

Фактор спонтанного излучения в моде оптического диэлектрического волновода

А.П.Богатов

В рамках полного векторного анализа найдено выражение для фактора спонтанного излучения в поперечную моду диэлектрического волновода. Выполнено сравнение полученных результатов с результатами, полученными ранее в рамках скалярного приближения. Показано, что их наиболее значительное количественное различие возможно для волноводов, используемых в диодных лазерах и усилителях, в которых поперечные размеры пучка соизмеримы с длиной волны. Получены условия применимости скалярного приближения для расчета фактора спонтанного излучения.

Ключевые слова: фактор спонтанного излучения, диодный лазер, оптический усилитель, волновод.

1. Введение

При анализе влияния спонтанного излучения на характеристики диодного лазера или усилителя возникает вопрос об интенсивности этого излучения. Особенно остро этот вопрос присутствует в тех задачах, где рассматриваются шумовые характеристики и спонтанное излучение является принципиально неустранимым источником шума. Поскольку в подавляющем большинстве диодных лазеров и усилителей генерация излучения и его усиление происходят в оптическом волноводе, то эти задачи по сути сводятся к нахождению той доли общего спонтанного излучения элементарного излучателя, которая поступает (захватывается) в диэлектрический волновод. Забегая вперед, отметим, что эта доля заведомо много меньше единицы, т. е. основное спонтанное излучение попадает в те моды, которые являются модами свободного пространства, и только малая его доля захватывается волноводом. Определение этой доли и представляет собой задачу нахождения фактора спонтанного излучения в моде волновода, решение которой, в силу ее важности, имеет достаточно длинную историю (см., напр., [1–12]). Для расчета этого фактора в качестве исходного было принято то почти очевидное обстоятельство, что интенсивность спонтанного излучения в моде пропорциональна доле ее фазового объема в общем объеме всех мод, в которых имеет место спонтанное излучение.

Такая ситуация сохранялась вплоть до появления работы Питермана [3], где был введен дополнительный безразмерный множитель K , величина которого зависит от кривизны волнового фронта моды. Для мод с волноводом, формируемым исключительно профилем показателя преломления (index-guided), и плоским волновым фронтом этот фактор равен единице. В лазерах с волноводом, формирующимся усилением (gain-guided, g-g), моды которых имеют значительную кривизну волнового фронта,

значение этого множителя может превышать порядок величины. Работа [3] получила широкую известность и признание, а сам этот фактор в литературе стал называться K -фактором Питермана. Затем, однако, появились и критические замечания по поводу правомерности его использования в выражении для интенсивности спонтанного излучения в моде [4, 9], и была даже опубликована дискуссия по этому поводу [11, 12]. Критические замечания и разногласия сводились, в основном, к разным подходам к условию ортогональности мод для лазеров с волноводом, формируемым усилением. В ходе полемики рассматривались не только расчеты, но и качественные и даже эвристические соображения [8]. Возможно, эта дискуссия продолжалась бы и дальше, если бы g-g-лазеры, начиная с некоторых пор, не потеряли части своей актуальности.

Что касается вопроса о корректном расчете спонтанного излучения в моде диодного лазера или усилителя, то он так и остался дискуссионным. Однако интерес к решению этой задачи в какой-то мере сохранился до сих пор, и не только из-за отсутствия корректного решения одной из принципиальных задач, касающихся диодных лазеров, но и вследствие появления в последнее время новых объектов – интегральных монокристаллических многосекционных чипов (см, напр., [13, 14]) на основе лазерных гетероструктур. Такие чипы могут содержать g-g-области активных волноводов в виде оптических усилителей, оптических ветвителей и, в том числе, усилителей мощности, рассмотренных, например, в работах [15–19]. Спонтанное излучение в таких устройствах представляет собой «естественный» и неустранимый источник шума, что требует его адекватного учета.

Сказанное выше мотивировало выполнение настоящей работы. В подходе, принятом в предыдущих работах, можно выделить два приближения, справедливость которых не очевидна. Первое – это скалярное приближение для амплитуды моды. Его трудно принять, особенно для мод диодного лазера, в котором поперечные размеры волновода сравнимы с длиной волны, и особенно для случая искривленного волнового фронта моды. Понятно, что в этом случае имеет место существенная компонента вектора Умова–Пойнтинга в поперечном к оси распространения волны направлении. Наличие градиента ам-

А.П.Богатов. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: bogatov@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 7 февраля 2017 г., после доработки – 10 марта 2017 г.

