

ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ПАМЯТЬ

Выявление общих фрагментов в последовательности образов наложенными объемными голограммами Фурье

А.В.Павлов

Рассмотрена задача выявления общих фрагментов в последовательности образов, записанных в объемной регистрирующей среде методом наложенных голограмм Фурье по схеме с совместным преобразованием. Применительно к описанию образов как реализаций однородного случайного поля дан уточненный анализ зависимости эффективности выявления от числа наложенных голограмм через оценку информационной емкости образов и их общих и различающихся фрагментов в запоминаемых последовательностях. Теоретические выводы подтверждены результатами численных экспериментов.

Ключевые слова: наложенные голограммы, мультиплексная голограмма, объемная регистрирующая среда, голографическая память, голография Фурье, обработка информации, корреляция, последовательность образов, выявление общих фрагментов.

1. Введение

Системы голографической памяти используют, как правило, технологию наложенных голограмм (НГ), т.е. голограмм, записанных на одном участке голографической регистрирующей среды (ГРС) [1–7]. Для этого рабочий (обычно – квазилинейный) участок динамического диапазона экспозиционной характеристики ГРС делится на субдиапазоны, в каждом из которых регистрируется одна голограмма. Совокупность голограмм, записанных на данном участке ГРС, формирует мультиплексную голограмму.

Метод НГ используется преимущественно для повышения емкости [1–4] и быстродействия [5–7] памяти. Основной подход связан с применением объемных ГРС. Это позволяет существенно повысить плотность хранения информации за счет угловой селективности объемных голограмм, но влечет за собой утрату инвариантности к сдвигу.

Кроме собственно памяти, метод НГ актуален и в плане реализации на основе памяти моделей обработки информации, представленной временными или пространственными последовательностями [8–12], включая поиск закономерностей и выявление причинно-следственных связей в цепочках событий [13]. В этом контексте в качестве ключевого этапа решения целого ряда таких задач представляет практический интерес выявление общих, т.е. полностью коррелированных, фрагментов в последовательности образов, что актуально, например, при анализе потоковых видеоданных в реальном времени [14].

Один из возможных подходов к решению этой задачи методом НГ Фурье был предложен и предварительно смоделирован в [15]. В работе [16] в развитие подхода [15] дан анализ зависимости оценки эффективности выявления коррелированных фрагментов от оценок информационной емкости фрагментов образов и условий записи го-

лограмм при описании образов как реализаций однородных случайных полей. Однако в [16] анализ был проведен только для простейшего случая – полной ортогональности различающихся фрагментов опорных образов в предположении несохранения свойства инвариантности преобразования Фурье к сдвигу. Теоретические выводы были проиллюстрированы результатами численных экспериментов на примерах обработки реализаций стационарных случайных процессов.

Вместе с тем реальные изображения характеризуются не ортогональностью, а частичной коррелированностью. Для исключения перекрестных помех при работе с частично коррелированными опорными и сигнальными образами могут использоваться дополнительные методы, например фазовое кодирование ортогональными масками [17]. В то же время методы ортогонализации обрабатываемых образов не могут быть применены в рассматриваемой задаче выявления общих фрагментов, т.к. ортогонализация разрушает коррелированность не только фона, но и искомым общим фрагментам. Поэтому представляет практический интерес анализ зависимости эффективности выявления общих фрагментов образов от числа НГ и характеристик ГРС для более общего, чем в [16], реального варианта частичной коррелированности различающихся фрагментов образов.

В настоящей статье в развитие работ [15, 16] рассмотрена схема голографии Фурье с записью объемных НГ по схеме совместного преобразования. Дан уточненный анализ зависимости эффективности выявления общих (коррелированных) фрагментов от числа НГ и информационных характеристик образов, определяемых, в том числе, свойствами объемных ГРС и условиями записи голограмм. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

В статье используются термины и обозначения, ранее принятые в работе [16]. Термин «образ» является синонимом понятий «изображение» и «поле комплексных амплитуд». Термин «последовательность» означает частичную коррелированность образующих ее образов, как минимум – соседних. Формулировка задачи в терминах коррели-

лированности важна для соотнесения рассматриваемого метода с более общей задачей индуктивного обобщения [18], поскольку предполагает отсутствие иных, кроме частоты появления, априорных критериев отнесения фрагментов образов к общим для всей последовательности (либо для ее части) или различающимся (индивидуальным). Такая постановка усложняет задачу, т.к. исключает из рассмотрения методы индукции, основанные на различии иных характеристик фрагментов.

2. Оптическая схема и модель

Ниже дадим описание оптической схемы и кратко напомним используемые в настоящей статье основные результаты [16], уточняя и дополняя их при необходимости. Рассматривается 4f-схема голографии Фурье с записью НГ методом совместного преобразования, приведенная на рис.1. Для упрощения выражений рассмотрение, где это возможно без ущерба для смысла, проведем при описании образов и, соответственно, голограмм как функций только одной переменной.

В схеме на рис.1 записывается мультиплексная голограмма Фурье

$$H(v_x) = \sum_{k=1}^n H_k(v_x), \tag{1}$$

образованная (в предположении записи в пределах линейного участка динамического диапазона экспозиционной характеристики ГРС) наложением n НГ пар образов $S_k(x) \leftrightarrow R_k(x)$, где

$$H_k(v_x) = F(S_k(x))F^*(R_k(x)) \exp[-j\omega(x_k^{(R)} + x_k^{(S)})]; \tag{2}$$

F – символ преобразования Фурье; v_x – пространственная частота; $\omega_x = 2\pi v_x$ – круговая пространственная частота; $x_k^{(R)}$ и $x_k^{(S)}$ – координаты, описывающие пространственное положение соответствующих образов относительно главной оптической оси во входной плоскости; j – мнимая единица. Будем считать, что $S_k(x)$ – сигнальный образ, а $R_k(x)$ – опорный, их последовательности обозначим

