

Кинетика атомов в двухчастотном поле, образованном эллиптически поляризованными волнами

О.Н.Прудников, А.В.Тайченачев, В.И.Юдин

Рассмотрена кинетика атомов в бихроматическом поле, образованном волнами с произвольной эллиптической поляризацией. Для модели атома с оптическим переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ получены аналитические выражения для силы, коэффициентов трения и диффузии. Данные выражения представлены в общем виде разложения по градиентам параметров световых полей. Обнаружен ряд особенностей кинетики атомов, обусловленных интерференционными вкладками в коэффициенты трения и диффузии. Проведен анализ кинетики атомов в поле оптической решётки, образованной при интерференции волны с однородной эллиптической поляризацией и неоднородно поляризованного диссипативного поля.

Ключевые слова: эллиптически поляризованные волны, кинетика атомов, двухчастотное поле.

1. Введение

Лазерное охлаждение и захват нейтральных атомов являются одним из наиболее бурно развивающихся направлений атомной физики. Среди множества работ в данной области особо можно выделить исследование кинетики атомов в оптических решётках, т.е. в интенсивных световых полях, создающих глубокий оптический потенциал для захвата нейтральных атомов. К настоящему времени оптические решётки стали основой для различных экспериментов со сверххолодными атомами [1]. Большое развитие получили работы связанные с квантовыми вычислениями [2–8], где ультрахолодные атомы являются объектами для хранения и обработки квантовой информации.

Как правило, при использовании монохроматических световых полей достижение значительной локализации атомов методами лазерного охлаждения является нетривиальной задачей. Поскольку оптический потенциал и диссипативные процессы определяются одним световым полем, то возникают ограничения, затрудняющие достижение минимальных значений размеров локализаций и температуры охлаждения атомов. В этом случае, например, при субдоплеровском охлаждении в $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации светового поля (формируется двумя взаимно ортогональными линейно поляризованными полями) и при оптимальных параметрах полей доля незахваченных в оптический потенциал атомов достаточно высока, ~ 0.2 [9]. Действительно, сверхглубокое охлаждение достигается в резонансных полях относительно малой интенсивности, в которых глубина оптического потенциала также уменьшается [10, 11]. Для достижения высокой доли захваченных в потенциал атомов со значительной степенью

локализации в оптическом потенциале можно использовать второе поле с частотой, существенно отличающейся от частоты первого поля.

Первые теоретические исследования кинетики атомов в присутствии двух монохроматических полей были проведены в работах [12, 13]. Также можно выделить работы по охлаждению в Λ -схеме [14–19] и каскадных схемах [20–22], однако здесь различные световые поля действуют на различные оптические переходы атома. Мы, напротив, как и в работах [12, 13], будем рассматривать случай, когда оба поля возбуждают один оптический переход.

Отметим, что одним из частных вариантов развития методов лазерного охлаждения в многочастотных полях является охлаждение в условиях спектрального разрешения боковых колебательных полос [23–25], где охлаждение атомов происходит на колебательных подуровнях в глубоком оптическом потенциале при возбуждении их дополнительным световым полем. Однако при теоретическом рассмотрении данной задачи используют, как правило, значительные упрощения, в рамках которых влияние сильного поля на кинетику атомов сводится лишь к формированию им оптических сдвигов подуровней (оптических потенциалов) и к индуцированию двухфотонных переходов между подуровнями, тогда как влияние второго поля сводится лишь к определению им релаксации как зеэмановских, так и колебательных уровней оптической решётки [26, 27]. В общем случае важно учесть влияние обоих полей на кинетику атомов. Так, например, флуктуации вынужденного поглощения и излучения фотонов недиссипативного поля могут приводить к флуктуациям дипольной силы и, следовательно, значительно влиять на диффузию атомов в оптическом потенциале и на кинетику атомов в целом.