плитуды электрического поля приводит к перераспределению амплитуд компонент векторов поля. Это необходимо учитывать при расчете потока мощности вдоль оптической оси. Второе приближение (о нем уже упомянуто выше) – это условия ортогональности мод в волноводе, обладающем значительными оптическими потерями и усилением в пространственно разнесенных участках, что вызвано существенным изменением мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости в поперечном к оси волновода направлении. Хотя условие ортогональности для мод волновода с потерями достаточно определенно сформулировано в книге Вайнштейна [20], тем не менее применительно к модам диэлектрического волновода в скалярном приближении его использование не совсем очевидно.

В настоящей статье, в отличие от более ранних работ, анализ выполнен в полном векторном представлении. Кроме того, при расчете не использовано (в явном виде) условие ортогональности мод.

2. Физическая модель

Принятый нами подход основан на классической электродинамике. Принимая во внимание тот факт, что последовательный расчет спонтанного излучения возможен только в рамках квантовой электродинамики, воспользуемся принципом соответствия между классической и квантовой теориями. При этом будем полагать, что усреднение по микроансамблю происходит с использованием статистической матрицы. Из нашей задачи мы исключим сам механизм спонтанного излучения, связанный с собственным движением заряда элементарного излучателя, снабдив его всеми атрибутами классического диполя с заранее известными параметрами. Аналитические выражения для этих параметров могут быть получены в рамках квантовой теории, а их численные значения затем найдены, например, непосредственно из эксперимента с учетом полученных аналитических соотношений. К ним относятся дипольный момент, время жизни, спектр излучения и др. Таким образом, наша задача сведется к нахождению амплитуды волны в диэлектрическом волноводе, порожденной излучающим диполем, который помещен в этот волновод.

Для металлического волновода такое решение хорошо известно и приведено, например, в [20]. Оно получено с использованием разложения поля по модам волновода. Подход, принятый в настоящей работе, аналогичен подходу [20] с некоторой модификацией для случая диэлектрического волновода с существенно комплексной диэлектрической проницаемостью.

Далее будем полагать, что наличие волновода никак не влияет на характер внутреннего движения заряда диполя, как если бы этот диполь излучал в однородной прозрачной среде с показателем преломления $n = \sqrt{\text{Re} \epsilon}$. Например, средняя излучаемая мощность p_0 гармонически осциллирующего диполя на частоте ω_0 в этом случае составила бы

$$p_0 = \frac{\omega_0^4 d_0^2 n}{3c^3} = \frac{\hbar \omega_0}{\tau}, \tag{1}$$

где d_0^2 – квадрат модуля дипольного момента; $\hbar \omega_0$ – энергия кванта; τ – спонтанное время жизни. От часто используемого аналогичного выражения (1) отличается только

множителем n . Приравняв выражение (1) к выражению для средней мощности спонтанного излучения возбужденного элементарного излучателя в виде $\hbar \omega_0 / \tau$, найдем величину d_0^2 для рассматриваемого осциллятора. В таком виде вся часть, относящаяся к квантовой механике, для спонтанного излучения сводится к нахождению τ . В нашем случае значение τ хорошо известно как из расчетов, так и из эксперимента, и для типичных прямозонных полупроводников оно составляет ~ 1 нс. В рамках такого подхода наша задача приобретает исключительно классический характер.

3. Расчет амплитуды волны волноводной моды, излучаемой элементарным диполем

Схема модели волновода и осциллирующего диполя для нашего анализа представлена на рис.1. Комплексная диэлектрическая проницаемость $\epsilon(x, y)$ зависит только от двух поперечных координат, а волна излучения с амплитудой напряженности электрического поля $\mathcal{E}(x, y, z, t)$ распространяется неограниченно вдоль оси z . Рассмотрим свободное распространение монохроматической волны в волноводе. Для этого представим векторы амплитуд электрического поля $\mathcal{E}(x, y, z, t)$ и магнитного поля $\mathcal{H}(x, y, z, t)$ в комплексной форме в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}(x, y, z) \exp(-i\omega t) + \text{к.с.} \}, \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{H}(x, y, z) \exp(-i\omega t) + \text{к.с.} \}. \end{aligned} \tag{2}$$