$\{S_k\}_{k=1}^n$ и $\{R_k\}_{k=1}^n$ соответственно. Представим образы в виде сумм их фрагментов: общих, т.е. коррелированных (с верхним индексом «с»), и различающихся, играющих роль фона (с верхним индексом «u»):

$$\begin{aligned} S_k(x) &= S_k^c(x) + S_k^u(x), & R_k(x) &= R_k^c(x) + R_k^u(x), \\ S_k^c(x) &= m^{(S)} S_k(x), & S_k^u(x) &= (1 - m^{(S)}) S_k(x), \\ R_k^c(x) &= m^{(R)} R_k(x), & R_k^u(x) &= (1 - m^{(R)}) R_k(x), \end{aligned} \tag{3}$$

где $m^{(S)}, m^{(R)}$ – удельные веса коррелированных фрагментов в соответствующих образах. Условие (3) допускает как пространственное наложение фрагментов, так и их расположение рядом, включая отбегание одним фрагментом другого. Примем последний вариант как адекватный ряду актуальных практических применений, например задаче анализа потоковых видеоданных [14].

Если различающиеся фрагменты образов ортогональны, то $m^{(S)} = \sqrt{\rho_{kl}^{(S)}}$ и $m^{(R)} = \sqrt{\rho_{kl}^{(R)}}$, где $\rho_{kl}^{(S)}, \rho_{kl}^{(R)}$ – коэффициенты корреляции соответствующих образов в последовательностях $\{S_k\}_{k=1}^n$ и $\{R_k\}_{k=1}^n$. Тогда (3) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} S_k^c(x) &= \sqrt{\rho_{kl}^{(S)}} S_k(x), & S_k^u(x) &= (1 - \sqrt{\rho_{kl}^{(S)}}) S_k(x), \\ R_k^c(x) &= \sqrt{\rho_{kl}^{(R)}} R_k(x), & R_k^u(x) &= (1 - \sqrt{\rho_{kl}^{(R)}}) R_k(x). \end{aligned}$$

Если различающиеся фрагменты образов не ортогональны, то при представлении их как реализаций одного случайного поля коэффициент ρ взаимной корреляции двух реализаций (в предположении правомочности гипотезы эргодичности – непересекающихся фрагментов) поля и удельные веса m связаны следующими соотношениями:

$$\rho_{kl} = m^2(1 - \rho) + \rho, \quad m = \sqrt{\frac{\rho_{kl} - \rho}{1 - \rho}}, \tag{4}$$

где верхние индексы у величин ρ, m и ρ_{kl} опущены.

В [16] показано, что для решения задачи должно быть выполнено условие постоянства расстояния между сигнальными и опорными образами при записи всех НГ:

$$\forall_{k,l} \in [0, n]: x_k^{(R)} - x_l^{(R)} = x_k^{(S)} - x_l^{(S)}.$$

Применительно к объемным голограммам это условие редуцируется к условию постоянства положения во входной плоскости для всех образов обрабатываемых последовательностей $\{S_k\}_{k=1}^n$ и $\{R_k\}_{k=1}^n$. Тогда при предъявлении записанной мультиплексной голограмме (1) во входной плоскости k -го образа $R_k(x)$ в задней фокальной плоскости второй фурье-преобразующей линзы Л2, учитывая при выборе знаков инверсию координат, обусловленную нереализуемостью посредством линз обратного преобразования Фурье, получаем поле комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} E_{out}(x) &= F(F(R_k(x))H(v_x)) \\ &= S_k(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\ &+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_l(x)] = \end{aligned}$$

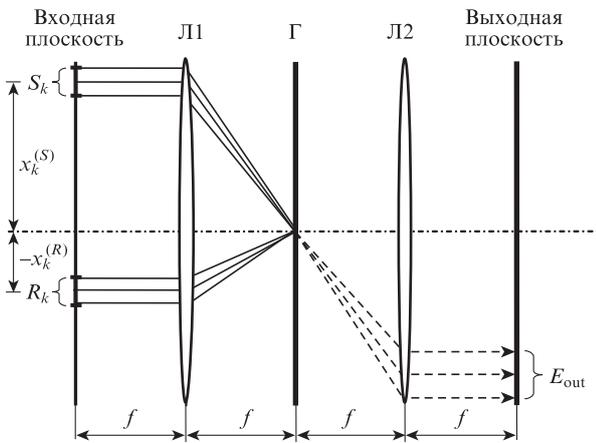


Рис.1. 4f-схема голографии Фурье: R_k, S_k – пара записываемых на одной голограмме Г образов; $x_k^{(R)}, x_k^{(S)}$ – их координаты относительно главной оптической оси; Л1, Л2 – первая и вторая фурье-преобразующие линзы с фокусными расстояниями f ; штриховые линии – ход лучей, восстанавливающих в выходной плоскости поле E_{out} при предъявлении во входной плоскости образа R_k .

$$\begin{aligned}
&= S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
&+ S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
&+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [(R_k^c(x) + R_k^u(x)) \otimes (R_l^c(x) + R_l^u(x))] \\
&= S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
&+ S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
&+ (m^{(R)})^2 (n-1) \{ S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \} \\
&+ (m^{(R)})^2 \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
&+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^u(x)] \\
&+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [R_k^c(x) \otimes R_l^u(x)] \\
&+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^c(x)] \\
&= [1 + (m^{(R)})^2 (n-1)] \{ S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \} \\
&+ S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
&+ (m^{(R)})^2 \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
&+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^u(x)] \\
&+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [R_k^c(x) \otimes R_l^u(x)] \\
&+ \sum_{k \neq l} S_l(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^c(x)], \quad (5)
\end{aligned}$$

где * и \otimes – символы операций свертки и корреляции соответственно; члены в квадратных скобках в итоговом выражении, описывающие авто- и кросс-корреляционные функции опорных образов и фрагментов, имеют смысл импульсных откликов, описывающих дифракционное размытие точки для соответствующих членов. Отметим, что в выражении (5), по сравнению с формулой (12) из статьи [16], полностью учтены также все кросс-корреляционные члены, частично опущенные в [16].