Ранее нами в работе [28] была рассмотрена кинетика атомов в бихроматическом поле на примере модели двухуровневого атома. Были получены аналитические выражения для силы, коэффициентов трения и диффузии, что позволило выявить ряд новых эффектов в кинетике атомов. В частности был обнаружен эффект сильной локализации, обусловленный интерференционными вкладками в коэффициенты трения и диффузии.

О.Н.Прудников, А.В.Тайченачев, В.И.Юдин. Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 13/3; Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2; e-mail: oleg.nsu@gmail.com

Поступила в редакцию 9 марта 2017 г., после доработки – 28 марта 2017 г.

В настоящей работе рассмотрена кинетика атомов в рамках двухуровневой модели с вырожденными по проекции углового момента уровнями в бихроматическом поле. Эта модель предполагает малые интенсивности световых волн, при которых сдвигами световых уровней и влиянием других уровней в системе можно пренебречь. Данная постановка задачи позволяет принять во внимание поляризационный аспект взаимодействия атомов с бихроматическим полем. Как хорошо известно, в монохроматических световых полях вырожденность атомных уровней по проекции углового момента приводила к появлению так называемых субдоплеровских вкладов в силу трения [29]. В бихроматическом световом поле, как показано в настоящей работе, эти механизмы также имеют место, а наряду с ними – множество новых эффектов, обусловленных интерференционными вкладами в коэффициенты трения и диффузии.

2. Постановка задачи

Рассмотрим атом с замкнутым оптическим переходом $j_g \rightarrow j_e$ в двухчастотном поле

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_1(z)\exp(-i\omega_1 t) + \mathbf{E}_2(z)\exp(-i\omega_2 t) + \text{к.с.} \quad (1)$$

с частотами, близкими к атомному резонансу ω_0 , т. е. с отстройками $\delta_1 = \omega_1 - \omega_0$ и $\delta_2 = \omega_2 - \omega_0$, при которых $|\delta_1|$ и $|\delta_2| \ll \omega_0$. Поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 имеют близкие волновые векторы $k_2 \approx k_1 = k$, при этом относительная пространственная фаза полей является медленно меняющейся функцией координат:

$$\phi = \delta k z, \quad (2)$$

где $\delta k = k_2 - k_1$. Векторные амплитуды полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 в циркулярном базисе ($\mathbf{e}_\pm = \mp(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$),

$$\mathbf{E}_\kappa = E_\kappa^+ \mathbf{e}_+ + E_\kappa^- \mathbf{e}_-, \quad (3)$$

где $\kappa = 1, 2$, имеют компоненты E_κ^+ , E_κ^- для полей с $\kappa = 1, 2$ соответственно.

Опустив быстроосциллирующие вклады ($\sim \exp(-i2\omega_1)$, $\exp(-i2\omega_2)$ и $\exp[-i(\omega_1 \pm \omega_2)]$) и проведя редукцию в полях с малыми параметрами насыщения $S_\kappa = |\Omega_\kappa|^2/(\delta_\kappa^2 + \gamma^2/4) \ll 1$ ($\Omega_\kappa = -E_\kappa d_{eg}/\hbar$ – частота Раби, d_{eg} – дипольный момент атомного перехода, γ – естественная ширина), получим следующую систему уравнений в координатном представлении для компонент атомной матрицы плотности основного состояния в координатном представлении $\hat{\rho}(z_1, z_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(z_1, z_2) &= \hat{\gamma}\{\hat{\rho}(z_1, z_2)\} - \sum_{\kappa=1,2} \frac{i\delta_\kappa}{\gamma^2/2 + \delta_\kappa^2} \\ &\times [\hat{V}_\kappa^\dagger(z_1)\hat{V}_\kappa(z_1)\hat{\rho}(z_1, z_2) - \hat{\rho}(z_1, z_2)\hat{V}_\kappa^\dagger(z_2)\hat{V}_\kappa(z_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь оператор $d/dt = \partial_t - i\hbar/(M\partial_q\partial_z)$; $z = (z_2 + z_1)/2$; $q = z_1 - z_2$; M – масса атома. Оператор $\hat{\gamma}\{\hat{\rho}(z_1, z_2)\}$ описывает релаксацию матрицы плотности в результате спонтанного излучения фотонов поля с учётом эффектов отдачи (см. напр., [10]). Операторы взаимодействия с полем

$$\hat{V}_\kappa = \Omega_\kappa \sum_{s=\pm 1} \hat{T}_s E_\kappa^s, \quad \hat{T}_s = C_{j_g m; 1, s}^{j_e \mu} |j_e, \mu\rangle \langle j_g, m| \quad (5)$$

выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана $C_{j_g m; 1, s}^{j_e \mu}$. Решение уравнения (4) – нетривиальная задача. Поиск стационарного решения для матрицы плотности $\hat{\rho}(z_1, z_2)$ может быть осуществлён на основе численных методов, предложенных нами в работах [10, 11]. Однако для качественного анализа и понимания эффектов кинетики нейтральных атомов в бихроматическом поле удобно воспользоваться квазиклассическим подходом. Так, в квазиклассическом приближении, при малости параметра отдачи ε_{rec} ($\varepsilon_{\text{rec}} = \omega_{\text{rec}}/\gamma \ll 1$; $\hbar\omega_{\text{rec}} = \hbar^2 k^2/(2M)$ – энергия отдачи), для атомов с достаточно широким импульсным распределением ($\Delta p \gg \hbar k$) уравнение (4) можно свести к уравнению Фоккера–Планка.

Разложение кинетического уравнения для вигнеровской матрицы плотности $\hat{\rho}(z, p)$ по параметру отдачи $\hbar k/\Delta p$ эквивалентно разложению по степеням параметра $-ikq$ кинетического уравнения для матрицы плотности в координатном представлении $\hat{\rho}(z_1, z_2)$ [30]:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \hat{\mathcal{L}}^{(0)}\{\hat{\rho}\} - ikq\hat{\mathcal{L}}^{(1)} + (-ikq)^2\hat{\mathcal{L}}^{(2)}\{\hat{\rho}\} \dots \quad (6)$$

Аналогично методу, приведённому нами в работе [30], уравнение (6) может быть редуцировано к уравнению Фоккера–Планка для вигнеровской функции распределения $\mathcal{F}(z, p) = \text{Tr}\{\hat{\rho}(z, p)\}$ с коэффициентами: градиентной силой (сила, действующая на атом в покое), коэффициентами трения (линейный по скорости атомов вклад в силу) и диффузии. При этом выражение для силы определяется членами первого порядка в разложении (6):

$$F = -\text{Tr}\{\hat{\mathcal{L}}^{(1)}\{\hat{\sigma}\}\}, \quad (7)$$

где $\hat{\sigma}$ – стационарное решение оптического уравнения Блоха $\partial_t \hat{\sigma} = \hat{\mathcal{L}}^{(0)}\{\hat{\sigma}\}$. Выражение для силы (7) после несложных преобразований можно записать в виде суммы вкладов от каждого из полей

$$F = \hbar \sum_{\kappa=1,2} \text{Tr}\{\hat{F}_\kappa \hat{\sigma}\}, \quad (8)$$

используя операторы силы \hat{F}_κ :