Из уравнений Максвелла следует, что комплексная амплитуда \mathbf{E} должна удовлетворять известному уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon(x, y) \mathbf{E} = 0, \tag{3}$$

где $k_0 = \omega/c$. Дополнение уравнения (3) стандартными граничными условиями для волноводных мод приводит к тому, что решения для \mathbf{E} имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{v}_k(x, y) \exp(ikz), \tag{4}$$

где $k = k' + ik'' = \omega n_{\text{eff}}/c + i\alpha/2$, а поперечное распределение амплитуды волны характеризуется комплексной вектор-функцией $\mathbf{v}_k(x, y)$. При этом ее квадрат модуля – скалярное произведение $\mathbf{v}_k(x, y) \mathbf{v}_k^*(x, y)$ – достаточно быстро стремится к нулю при неограниченном росте $|x|$, $|y|$.

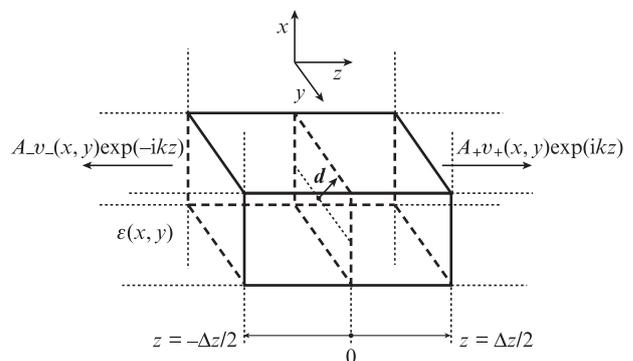


Рис.1. Схема оптического волновода, содержащего излучающий диполь.

Дискретный набор комплексных констант распространения k , каждая из которых соответствует своей функции $v_k(x, y)$ и поэтому обозначена индексом k , представляет собой набор поперечных мод волновода. Реальная часть k' определяет эффективный показатель преломления n_{eff} , а ее мнимая часть k'' соответствует поглощению $\alpha = 2k''$ или усилению $g = -2k''$ (если $k'' < 0$ для моды с поперечным профилем $v_k(x, y)$).

Заметим, что не для всяких профилей $\varepsilon(x, y)$ существуют решения вида (4), и если это так, то, следовательно, данный профиль $\varepsilon(x, y)$ не поддерживает волноводного распространения излучения. Мы будем рассматривать только такие волноводы, для которых существуют решения вида (4), уже известные нам как решения отдельной задачи вне рамок настоящей работы. Очевидно, что смена знака для k в (4) меняет направление распространения волны вдоль оси z на противоположное. Для определенности считаем, что положительный знак для k соответствует положительному знаку ее реальной части и характеризует волну, бегущую в положительном направлении вдоль оси z .

Далее мы ограничимся рассмотрением только какой-то одной, например фундаментальной, поперечной моды с ее функцией $v(x, y)$, поэтому здесь и везде ниже у этой функции индекс k опущен. Амплитуды волн электрического поля, бегущих в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси z , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm} &= \mathbf{v}_{\pm}(x, y) \exp(\pm ikz), \\ \mathbf{H}_{\pm} &= \frac{1}{ik_0} \text{rot} \mathbf{E}_{\pm} = \mathbf{u}_{\pm}(x, y) \exp(\pm ikz). \end{aligned} \quad (5)$$

При этом компоненты вектор-функций \mathbf{v}_- и \mathbf{u}_- связаны с компонентами функций $\mathbf{v}(x, y) \equiv \mathbf{v}_+(x, y)$ и $\mathbf{u}(x, y) \equiv \mathbf{u}_+(x, y)$ для положительного направления движения соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_-(x, y) &= [v_x(x, y); v_y(x, y); -v_z(x, y)], \\ \mathbf{u}_-(x, y) &= [-u_x(x, y); -u_y(x, y); u_z(x, y)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Не теряя общности, расположим точечный и гармонически осциллирующий диполь \mathbf{d} в плоскости $z = 0$ с поперечными координатами x_0 и y_0 . Для \mathbf{d} имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t, x, y, z) &= \frac{1}{2} d_0 \{ \boldsymbol{\xi} \exp(-i\omega t) + \text{к.с.} \} \\ &\times \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\xi}$ – комплексный вектор с единичным модулем. Амплитуду \mathbf{E}_m возбуждаемой этим диполем волны запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{E}_m \exp(-i\omega t) + \text{к.с.} \}, \\ \mathbf{E}_m &= \begin{cases} A_+ \mathbf{v}_+(x, y) \exp(ikz) & \text{при } z > 0, \\ A_- \mathbf{v}_-(x, y) \exp(-ikz) & \text{при } z < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