Прежде чем перейти к дальнейшему анализу, напомним, что первое слагаемое в итоговом выражении в (5) описывает требуемое для решения задачи поле $E_{\text{out}}^c(x)$ – восстановленный мультиплексной голограммой (1) общий (полностью коррелированный) фрагмент сигнальных образов $\{S_k\}_{k=1}^n$. Второе слагаемое в (5) играет роль постоянной помехи, не зависящей от числа НГ. В [16] показано, что при полной коррелированности опорных образов третье слагаемое, зависящее от числа НГ, влияние этой постоянной помехи уменьшает, позволяя, тем самым, выявить коррелированный фрагмент.

Механизм этого выявления основан на свойстве дисперсии суммы случайных процессов (полей) [19, 20], а сама дисперсия используется здесь как интегральная оценка модулированности (контрастности) образов. Интересующая нас оценка эффективности выявления коррелированного фрагмента $E_{\text{out}}^c(x)$ на фоне играющего роль фона или помехи поля, которое обозначим $E_{\text{out}}^u(x)$, может быть дана через отношение их дисперсий D_{out}^c и D_{out}^u : рост это-

го отношения с ростом n означает уменьшение модулированности поля $E_{\text{out}}^u(x)$, по сравнению с модулированностью поля $E_{\text{out}}^c(x)$, т.е. «проявление» хорошо модулированного $E_{\text{out}}^c(x)$ на становящемся с ростом n все более однородном (сером) фоне $E_{\text{out}}^u(x)$. В [16] в качестве первого приближения были учтены только первые три слагаемых в (5). Ниже проведем анализ, учитывая все слагаемые и произвольные значения коэффициента взаимной корреляции различающихся фрагментов опорных образов. Для этого необходимо учесть как свойства голограммы (1) с точки зрения сохранения или несохранения инвариантности преобразования Фурье к сдвигу, так и информационные характеристики образов.

3. Оценка эффективности выделения коррелированных фрагментов

3.1. Влияние свойства объемности голограммы

Каждое слагаемое, входящее в описание восстановленного поля (5), представляет собой свертку с членами в квадратных скобках, имеющими смысл импульсных откликов: автокорреляционными функциями (АКФ) опорных образов $[R_k(x) \otimes R_k(x)]$ (для первых трех слагаемых) и их различающихся фрагментов $[R_k^u(x) \otimes R_l^u(x)]$ (для четвертого слагаемого) или взаимно корреляционных функций (ВКФ) $[R_k^c(x) \otimes R_l^u(x)]$ их фрагментов (для пятого и шестого слагаемых). На вклад интересующих нас компонент $E_{\text{out}}^c(x)$ и $E_{\text{out}}^u(x)$ поля (5) непосредственно влияет вид членов в квадратных скобках, входящих в четвертое, пятое и шестое слагаемые в (5), а именно возможность их представления унимодальными (имеющими один максимум) или только мультимодальными (имеющими несколько сравнимых по амплитуде максимумов) функциями. Правомочность или, наоборот, неправомочность такого представления, в свою очередь, определяется сохранением или несохранением инвариантности преобразования Фурье к сдвигу в схеме на рис.1 вследствие использования объемных или тонких ГРС соответственно:

– если сдвиговая инвариантность не сохраняется (объемная голограмма), то члены в квадратных скобках суть унимодальные функции и учету подлежит только значение, соответствующее началу координат в пространстве корреляций;

– если сдвиговая инвариантность сохраняется (тонкие голограммы), то члены в квадратных скобках как ВКФ суть функции мультимодальные и учету подлежат все корреляционные максимумы – как глобальный, соответствующий началу координат в пространстве корреляций, так и боковые.

Поскольку максимальная плотность хранения в голографической памяти достигается использованием объемных ГРС [5–7], то в статье рассматривается именно этот вариант.

3.2. Оценка эффективности выявления для объемной голограммы

Если ГРС объемная, то в силу несохранения инвариантности преобразования Фурье к сдвигу входящие в выражение (5) члены в квадратных скобках – как авто-, так и кросс-корреляционные, могут быть аппроксимированы унимодальными, т.е. имеющими только один максимум, функциями. При этом для ВКФ существен только макси-

мум, координата которого в пространстве корреляций совпадает с координатой глобального максимума АКФ, т. е. максимум, соответствующий нулевому сдвигу. Тогда, разложив входящие в четвертое–шестое слагаемые в (5) сигнальные образы на сумму общих (полностью коррелированных) и различающихся фрагментов согласно (3), представим восстановленное поле (5) как сумму двух полей: поля общих фрагментов

$$\begin{aligned}
 E_{\text{out}}^c(x) &= [1 + (m^{(R)})^2(n - 1)] \\
 &\times \{S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)]\} \\
 &+ \sum_{k \neq l} S_l^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \oplus R_l^u(x)] \\
 &+ \sum_{k \neq l} S_l^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k^c(x) \oplus R_l^u(x)] \\
 &+ \sum_{k \neq l} S_l^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \oplus R_l^c(x)] \\
 &= [1 + (m^{(R)})^2(n - 1)] \{S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)]\} \\
 &+ (n - 1)S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^u(x)] \\
 &+ (n - 1)S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k^c(x) \otimes R_l^u(x)] \\
 &+ (n - 1)S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^c(x)] \quad (6)
 \end{aligned}$$

и поля различающихся (частично коррелированных) фрагментов

$$\begin{aligned}
 E_{\text{out}}^u(x) &= S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
 &+ (m^{(R)})^2 \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
 &+ \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^u(x)] \\
 &+ \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k^c(x) \otimes R_l^u(x)] \\
 &+ \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k^u(x) \otimes R_l^c(x)]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим поле общих фрагментов $E_{\text{out}}^c(x)$ (6). Амплитуда глобального максимума АКФ опорных образов $[R_k(x) \otimes R_k(x)]$ может быть оценена [19, 21] как

$$\mu^{\text{ACF}} = \max[R_k(x) \otimes R_k(x)] = D_{\text{kout}}^{(R)} L_x^{(R)} L_y^{(R)}, \quad (8)$$

где $D_{\text{kout}}^{(R)}$ – дисперсия опорного образа, восстановленного с учетом обусловленной нелинейностью экспозиционных характеристик ГРС фильтрации на голограмме; $L_x^{(R)}$, $L_y^{(R)}$ – его размеры в предположении прямоугольной формы апертуры кадрового окна.