$$\begin{aligned} \hat{F}_\kappa = & -\frac{1}{\gamma^2/4 + \delta_\kappa^2} \left[i\frac{\gamma}{2} \left(\hat{V}_\kappa^\dagger \frac{\partial \hat{V}_\kappa}{\partial z} - \frac{\partial \hat{V}_\kappa^\dagger}{\partial z} \hat{V}_\kappa \right) \right. \\ & \left. + \delta_\kappa \left(\hat{V}_\kappa^\dagger \frac{\partial \hat{V}_\kappa}{\partial z} + \frac{\partial \hat{V}_\kappa^\dagger}{\partial z} \hat{V}_\kappa \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты трения и диффузии, так же как и в монохроматическом поле [30], можно найти с помощью вспомогательной матрицы $\hat{\phi}$, являющейся решением линейного уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1,2} \frac{1}{\gamma^2/4 + \delta_\kappa^2} \left(\frac{\gamma}{2} \{\hat{V}_\kappa^\dagger \hat{V}_\kappa, \hat{\phi}\} - i\delta_\kappa [\hat{V}_\kappa^\dagger \hat{V}_\kappa, \hat{\phi}] \right) \\ - \gamma \sum_s \hat{V}_\kappa^\dagger \hat{T}_s \hat{\phi} \hat{T}_s^\dagger \hat{V}_\kappa = \sum_{\kappa=1,2} \frac{\delta \hat{F}_\kappa}{\hbar}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta \hat{F}_\kappa = \hat{F}_\kappa - F$ – флуктуация оператора силы. Коэффициент трения пропорционален пространственному градиенту $\hat{\sigma}$:

$$\xi = -\hbar \text{Tr}\{\hat{\phi} \partial_z \hat{\sigma}\}. \quad (11)$$

Коэффициент диффузии может быть представлен в следующем виде:

$$D = \hbar[\text{Tr}\{\hat{\mathcal{L}}^{(2)}\{\hat{\sigma}\}\} - \text{Tr}\{\hat{\phi}\hat{\mathcal{L}}^{(1)}\{\hat{\sigma}\}\} - \text{Tr}\{\hat{\phi}, \hat{\sigma}\}F]. \quad (12)$$

Он содержит вклады от спонтанной диффузии, являющейся результатом флуктуации атомного импульса в процессах спонтанного излучения фотонов, и от вынужденной диффузии, возникающей вследствие флуктуации сил светового давления.

3. Результаты

В качестве примера рассмотрим атомы с оптическим переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ в двухчастотном поле. В одномерной геометрии поля E_1 и E_2 имеют различные интенсивности и, в общем случае, эллиптические поляризации, зависящие от продольной координаты z . Векторные амплитуды каждого из полей E_k определяются четырьмя параметрами: скалярной амплитудой $E_k = |E_k|$, фазой Φ_k , локальной эллиптичностью ε_k и углом ориентации эллипса поляризации ψ_k относительно оси x . В циркулярном базисе

$$E_k = E_k^+ e_+ + E_k^- e_- \quad (13)$$

циркулярные компоненты E_k^+ , E_k^- полей таковы:

$$E_k^\pm = \mp E_k \cos(\varepsilon_k \mp \pi/4) \exp(i\Phi_k) \exp(\mp i\psi_k). \quad (14)$$

Стационарное решение для матрицы плотности основного состояния в нулевом порядке по параметру отдачи имеет следующий вид:

$$\hat{\sigma}_{\mp 1/2, \mp 1/2} = \frac{S \mp [S_1 \sin(2\varepsilon_1) + S_2 \sin(2\varepsilon_2)]}{2S}. \quad (15)$$

Здесь S_k – параметры насыщения, определяемые локальными значениями амплитуд световых полей; $S = S_1 + S_2$ – суммарный параметр насыщения.

Выражения для силы, коэффициентов трения и вынужденной диффузии удобно представить в виде разложения по градиентам параметров полей E_1 и E_2 , а именно по параметрам $\nabla_z \Lambda_k = \nabla_z \ln E_k$, $\nabla_z \varepsilon_k$, $\nabla_z \Phi_k$ и $\nabla_z \psi_k$. Так, выражение для силы F , действующей на неподвижный атом, является суммой:

$$F = \sum_k \sum_\beta f_{\beta k} \nabla_z \beta_k, \quad (16)$$

где коэффициенты разложения $f_{\beta k}$ выражаются через локальные параметры полей:

$$\begin{aligned} f_{\Lambda_1} &= -\frac{2}{3} \frac{S_1 \delta_1}{S} [2S + S_1 \sin^2(2\varepsilon_1) + S_2 \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)], \\ f_{\varepsilon_1} &= -\frac{2}{3} \frac{S_1 \delta_1}{S} \cos(2\varepsilon_1) [S_1 \sin(2\varepsilon_1) + S_2 \sin(2\varepsilon_2)], \\ f_{\Phi_1} &= \frac{\gamma}{3} \frac{S_1}{S} [2S + S_1 \sin^2(2\varepsilon_1) + S_2 \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)], \\ f_{\psi_1} &= -\frac{\gamma}{3} \frac{S_1}{S} [3S_1 \sin(2\varepsilon_1) + S_2 \sin(2\varepsilon_2) + 2S_2 \sin(2\varepsilon_1)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Коэффициенты $f_{\beta k}$ для второго поля можно получить заменой индексов $k = 1$ на $k = 2$ и наоборот. Коэффициенты трения и вынужденной диффузии также разбиваются на вклады, пропорциональные квадратичным комбинациям градиентов параметров светового поля:

$$\xi = \hbar \sum_{k,k'} \sum_{\beta,\beta'} \chi_{\beta k \beta' k'} \nabla_z \beta_k \nabla_z \beta_{k'}, \quad (18)$$

$$D^{(i)} = \gamma \hbar \sum_{k,k'} \sum_{\beta,\beta'} \mathcal{D}_{\beta k \beta' k'} \nabla_z \beta_k \nabla_z \beta_{k'}. \quad (19)$$

Выражения для $\chi_{\beta\beta'}$ и $\mathcal{D}_{\beta\beta'}$ достаточно громоздки, поэтому мы их опустим. Отметим, что в рассматриваемом пределе $S_k \ll 1$ коэффициент трения отличен от нуля в полях как с пространственно-неоднородной поляризацией, так и с пространственно-неоднородной интенсивностью (при эллиптической поляризации полей), в отличие от монохроматического поля, где необходимым условием является наличие пространственной неоднородности поляризации поля (эллиптичности, ориентации вектора поляризации).

Коэффициент спонтанной диффузии может быть выделен из (12) в явном виде:

$$\begin{aligned} D^{(s)} &= \hbar^2 k^2 \sum_k \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma}{\gamma^2/4 + \delta_{k,s=0,\pm 1}^2} \sum_s K_s \hat{T}_s^\dagger \hat{V}_k \hat{\sigma} \hat{V}_k^\dagger \hat{T}_s \right\} \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{5S} \left[\left(1 - \frac{7}{18} \cos^2(2\varepsilon_1)\right) S_1^2 + \left(\frac{11}{9} + \frac{7}{9} \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)\right) S_1 S_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{7}{18} \cos^2(2\varepsilon_2)\right) S_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что в отсутствие одного из полей выражения для силы, коэффициентов трения и диффузии принимают вид, известный для атомов с оптическим переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 2/3$ в монохроматическом поле [29, 31].

3.1. Примеры оптических решёток

В качестве конкретного примера рассмотрим оптическую решётку, образованную полем стоячей волны $E_1(z) = 2E_{01} e_1 \cos(kz)$ с однородной поляризацией и большой отстройкой, $|\delta_1| \gg |\delta_2|$, создающей глубокий оптический потенциал, и полем с неоднородной поляризацией, обеспечивающим пространственно-неоднородную оптическую накачку уровней $E_2(z)$, т. е. примем

$$|\delta_1| S_1 \gg |\delta_2| S_2, \quad S_1 \ll S_2. \quad (21)$$

Поле стоячей волны формируется встречными волнами с одинаковой амплитудой E_{01} и однородной поляризацией $e_1 = -\cos(\varepsilon_1 - \pi/4)e_+ + \cos(\varepsilon_1 + \pi/4)e_-$ с не зависящим от координаты z параметром эллиптичности ε_1 ($\varepsilon_1 = 0$ соответствует линейной поляризации поля, а $\varepsilon_1 = \pm \pi/4$ – циркулярным поляризациям). Поле стоячей волны характеризуется пространственным градиентом лишь одного параметра,

$$\nabla_z \Lambda_1 = -k \tan(kz).$$

Соответственно $S_1 = 4S_{01} \cos^2(kz)$, где S_{01} – параметр насыщения в расчёте на одну из встречных волн с амплитудой E_{01} .