где A_{\pm} – постоянные коэффициенты. Соотношения (8) представляют собой две волны, исходящие из плоскости

$z = 0$ в отрицательном и положительном направлениях. Комплексная амплитуда \mathbf{E}_m должна удовлетворять неоднородному уравнению

$$\begin{aligned} \text{rot} \text{rot} \mathbf{E}_m - k_0^2 \varepsilon \mathbf{E}_m &= \frac{4\pi i k_0}{c} \mathbf{j} \\ &= 4\pi k_0^2 d_0 \boldsymbol{\xi} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z). \end{aligned} \quad (9)$$

В правой части (9) находится множитель, соответствующий сторонней плотности тока \mathbf{j} , которая является производной по времени от дипольного момента. Очевидно, что для $z > 0$ и $z < 0$ выражения (8) являются одними из частных решений уравнения (3). В точке $z = 0$ решение имеет особую точку, что определяется наличием в правой части (9) δ -функций. Сразу отметим, что решение (7) в виде (8) нельзя считать полным, поскольку излучение диполя происходит не только в волноводную моду, но и в волны, излучаемые в открытое пространство. Однако в силу единственности решения для принятых граничных условий (асимптотика $z \rightarrow \pm\infty$) поля, которые представляют ближнее поле диполя, и волны свободного пространства, удовлетворяющие уравнению (9), но не удовлетворяющие граничным условиям, мы исключаем.

Для нахождения A_{\pm} воспользуемся известным из векторного анализа тождеством, которое является векторным аналогом формулы Грина:

$$\int_V (\mathbf{F} \text{rot} \text{rot} \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \text{rot} \text{rot} \mathbf{F}) dV = \int_S (\mathbf{Q} \text{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \text{rot} \mathbf{Q}) \mathbf{n} dS, \quad (10)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{Q} – регулярные вектор-функции, для которых существуют подынтегральные выражения и интегралы по объему V и поверхности S , ограничивающей этот объем; \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности S . В качестве функции \mathbf{F} используем выражение \mathbf{E}_m из равенства (8), а в качестве \mathbf{Q} вначале возьмем выражение \mathbf{E}_- , определенное равенством (5), т. е.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}_- = \mathbf{v}_-(x, y) \exp(-ikz). \quad (11)$$

Под V будем понимать объем пространства, заключенный между плоскостями $z = -\Delta z/2$ и $z = \Delta z/2$ (см. рис.1). Опустив громоздкие, но простые и не требующие дополнительных комментариев вычисления интегралов (10), с учетом равенств (5), (7) и (9) получим

$$A_+ = 2\pi i k_0 d_0 \frac{\mathbf{v}_-(x_0, y_0) \boldsymbol{\xi}}{S}, \quad S = \int [\mathbf{v} \times \mathbf{u}]_z dx dy, \quad (12)$$

где \mathbf{e} – единичный вектор вдоль оси z . При вычислении интегралов (10) считаем, что интеграл по удаленной части поверхности S ($|x|, |y| \rightarrow \infty$) стремится к нулю для всех конечных значений Δz . Это и есть требование на достаточно быстрое убывание величины $|\mathbf{v}(x, y)|$ с ростом $|x|$ и $|y|$, о чем уже упоминалось как об одном из граничных условий при нахождении $\mathbf{v}(x, y)$.