Применительно к ВКФ различающихся фрагментов опорных образов $[R_k^u(x) \otimes R_l^u(x)]$ нас, вследствие несохранения сдвиговой инвариантности объемными голограммами, интересует амплитуда только одного максимума, среднее значение которой согласно [21] может быть оценено по формуле

$$\begin{aligned}
 \mu^{\text{CCF}} &= \langle [R_k^u(x) \otimes R_l^u(x)] \rangle \approx D_{\text{kout}}^{(R)} r_{\text{kout}} \sqrt{L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} 2\pi\kappa} \\
 &= D_{\text{kout}}^{(R)} \sqrt{L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} 2\pi r_{\text{kout}}^2 \kappa} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= D_{\text{kout}}^{(R)} L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} \sqrt{2 \frac{\pi r_{\text{kout}}^2}{L_x^{(R)u} L_y^{(R)u}} \kappa} \\
 &= D_{\text{kout}}^{(R)} L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(R)u}}},
 \end{aligned}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю; r_{kout} – радиус корреляции восстановленного поля; κ – коэффициент, зависящий от вида корреляционной функции; $\Omega^{(R)u} = L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} / (\pi r_{\text{kout}}^2)$ – корреляционная оценка информационной емкости различающихся фрагментов. Для экспоненциальной функции корреляции при не очень низких оценках информационной емкости можно принять $\kappa \approx 0.25$ [21]. Поскольку согласно (3) $L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} = (1 - m^{(R)}) L_x^{(R)u} L_y^{(R)u}$, то $\Omega^{(R)u} = (1 - m^{(R)}) \Omega^{(R)}$ ($\Omega^{(R)}$ – оценка информационной емкости) и окончательное выражение для средней амплитуды члена под знаком суммы в третьем слагаемом в (6) можно представить в удобном для дальнейшего сравнения виде:

$$\begin{aligned}
 \mu^{\text{CCF}} &\approx D_{\text{kout}}^{(R)} L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(R)u}}} \\
 &= D_{\text{kout}}^{(R)} L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} \sqrt{(1 - m^{(R)}) \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} \\
 &= \mu^{\text{ACF}} \sqrt{(1 - m^{(R)}) \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Оценка вклада третьего и четвертого слагаемых в (6) зависит от взаимного расположения общих и различающихся фрагментов в опорных образах. Если эти фрагменты налагаются друг на друга, то должен быть учтен корреляционный максимум, амплитуда которого определяется размером минимального из фрагментов опорных образов $R_l^c(x)$ и $R_k^u(x)$. Для этого введем отношение их размеров t с учетом (3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 t &= m^{(R)}, \text{ если } m^{(R)} \leq 0.5, \\
 t &= 1 - m^{(R)}, \text{ если } m^{(R)} \geq 0.5. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Тогда по аналогии с выводом выражения (9) и с учетом (10) имеем

$$\begin{aligned}
 \mu^{\text{CCF}} &= \langle [R_k^c(x) \otimes R_l^u(x)] \rangle \\
 &\approx D_{\text{kout}}^{(R)} L_x^{(R)u} L_y^{(R)u} \sqrt{t \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} = \mu^{\text{ACF}} \sqrt{t \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (11) получим выражение для оценки сверху восстановленного поля общего фрагмента:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{out}}^c(x) &= [1 + (m^{(R)})^2(n - 1)] \\
 &\times \{S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)]\} \\
 &+ (n - 1) \sqrt{(1 - m^{(R)}) \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} \\
 &\times S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\
 &+ (n - 1) 2 \sqrt{t \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] =
 \end{aligned}$$

$$= [1 + (n-1)K(m^{(R)})] \times \{S_k^c(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)]\}, \quad (12)$$

где

$$K(m^{(R)}) = \left[(m^{(R)})^2 + \sqrt{(1-m^{(R)}) \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} + 2\sqrt{t \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} \right]$$

– член, зависящий от информационных характеристик последовательности опорных образов, в том числе от удельного веса общего фрагмента $m^{(R)}$ в опорном образе.

Если общие и различающиеся фрагменты опорных образов друг на друга не налагаются, то должен быть учтен максимум ВКФ, находящийся на участке ее спада. В этом случае для получения оценки снизу соответствующим членом (11) в выражении (12) следует просто пренебречь.

Дисперсия восстановленного поля общего фрагмента (12)

$$D_{\Sigma}^c = [1 + (n-1)K(m^{(R)})]^2 D_{kout}^{(S)c}, \quad (13)$$

где $D_{kout}^{(S)c}$ – дисперсия восстановленного одной НГ общего фрагмента. С учетом (4) нетрудно видеть, что при полной коррелированности опорных образов ($\rho_{kl}^{(R)} = 1$) она совпадает с приближенной оценкой, данной ранее в [16].