Второе поле – поле накачки с неоднородной поляризацией, в общем случае может содержать все пространственные градиенты параметров $\{A_2, \varepsilon_2, \Phi_2, \psi_2\}$. Такое поле может быть представлено в виде суммы двух встречных волн с эллиптическими поляризациями ε_{2+} и ε_{2-} :

$$\mathbf{E}_2(z) = E_{02} \mathcal{E} \exp(-i\omega_2 t) + \text{к.с.}, \quad (22)$$

где E_{02} – амплитуда каждой из волн; комплексный вектор $\mathcal{E} = a_+ e_+ + a_- e_-$ с циклическими компонентами $a_+(z)$ и $a_-(z)$ определяет локальный эллипс поляризации светового поля и вариацию его амплитуды вдоль z :

$$\begin{aligned} a_+ &= -\cos(\varepsilon_{2+} - \pi/4) \exp[i(kz + \phi)] \\ &\quad - \cos(\varepsilon_{2-} - \pi/4) \exp[-i(kz + \phi)] \exp(-i\theta), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_- &= \cos(\varepsilon_{2+} - \pi/4) \exp[i(kz + \phi)] \\ &\quad + \cos(\varepsilon_{2-} + \pi/4) \exp[-i(kz + \phi)] \exp(+i\theta); \end{aligned}$$

θ – угол между полуосями эллипсов поляризации встречных волн. Для простоты рассмотрим два случая: $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурацию, создаваемую встречными волнами с линейными поляризациями, ориентированными под углом 90° (т.е. $\varepsilon_{2+} = \varepsilon_{2-} = 0, \theta = \pi/2$), и $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурацию, образованную встречными волнами с циркулярными поляризациями (т.е. $\varepsilon_{2+} = \pi/4$ и $\varepsilon_{2-} = -\pi/4$). В таких полевых конфигурациях имеется лишь один ненулевой градиент: $\nabla_z \varepsilon_2 = -k$ в первом случае и $\nabla_z \psi_2 = -k$ во втором. Параметр ϕ в (23) – относительная фаза (2), характеризующая относительные пространственные конфигурации полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Поскольку условие (21) подразумевает $|\delta_1| \gg |\delta_2|$, относительная фаза $\phi = (\delta_2 - \delta_1)cz$ является растущей функцией координат при $\delta_1 < 0$ и, соответственно, убывающей при $\delta_1 > 0$.

3.2. Конфигурация $\text{lin} \perp \text{lin}$

В поле $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации имеется один пространственный градиент, $\nabla_z \varepsilon_2 = -k$. Поле \mathbf{E}_2 в каждой точке имеет эллиптическую поляризацию с параметром эллиптичности, определяемым соотношением $\sin(2\varepsilon_2) = -\sin(2kz + 2\phi)$. Другие параметры – интенсивность, фаза и ориентация эллипса поляризации – остаются неизменными. В любой точке параметр насыщения поля накачки

$$S_2 = 2S_{02},$$

где параметр насыщения S_{02} определяется в расчете на каждую встречную волну с амплитудой E_{02} . В условиях (21) сила определяется вкладом, пропорциональным градиенту интенсивности поля решётки

$$F = -\hbar \frac{2}{3} S_1 \delta_1 [2 + \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\varepsilon_2)] \nabla_z A_1. \quad (24)$$

На масштабах порядка длины волны, где изменением относительной фазы полей ϕ можно пренебречь, оптический потенциал принимает следующий вид:

$$U = \frac{\hbar \delta_1 S_{01}}{3} \left\{ 4 \cos(2kz) + \sin(2\varepsilon_1) \times \right.$$

$$\left. \times \left[2kz \cos(2\phi) - \frac{1}{2} \sin(4kz + 2\phi) \right] \right\}. \quad (25)$$