Далее, выбрав в качестве $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_+ = \mathbf{v}_+(x, y) \exp(ikz)$ и выполнив аналогичные операции по интегрированию тождества (10), получим

$$A_- = 2\pi i k_0 d_0 \frac{\mathbf{v}_+(x_0, y_0) \boldsymbol{\xi}}{S}. \quad (13)$$

Для определенности систему координат x, y и нормировку функций $v(x, y)$ выберем такими, чтобы максимум значения $\text{Re}([v(0, 0) \times u^*(0, 0)]e)$ приходился на начало координат и был равным 1. С учетом вышесказанного излучаемая диполем полная мощность P_+ в положительном направлении будет такова:

$$P_+ = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left(\int [E_+ \times H_+^*] e \right) dx dy = \frac{c}{8\pi} |A_+|^2 n_{\text{eff}} S_0, \quad (14)$$

где

$$S_0 = \frac{1}{n_{\text{eff}}} \text{Re} \left(\int [v \times u^*] e \right) dx dy.$$

С учетом нормировки $v(x, y)$ под S_0 можно понимать некую эффективную поперечную площадь оптического пучка. В обоих направлениях полная мощность

$$P = \frac{c}{8\pi} (|A_+|^2 + |A_-|^2) n_{\text{eff}} S_0. \quad (15)$$

Теперь мы можем найти суммарную мощность ΔP_m в моде от микроансамбля из ΔN взаимно некогерентно излучающих диполей, расположенных в некоторой окрестности точки с координатами x, y, z . Используя уравнения (12)–(14), получим

$$\Delta P_m = \pi n k_0^2 \frac{S_0 n_{\text{eff}}}{|S|^2} d_0^2 \langle |v(x, y)|^2 \rangle \Delta N, \quad (16)$$

$$\langle |v(x, y)|^2 \rangle = |v_x|^2 \zeta_x + |v_y|^2 \zeta_y + |v_z|^2 \zeta_z. \quad (17)$$

Здесь $\Delta N = N(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$; $\zeta_x = \langle |\xi_x|^2 \rangle$; $\zeta_y = \langle |\xi_y|^2 \rangle$; $\zeta_z = \langle |\xi_z|^2 \rangle$; $N(x, y, z)$ – концентрация диполей (электронов); $\langle |v(x, y)|^2 \rangle$ – квадрат модуля вектор-функции $v(x, y)$, усредненный по микроансамблю с весовым вектором квадратов модулей проекций дипольного момента; угловыми скобками в (16), (17) обозначено усреднение по микроансамблю. Для нахождения $\langle |v(x, y)|^2 \rangle$ необходимо знание величин $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$, определенных равенством (17), из которого следует, что $\zeta_x + \zeta_y + \zeta_z = 1$. Можно видеть, что если модуль дипольного момента не зависит от направления ориентации (изотропная среда, например «объемная активная область»), то очевидно, что $\zeta_x = \zeta_y = \zeta_z = 1/3$. В случае квантоворазмерной активной области для $\zeta_{i=x,y,z}$ вообще говоря, необходимо введение некоторого положительно определенного корректирующего фактора γ , т.е. $\zeta = \gamma(1/3)$. Очевидно, что значение γ ограничено и не может сильно отличаться от единицы.

Заметим, что поскольку усреднение по микроансамблю дает $\langle \xi_z \rangle = 0$, то мощности, излучаемые в положительном и отрицательном направлениях, равны, и это уже учтено в (16). Далее представим $N(x, y, z)$ в факторизованном виде:

$$N(x, y, z) = N(z) f(x, y), \quad f(0, 0) = 1, \quad \int f(x, y) dx dy = S_e, \quad (18)$$

где S_e – эффективная площадь, занятая электронами. Перейдя к пределу $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, запишем мощность $P_m(z)$ спонтанного излучения в моде, выходящую в положительном направлении из слоя толщиной Δz , занятого электронами, как

$$P_m = \frac{\pi \gamma c k_0^2 n_{\text{eff}} S_0}{3|S|^2} d_0^2 N(z) \Delta z S_a. \quad (19)$$

Здесь

$$S_a = \frac{3}{\gamma} \int \langle |v(x, y)|^2 \rangle f(x, y) dx dy$$

– эффективная площадь активной области. Заменяя d_0^2 его значением, определенным равенством (1), окончательно получим:

$$P_m = \frac{h\omega_0}{\tau} N(z) S_e \Delta z \beta, \quad \beta = \frac{\gamma \pi n_{\text{eff}} S_0}{k_0^2 n |S|^2} \frac{S_a}{S_e}. \quad (20)$$