Рассмотрим поле различающихся фрагментов $E_{out}^u(x)$ (7). Поскольку порядок суммирования для всех слагаемых в (7), кроме первого, одинаков, то достаточно оценить удельные веса членов под знаками суммы. Удельный вес второго–пятого слагаемых в (7) определяется соответствующими членами в квадратных скобках, поэтому здесь применим проведенный выше анализ выражений (8)–(11). Используя его результаты, представим (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_{out}^u(x) &= S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\ &+ (m^{(R)})^2 \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\ &+ \sqrt{(1-m^{(R)}) \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} \\ &\times \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\ &+ 2\sqrt{t \frac{2\kappa}{\Omega^{(R)}}} \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\ &= S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \\ &+ K(m^{(R)}) \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)]. \quad (14) \end{aligned}$$

Отсюда дисперсия поля-помехи $E_{out}^u(x)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} D_{\Sigma}^u &= D \left(S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] + K(m^{(R)}) \right. \\ &\times \left. \sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \right) = D_{kout}^{(S)u} + K^2(m^{(R)}) \\ &\times D \left(\sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \right) + 2D_{12}, \quad (15) \end{aligned}$$

где $D(\dots)$ – дисперсия; $D_{kout}^{(S)u}$ – дисперсия первого слагаемого; D_{12} – ковариация слагаемых в верхней строке (15).

Второе слагаемое в итоговом выражении в (15) без учета множителя $K^2(m^{(R)})$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &D \left(\sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \right) \\ &= \{ (1-n) D(S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)]) \\ &+ (n-1)(n-2) D_{kout}^{(S)u} \} = (n-1) D_{kout}^{(S)u} \left[1 + (n-2) \frac{D_{kout}^{(S)u}}{D_{kout}^{(S)u}} \right] \\ &= (n-1) D_{kout}^{(S)u} \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right], \quad (16) \end{aligned}$$

где $D_{kout}^{(S)u}$ – ковариация восстановленных различающихся фрагментов сигнальных образов; $\Omega^{(S)u}$ – корреляционная оценка информационной емкости фрагментов.

Ковариацию D_{12} , используя определение коэффициента корреляции $\rho_{xy} = D_{xy}/(\sigma_x \sigma_y)$, где σ_x, σ_y – среднеквадратичные отклонения [19], представим в виде

$$\begin{aligned} D_{12} &= \rho_{kout}^{(S)u} K(m^{(R)}) \\ &\times \left\{ D(S_k^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)]) \right. \\ &\times \left. D \left(\sum_{k \neq l} S_l^u(x + x_k^{(S)}) * [R_k(x) \otimes R_k(x)] \right) \right\}^{1/2} \\ &= D_{kout}^{(S)u} \rho_{kout}^{(S)u} K(m^{(R)}) \sqrt{(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right]}, \quad (17) \end{aligned}$$

где $\rho_{kout}^{(S)u}$ – коэффициент корреляции различающихся фрагментов с учетом фильтрации на голограмме. Тогда, поскольку согласно [21] $\rho_{kout}^{(S)u} = (2\kappa/\Omega^{(S)u})^{1/2}$, дисперсия поля-помехи

$$\begin{aligned} D_{\Sigma}^u &= D_{kout}^{(S)u} \left\{ 1 + K^2(m^{(R)})(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right] \right. \\ &\left. + 2K(m^{(R)}) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \sqrt{(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right]} \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку эффективности выявления общих фрагментов на фоне различающихся фрагментов через отношение их дисперсий

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{D_{\Sigma}^c}{D_{\Sigma}^u} = \frac{D_{kout}^{(S)c}}{D_{kout}^{(S)u}} [1 + (n-1)K(m^{(R)})]^2 \\ &\times \left\{ 1 + K^2(m^{(R)})(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right] \right. \\ &\left. + 2K(m^{(R)}) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \sqrt{(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right]} \right\}^{-1}. \quad (19) \end{aligned}$$

3.3. Анализ и обсуждение

Поскольку мы приняли, что все образы являются реализациями одного однородного случайного поля, то $D_{kout}^{(S)c} = D_{kout}^{(S)u}$. Для дальнейшего рассмотрения удобно представить (19) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 V(n) &= \frac{D_{\Sigma}^c}{D_{\Sigma}^u} \propto [1 + (n-1)K(m^{(R)})]^2 \\
 &\times \left\{ \left[1 + K(m^{(R)}) \sqrt{(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}}} \right]} \right]^2 \right. \\
 &- 2K(m^{(R)}) \left(1 - \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right) \\
 &\left. \times \sqrt{(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}}} \right]} \right\}^{-1}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Из анализа (20) можно сделать ряд выводов:

1. С ростом числа НГ n оценка выходит в насыщение, уровень которого определяется информационными характеристиками только сигнальных образов: корреляционной оценкой информационной емкости их фрагментов $\Omega^{(S)u}$ и параметром κ , зависящим от вида АКФ поля [21]. Опуская громоздкие выкладки, для практических целей можно использовать приближенную оценку уровня насыщения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) \approx \sqrt{\frac{\Omega^{(S)u}}{2\kappa}} \approx (\rho_{kl/out}^{(S)u})^{-1}. \quad (21)$$

Зависимость уровня насыщения (21) только от информационной оценки различающихся фрагментов сигнальных образов $\Omega^{(S)u}$ отражает механизм выявления общих фрагментов сглаживанием фона: с ростом числа НГ n изменяются только нормированные оценки дисперсии различающихся фрагментов, нормированная дисперсия общих фрагментов от n не зависит.

С практической точки зрения этот эффект, определенный в контексте задачи индуктивного обобщения как феномен когнитивного насыщения [22], означает существование некоторого эффективного числа НГ $n_{\text{эф}}$, определяемого достижением заданного порога первой производной (19) по n , выше которого дальнейшего заметного роста оценки эффективности выявления коррелированных фрагментов с ростом числа НГ не происходит.

В свою очередь, оценка информационной емкости различающихся фрагментов сигнальных образов $\Omega^{(S)u}$ зависит от свойств ГРС и условий записи голограмм: ограниченность динамического диапазона ГРС имеет следствием сужение полосы частот, что в соответствии с теоремой Винера–Хинчина ведет к изменению радиуса корреляции, входящего в выражение для $\Omega^{(S)u}$. Детальный анализ этой связи выходит за рамки статьи, т. к. заслуживает отдельного рассмотрения.

