A*, **77**, 063836 (2008).
15. Hua Zhu, Xiang Yin, Lin Chen, Zhongshu Zhu, Xun Li. *Opt. Lett.*, **40**, 4595 (2015).
16. Alekseyev L.V., Narimanov E. *Opt. Express*, **14**, 11184 (2006).
17. Guo-ding Xu, Tao Pan, Tao-cheng Zang, Jian Sun. *Opt. Commun.*, **281**, 2819 (2008).
18. Ляшко Е.И., Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **45**, 1050 (2015) [*Quantum Electron.*, **45**, 1050 (2015)].
19. Lyashko E.I., Maimistov A.I. *J. Opt. Soc. Am. B*, **33**, 2320 (2016).
20. Seaton C.T., Valera J.D., Svenson B., Stegeman G.I. *Opt. Lett.*, **10** (3), 149 (1985).
21. Lederer F., Langbein U., Ponath H.-E. *Appl. Phys. B*, **31** (3), 187 (1983).
22. Mihalache D., Mazilu D. *Appl. Phys. B*, **41** (2), 119 (1986).
23. Михалаче Д., Федянин В.К. *Теор. мат. физика*, **54**, 443 (1983).
24. Агранович В.М., Бабиченко В.С., Черняк В.Я. *Письма в ЖЭТФ*, **32**, 532 (1980).
25. Bateman H., Erdelyi A. (Eds). *Higher Transcendental Functions* (New York, Toronto, London: Mc Graw-Hill Book Company, 1955, vol. 3).
26. Tumkur T., Barnakov Y., Kee S. T., Noginov M.A., Liberman V. *J. Appl. Phys.*, **117**, 103104 (2015).
27. Kaminow I.P., Mammel W.L., Weber H. *Appl. Opt.*, **13** (2), 396 (1974).
28. Rollke K.H., Sohler W. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-13** (4), 141 (1977).
29. Gubbels M., Wright E.M., Stegeman G.I., Seaton C.T., Moloney J.V. *Opt. Commun.*, **61** (5), 357 (1987).
30. Miyagi M., Hongo A., Kawakami S. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-19** (2), 136 (1983).