Равенство (20) имеет прозрачный физический смысл. Выражение для P_m состоит из сомножителей: $h\omega/\tau$ – мощность, излучаемая одиночным диполем во все пространство; $N(z) S_e \Delta z$ – число диполей в слое; β – безразмерная величина, которую можно интерпретировать как фактор спонтанного излучения, представляющий собой усредненную долю мощности, попадающую в волновод от каждого диполя, по отношению ко всей излучаемой этим диполем мощности. Зная вектор-функцию $v(x, y)$, величину $f(x, y)$ и используя равенства (12), (14), (18), (19), найдем значения S, S_0, S_a и S_e , входящие в (20). В частности нетрудно найти явный вид S и S_0 :

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k}{k_0} [v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)] + \frac{i}{k_0} \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\} dx dy, \quad (21)$$

$$S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |v_x(x, y)|^2 + |v_y(x, y)|^2 - \text{Re} \left[\frac{i}{k_0} \left(v_x \frac{\partial v_z^*}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z^*}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy. \quad (22)$$

Везде выше полагалось, что колебания диполя строго гармонические. Однако понятно, что если динамика диполя выражается квазимонохроматическими колебаниями, описываемыми случайной функцией времени, то уравнение (7) можно рассматривать как определение фурье-компонент этой случайной функции. Тогда динамику диполя характеризует ее функция корреляции или спектральная плотность $H(\omega)$. Отсюда следует, что вместо $h\omega_0/\tau$ в (20) необходимо использовать соответствующую этой величине спектральную плотность $h\omega_0 H(\omega)/(\Delta\omega_{\text{sp}}\tau)$. В этом случае мощности P_m будет соответствовать ее спектральная плотность

$$P(\omega) = \frac{h\omega_0 H(\omega)}{\tau \Delta\omega_{\text{sp}}} N(z) S_e \Delta z \beta, \quad (23)$$

где $H(\omega)$ – форм-фактор линии спонтанного излучения; $H(\omega_0) = 1$; $\int H(\omega) d\omega = \Delta\omega_{\text{sp}}$; $\Delta\omega_{\text{sp}}$ – спектральная ширина линии. Функция $H(\omega)$ – результат суммирования спектральных плотностей отдельных независимых элементарных излучателей в соответствии с суммой (16) и интегралом (19). Тогда попадающая в спектральный интервал $d\omega$ мощность спонтанного излучения

$$\delta P(\omega) = \frac{h\omega_0 H(\omega)}{\tau \Delta\omega_{sp}} N(z) S_e \Delta z \beta \delta\omega. \quad (24)$$

В ряде случаев возникает необходимость знать мощность $P_{\text{лон}}$ спонтанного излучения, попадающего в одну продольную моду диодного лазера. Тогда в (24) в качестве $\delta\omega$ надо использовать межмодовый интервал $\delta\omega_m = \pi c / (L \tilde{n}_{\text{эфф}})$, где $\tilde{n}_{\text{эфф}}$ – эффективный групповой показатель преломления и L – длина резонатора, а также, например, положить $\Delta z = L$ в случае однородного распределения концентрации электронов по всей длине резонатора ($N(z) = N = \text{const}$). В результате получим

$$P_{\text{лон}} = \frac{h\omega_0}{\tau} N S_e L \beta_{sp}, \quad \beta_{sp} = \beta \frac{\pi c}{\tilde{n}_{\text{эфф}} L} \frac{H(\omega)}{\Delta\omega_{sp}}. \quad (25)$$

Выражение (20) в совокупности с равенствами (12), (14), (18) и (19) позволяет находить β в наиболее общих вариантах, исходя из известных решений волноводной задачи (известная вектор-функция $v(x, y)$ с ее производными), известных электронных свойств активной области (известные значения $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$) и известного пространственного распределения электронной плотности $N(z)f(x, y)$.