2. Характеристики опорных образов – коэффициент их корреляции $\rho_{kl}^{(R)}$ и оценка информационной емкости $\Omega^{(R)}$, входящие в выражение для члена $K(m^{(R)})$, играют заметную роль преимущественно в области малых n при больших значениях $\Omega^{(R)}$, влияя на скорость достижения насыщения (21), но не на его величину.

3. Если различающиеся фрагменты сигнальных образов ортогональны, то по определению $D_{kl/out}^{(S)u} = 0$ и, с учетом (16) и (17), $(2\kappa/\Omega^{(S)u})^{1/2} \equiv 0$, откуда (19) принимает вид

$$V(n) = \frac{D_{\Sigma}^c}{D_{\Sigma}^u} = \frac{D_{k/out}^{(S)c} [1 + (n-1)K(m^{(R)})]^2}{D_{k/out}^{(S)u} [1 + (n-1)K^2(m^{(R)})]}. \quad (22)$$

В первом приближении для не малых n выражение (22) может быть аппроксимировано линейной зависимостью.

Если опорные образы полностью коррелированы, то $K(m^{(R)}) = 1$ и мы имеем линейную зависимость:

$$V(n) = \frac{D_{\Sigma}^c}{D_{\Sigma}^u} = n \frac{D_{k/out}^{(S)c}}{D_{k/out}^{(S)u}}, \quad (23)$$

что совпадает с результатами, представленными в работах [15, 16].

4. Выражения (19) и (20) достаточно громоздки, поэтому представляет интерес нахождение более простого аппроксимационного выражения, пригодного для практических целей. С этой точки зрения аппроксимационная формула должна давать приемлемые оценки уровня насыщения, т. е. эффективного числа НГ $n_{\text{эф}}$. Тогда для не малых оценок информационной емкости различающихся фрагментов опорных образов $\Omega^{(R)u}$ можно принять, что $K(m^{(R)}) \approx (m^{(R)})^2$, откуда получаем

$$\begin{aligned}
 V(n) &= \frac{D_{\Sigma}^c}{D_{\Sigma}^u} \approx \frac{D_{k/out}^{(S)c}}{D_{k/out}^{(S)u}} [1 + (n-1)(m^{(R)})^2]^2 \\
 &\times \left\{ 1 + (m^{(R)})^4 (n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right] \right. \\
 &\left. + 2(m^{(R)})^2 \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \sqrt{(n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right]} \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Поскольку практический интерес представляет вариант, когда общий фрагмент не доминирует в сигнальном образе, т. е. имеет силу условие $(2\kappa/\Omega^{(S)u})^{1/2} \ll 1$, то можно пренебречь третьим слагаемым в знаменателе этой формулы и получить аппроксимационное выражение

$$V(n) \approx \frac{D_{k/out}^{(S)c}}{D_{k/out}^{(S)u}} \frac{[1 + (n-1)(m^{(R)})^2]^2}{\left\{ 1 + (m^{(R)})^4 (n-1) \left[1 + (n-2) \sqrt{\frac{2\kappa}{\Omega^{(S)u}}} \right] \right\}}. \quad (24)$$

Формула (24) дает, по сравнению с (19), заметную погрешность в диапазоне $n < n_{\text{эф}}$, но при $n \geq n_{\text{эф}}$ оценки (19) и (24) становятся сравнимыми.

4. Численное моделирование

Для наглядного подтверждения теоретических выводов моделировался классический вариант индуктивного обобщения на примере обращения силлогизма «Darii»:

Сократ человек, Сократ смертен;
 Платон человек, Платон смертен;
 ...
 Все люди смертны.

Образы «Сократ человек» (опорные в терминах голографии или индексные в терминах индуктивного вывода) и «Сократ смертен» (сигнальные или индуцируемые соответственно), а также все последующие образы представляли собой реализации случайного поля размером 256×256 пикселей и состояли из двух фрагментов:

– общих реализаций поля в виде надписей «Men» для всей последовательности опорных образов и в виде надписи «Mortal» для сигнальных образов; их удельные веса (3) составляли $1 - m^{(R)} = 0.369$ и $1 - m^{(S)} = 0.375$ соответственно;

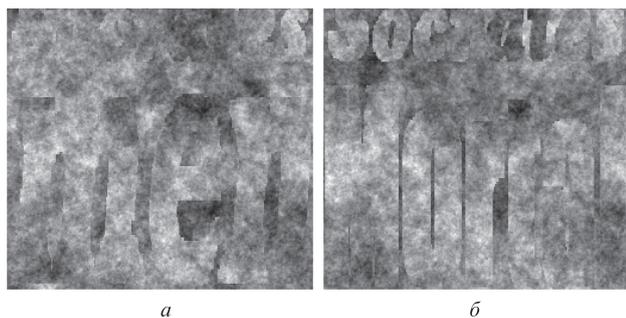


Рис.2. Опорный образ «Сократ человек» (а) и сигнальный образ «Сократ смертен» (б) при реализации двумерного фрактального броуновского движения.

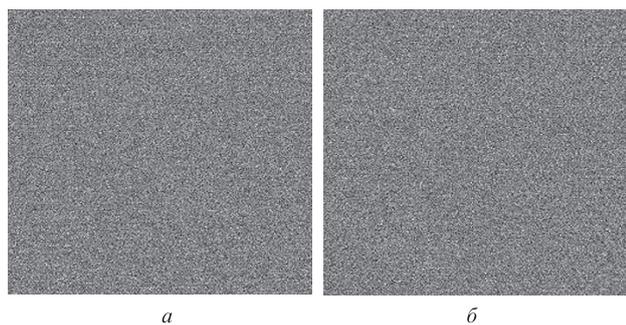


Рис.3. Опорный образ «Сократ человек» (а) и сигнальный образ «Сократ смертен» (б) при реализации дельта-коррелированного поля.