4. Сравнение полученного результата с результатом работы Питермана [3]

Найдем упрощенное выражение β для одного частного случая, а именно для плоского диэлектрического волновода. Такой волновод формируется, например, профилем $\varepsilon(x, y)$ с поперечным размером D вдоль оси x , который существенно больше, чем вдоль оси y , и значительно больше длины волны; при этом $\zeta_x = \zeta_y = \zeta_z = 1/3$. Тогда

$$\frac{1}{k_0} \left| v_x \frac{\partial v_z^*}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z^*}{\partial y} \right| \approx \frac{|v_{x,y}(x, y)|^2}{k_0 D} \ll |v_{x,y}(x, y)|^2,$$

и амплитуда волноводной моды определяется одной скалярной функцией $v(x, y)$. Этот случай соответствует физической модели, принятой в работе [3]. Тогда получим

$$S_0 \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v(x, y)|^2 dx dy, \quad S \approx n_{\text{эфф}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x, y) dx dy, \\ S_a \approx \int |v(x, y)|^2 f(x, y) dx dy \quad (26)$$

и найдем фактор спонтанного излучения в продольную лазерную моду

$$\beta_{sp} \approx \frac{\pi^2 c^3 H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v(x, y)|^2 dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v(x, y)|^2 f(x, y) dx dy}{\Delta\omega_{sp} n_{\text{эфф}} \tilde{n}_{\text{эфф}} \omega^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x, y) dx dy \right|^2 L \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy}. \quad (27)$$

Это выражение полностью совпадает с аналогичным выражением Питермана (равенство (19) в работе [3]), если использовать тождественные обозначения:

$$E_0(x, y) = E_0(0, 0)v(x, y), \quad i_{sp} = i_{sp}(0, 0)f(x, y), \quad h(\omega) = \frac{H(\omega)}{\Delta\omega_{sp}}.$$

5. Обсуждение и выводы

Сравнение полученных в настоящей работе результатов с результатами работы [3] свидетельствует, что справедливость формулы (25) основана на доминировании одной векторной компоненты электрического (магнитного) поля над другими векторными компонентами поля. Это вытекает из необходимости выполнения соотношений (26), из чего и следует количественное условие в виде неравенства

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y) dx dy \right| \\ \gg \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) dx dy \right|, \quad (28)$$

эквивалентного в свою очередь неравенству

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y) dx dy \right| \\ \gg \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \left(v_z \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy \right|. \quad (29)$$

Здесь уместно отметить, что существенное отличие K -фактора от единицы в работах [3, 8] связано с уменьшением значения $|S^2|$ при уменьшении ширины области, занятой полем, но в этом случае справедливость скалярного приближения становится не вполне обоснованной. При поперечных размерах оптического пучка, сравнимых с длиной волны, производные функции $v(x, y)$ возрастают настолько, что значения правых и левых частей неравенств (28), (29) становятся соизмеримыми. Во всяком случае, для так называемой быстрой оси, нормальной к плоскости слоев структуры, это практически всегда так. Если к этому добавляется еще и малый размер пучка (сравнимый с длиной волны) вдоль другой оси, то трудно надеяться на удовлетворительное выполнение неравенств (28), (29). Кроме того, из (22) можно видеть, что одновременно с ухудшением точности скалярного приближения при расчете S ухудшается и точность расчета S_0 . Эти замечания в полной мере можно отнести также к работе [8], поэтому различие в результатах указанных выше работ вполне может находиться в пределах точности из-за принятых в них приближений.

В силу сказанного выше, для адекватного расчета фактора спонтанного излучения необходимо знать все компоненты вектор-функции $v(x, y)$ и ее производных, фигурирующих в равенствах (21), (22). Тем не менее существует вариант волновода, для которого выражения для S и S_0 упрощаются. Это волновод, формируемый, в основном, за счет показателя преломления, т. е. в случае, когда $\varepsilon(x, y)$ – исключительно действительная функция. Нетрудно показать, что в этом случае k тоже действительная величина, а $v(x, y)$ можно выбрать таким образом, чтобы $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ были действительными величинами, а $v_z(x, y) = \pm i|v_z(x, y)|$ – мнимой величиной. Знак для $v_z(x, y)$ выбирается согласованно со знаками для $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$. При таких значениях $v(x, y)$ величина $S = n_{\text{эфф}} S_0$, и тогда фактор спонтанного излучения

$$\beta = \frac{\gamma \pi}{k_0^2 n_{\text{эфф}} S_0 S_e} \approx \frac{\gamma \pi}{k_0^2 S_0 n_{\text{эфф}}}. \quad (30)$$