– различающихся фрагментов, включающих в себя также и индивидуальные имена – разные реализации поля с теми же самыми статистическими характеристиками.

На рис.2 представлена первая пара образов, приготовленных в виде реализаций поля, описываемого моделью двумерного фрактального броуновского движения с параметром Хёрста $H = 0.1$. Методом пространственной фильтрации (фильтр Гаусса) изготовлено несколько последовательностей образов, различающихся радиусом корреляции поля r : он изменялся от $r < 1$ (дельта-коррелированное поле) до $r = 10$ пикселей. Соответственно менялись и оценки информационной емкости, в том числе и входящая в (19) оценка $\Omega^{(S)u}$. На рис.3 для иллюстрации представлены те же самые образы, что и на рис.2, но для дельта-коррелированного поля. Видно, что в этом случае произошло разрушение внутренней коррелированности образов и надписи, читавшиеся на рис.2, теперь визуально не выделяются.

Моделировалась запись $n = 63$ НГ, в восстановленном в выходной плоскости поле измерялось отношение дисперсий $V(n)$ общих и различающихся фрагментов. На

Табл.1. Информационные характеристики образов, использованных в численном эксперименте.

Номер кривой на рис.5 и 6	Радиус корреляции r (пиксель)	Оценка информационной емкости различающихся фрагментов $\Omega^{(S)u}$	Оценка информационной емкости общего фрагмента $\Omega^{(S)c}$	Уровень насыщения (21)
1	< 1 (дельта-коррелированное поле)	∞	∞	∞
2	1	13050	7815	161
3	2	3260	1954	80
4	3	1450	868	54
5	4	815	488	40
6	5	521	312	32
7	7.5	232	139	21.5
8	10	130	78	16

данном этапе предполагался неограниченный линейный динамический диапазон ГРС. С учетом ограниченности динамического диапазона сенсора амплитуды восстановленного поля нормировались. Характеристики записывавшихся образов даны в табл.1, радиусы корреляции соответствуют радиусам размытия исходного дельта-коррелированного поля гауссовой функции.

На рис.4. в качестве иллюстраций приведены примеры восстановленных полей при числе НГ $n = 59$ для дельта-коррелированного поля, а также при радиусе корреляции $r = 2$ и 10 пикселей (см. табл.1). На рис.5 показаны измеренные в численном эксперименте зависимости $V(n)$ для разных оценок информационной емкости различающихся фрагментов сигнальных образов. Поскольку теоретические оценки (19) хорошо совпадают с экспериментальными, то во избежание загромождения на рис.5 оценки (19) не приведены, а на рис.6 даны относительные погрешности экспериментальных данных (рис.4) в сравнении с теоретическими оценками (19).

Из анализа рис.5 и 6 можно сделать следующие выводы:

1. С ростом числа НГ n точность теоретической оценки (19) возрастает. Поскольку для аналоговой обработки погрешность 10% считается нормой, то точность оценки (19) при $n \geq 15$ для кривых 3–7 вполне удовлетворительна.

2. Выражение (19) дает неудовлетворительную оценку для образов как реализаций дельта-коррелированных полей (кривые 1 и 2). Это обусловлено тем, что в данном случае имеет место полное разрушение внутренней коррелированности образов с превращением информации в белый шум, сопровождающееся резким ростом дисперсии образов. Последний фактор не учитывается при выводе

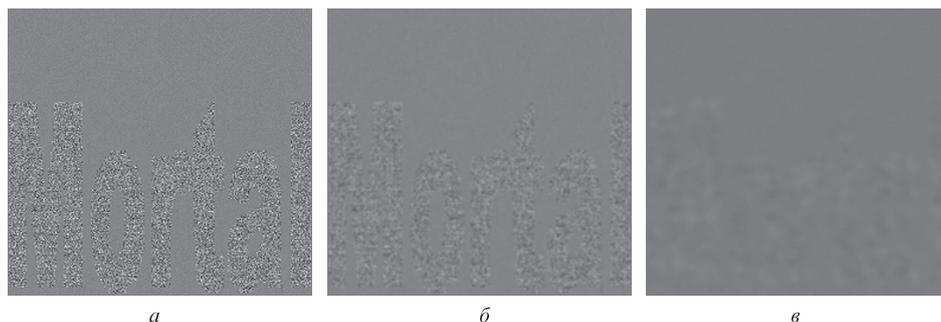


Рис.4. Восстановленный $n = 59$ НГ образ при реализации дельта-коррелированного поля (а), а также при радиусе корреляции $r = 2$ (б) и 10 пикселей (в).

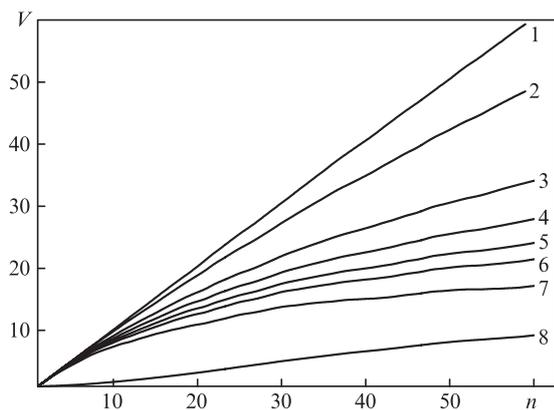


Рис.5. Зависимости от числа НГ n отношения дисперсий общих и различающихся фрагментов в восстановленном поле для характеристик образов, приведенных в табл.1.