Приближенное значение β в правой части (30) получается в результате того, что для подавляющего большинства лазерных диодов $S_e \approx S_a$, поскольку активная область, как правило, находится внутри оптического пучка. Выражения, аналогичные формуле (30), использовались в многочисленных работах ранее, начиная с работы [2]. Такая же формула фигурирует в работе [18], с той лишь разницей, что там она использована для однонаправленного излучения (поэтому появился множитель $1/2$) и с множителем Γ -фактора оптического ограничения, который ошибочно присутствует в формуле (9) этой работы. Из вида (30) можно сделать вывод о том, что фактор спонтанного излучения практически не зависит от толщины активного слоя лазерного диода. Тем не менее отметим, что при внешней схожести формулы (30) с выражениями для β , использованными ранее, следует иметь в виду, что входящая в (30) величина S_0 хотя и имеет физический смысл площади сечения оптического пучка, но ее количественное выражение не тождественно использованному ранее. Особенно значительное расхождение ожидается для малых (соизмеримых с длиной волны) сечений оптических пучков, и это результат учета векторного характера поля оптической волны. Поэтому даже для волновода, образованного за счет профиля показателя преломления, результат векторного анализа отличен от результата, полученного в скалярном приближении.

В заключение отметим, что хотя в явном виде условие ортогональности для мод волновода нами не использовано, тем не менее в неявном виде оно использовано при интегрировании уравнения (8) в комбинации со свойством единственности решения (см. [20]).

Таким образом, в настоящей работе в рамках полного векторного анализа найдено выражение для фактора спонтанного излучения в моду волновода в виде равенства (20). Это выражение справедливо для диэлектрических волноводов вне зависимости от их параметров. Для частного случая волновода с профилем показателя преломления найдено упрощенное выражение β (30), содержащее, по существу, только одну величину S_0 , зависящую

от поперечного распределения амплитуды поля. Показано, каким образом из полученного выражения следуют приближенные формулы, использованные ранее, и каковы условия справедливости приближений.

Автор выражает искреннюю благодарность А.Е.Дракину и Н.В.Дьячкову за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

Настоящая работа выполнена в рамках темы НИР Госзадания № 0023-2016-0002.

1. Vilms J., Wadinger L., Klohn K.L. *IEEE J. Quantum Electron.*, **2**, 80 (1966).
2. Suematsu Y., Furnya K. *Trans. IECE Jpn*, **E60**, 467 (1977).
3. Petermann K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **15** (7), 566 (1979).
4. Patzak E. *Electron. Lett.*, **18**, 278 (1982).
5. Goodwin J.C., Carside B.K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **18** (8), 1264 (1982).
6. Marcuse D. *IEEE J. Quantum Electron.*, **19** (8), 1228 (1983).
7. Haus H.A., Kawakami S. *IEEE J. Quantum Electron.*, **21** (1), 63 (1985).
8. Agrawal G.A. *J. Opt. Soc. Am. Commun.*, **1** (3), 406 (1984).
9. Newstein M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **20** (11), 1270 (1984).
10. Arnaud J., Fesquet J., Costen F., Sansonetti P. *IEEE J. Quantum Electron.*, **21** (6), 603 (1983).
11. Arnaud J. *Comments and Corrections. IEEE J. Quantum Electron.*, **21** (6), 737 (1985).
12. Newstein M. *Comments and Corrections. IEEE J. Quantum Electron.*, **21** (6), 737 (1985).
13. No K.H., Blackwell R.J., Herrik R.W., Levy J.L. *IEEE Photon Technol. Lett.*, **5** (9), 990 (1993).
14. Kwok C.H., Penty R.V., White L.H., Hasler K.-H., Sumpf B., Erbert G. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, **21** (5), 301 (2009).
15. Богатов А.П., Дьячков Н.В., Дракин А.Е., Гущик Т.И. *Квантовая электроника*, **43** (8), 699 (2013).
16. Дьячков Н.В., Богатов А.П., Гущик Г.И., Дракин А.Е. *Квантовая электроника*, **44** (11), 997 (2014).
17. Дьячков Н.В., Богатов А.П., Гущик Г.И., Дракин А.Е. *Квантовая электроника*, **44** (11), 1005 (2014).
18. Богатов А.П., Дракин А.Е., Дьячков Н.В., Гущик Т.И. *Квантовая электроника*, **46** (8), 692 (2016).
19. Богатов А.П., Дракин А.Е., Дьячков Н.В., Гущик Т.И. *Квантовая электроника*, **46** (8), 699 (2016).
20. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988, с. 297).