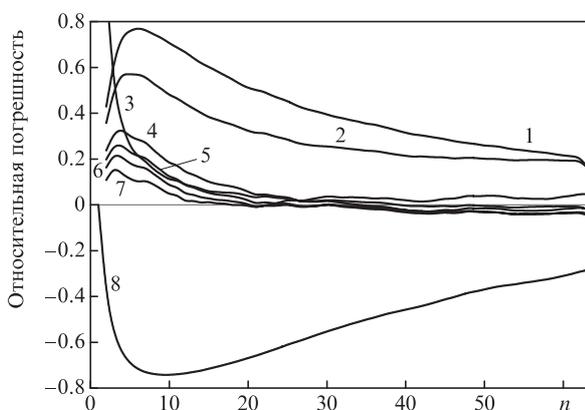


Рис.6. Относительные погрешности экспериментальных и теоретических (19) зависимостей отношения дисперсий общих и различающихся фрагментов в восстановленном поле от числа НГ n для характеристик образов, приведенных в табл.1.

(19). При этом исследуемый метод позволяет эффективно выявить из шума скрытую в нем информацию – надпись, не читавшаяся (рис.3,б) на эталонном образе, в образе, восстановленном $n = 59$ НГ (рис.4,а), читается прекрасно.

3. Выражение (19) дает также неудовлетворительную оценку при крайне низкой оценке информационной емкости общего фрагмента $\Omega^{(S)c}$ (кривая 8). На рис.4,в наглядно видна причина этого – механизм сглаживания фона $E_{out}^u(x)$ (7) работает так же эффективно, как и в остальных случаях, но сам подлежащий выявлению фрагмент, надпись «Mortal», столь малоинформативен ($\Omega^{(S)c} = 78$), что даже на однородном фоне практически не читается.

5. Заключение

Таким образом, схема голографии Фурье с НГ, записанными в объемной регистрирующей среде с последовательности пар образов, позволяет решить задачу выявления общих фрагментов сигнальных образов. Эффективность их выявления определяется оценкой информационной емкости различающихся фрагментов сигнальных образов, за исключением случая крайне низкой оценки информационной емкости подлежащих выявлению общих фрагментов. Полученная теоретическая оценка дает удовлетворительную точность по сравнению с экспериментальными данными при «разумных» значениях информационных характеристик образов, в первую оче-

редь при достаточной информационной емкости самих общих фрагментов.

Показано, что зависимость эффективности выявления общих фрагментов от числа НГ имеет нелинейный характер, выходя на насыщение, уровень которого определяется оценкой информационной емкости различающихся фрагментов сигнальных образов. Этот факт отражает механизм, обеспечивающий выявление общих фрагментов – сглаживание по мере роста числа НГ различающихся фрагментов как фона. Ограниченность динамическим диапазоном ГРС обуславливает зависимость информационных характеристик записанных образов от числа НГ. В свою очередь, это приводит к изменению уровня насыщения. Данный механизм заслуживает отдельного исследования, результаты которого автор надеется представить в дальнейшем.

Таким образом, показаны новые возможности объемных НГ Фурье в рамках развития оптических информационных технологий. Эти возможности представляют практический интерес, в частности, для систем оперативного анализа пополняемых архивных баз данных, включая системы оперативного наблюдения [5–7, 14]. Предложенный метод может быть применен, в том числе, и для выявления скрытых общих фрагментов в дельта-коррелированных изображениях, внешне выглядящих как белый шум.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность О.П.Кузнецову и И.Б.Фоминых за обсуждения и критические замечания, способствовавшие формированию развиваемого подхода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №15-01-04111-а).

1. Van Heerden P.J. *Appl. Opt.*, **2**, 387 (1963).
2. Микаэлян А.Л., Бобринев В.И. *ДАН СССР*, **191**, 799 (1970).
3. Микаэлян А.Л., Бобринев В.И. *Радиотехника*, **29**, 7 (1974).
4. Лявщук И.А., Ляликов А.М. *Квантовая электроника*, **36**, 154 (2006).
5. Бетин А.Ю., Бобринев В.И., Евтихий Н.Н., Жердев А.Ю., Злоказов Е.Ю., Лушников Д.С., Маркин В.В., Одинокоев С.Б., Стариков С.Н., Стариков Р.С. *Квантовая электроника*, **43**, 87 (2013).
6. Betin A.Yu., Bobrinev V.I., Odinokov S.B., Evtikhiev N.N., Starikov R.S., Starikov S.N., Zlokazov E.Yu. *Appl. Opt.*, **52**, 8142 (2013).
7. Бетин А.Ю., Бобринев В.И., Вереникина Н.М., Донченко С.С., Евтихий Н.Н., Злоказов Е.Ю., Одинокоев С.Б., Стариков С.Н., Стариков Р.С. *Квантовая электроника*, **45**, 771 (2015).
8. Longuet-Higgins H.C. *Nature*, **217**, 104 (1968).
9. Gabor D. *Nature*, **217**, 584 (1968).
10. Mager H.J., Wess O., Waidelech W. *Opt. Commun.*, **9**, 156 (1973).
11. Боркова В.Н., Зубов В.А., Крайский А.В. *Оптика и спектроскопия*, **63**, 384 (1987).
12. Крайский А.В., Миронова Т.В. *Квантовая электроника*, **45**, 759 (2015).
13. Foster D.J., Wilson M.A. *Nature*, **440**, 680 (2006).
14. Гарбук С.В. *Национальная безопасность*, **4**, 451 (2016).
15. Павлов А.В. *Изв. вузов. Сер. Физика*, **58**, 80 (2015).
16. Павлов А.В. *Квантовая электроника*, **46**, 759 (2016).
17. Денисюк Ю.Н., Давыдова И.Н. *Оптика и спектроскопия*, **60**, 365 (1986).
18. Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В. *Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах* (М.: Физматлит, 2008).
19. Яглом А.М. *Корреляционная теория стационарных случайных функций* (Л.: Гидрометеоиздат, 1981).
20. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей: Учебник для вузов* (М.: Высшая школа, 1999).
21. Шубников Е.И. *Оптика и спектроскопия*, **62**, 450 (1987).
22. Павлов А.В. *Труды Пятнадцатой национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием (КИИ-2016)* (Смоленск, 2016, т.2., с.274).