Несмотря на то что в общем случае выражения для оптического потенциала и силы отличаются от известных выражений для случая монохроматического поля [31], оптический потенциал также имеет период $\lambda/2$, а положения локальных минимумов и максимумов совпадают с положениями узлов и пучностей поля решётки при «синих» ($\delta_1 > 0$) и «красных» ($\delta_1 < 0$) отстройках. Соответственно дополнительный вклад, пропорциональный $\sin(2\varepsilon_1)$, приводит к эффекту «выпрямления» в силе, т.е. к ненулевой после пространственного усреднения по длине волны силе:

$$\langle F \rangle = -\frac{\hbar k 2 S_{01} \delta_1 \sin(2\varepsilon_1) \cos(2\phi)}{3}. \quad (26)$$

Таким образом, при эллиптической поляризации поля решётки данный вклад приводит к модуляции оптического потенциала на макроскопическом масштабе с периодом $L = \pi/(\delta k)$, много большим длины волны (рис. 1). При этом области глобальных минимумов и максимумов оп-

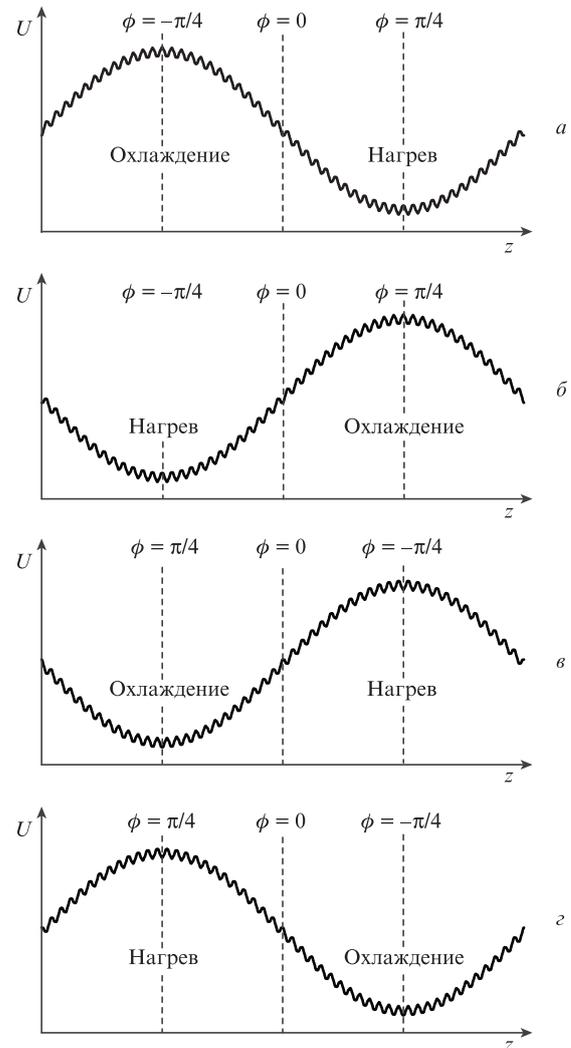


Рис. 1. Схематическая зависимость оптического потенциала на отрезке $z = [-\pi/(2\delta k) \dots \pi/(2\delta k)]$ и положение областей нагрева и охлаждения атомов при различных знаках эллиптичности и отстройке поля решётки: $\delta_1 < 0, \varepsilon_1 > 0$ (а); $\delta_1 < 0, \varepsilon_1 < 0$ (б); $\delta_1 > 0, \varepsilon_1 > 0$ (в); $\delta_1 > 0, \varepsilon_1 < 0$ (г).

тического потенциала соответствуют относительной фазе полей $\phi = \pm\pi/4$.

Основной вклад в коэффициент трения в поле $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации определяется коэффициентами $\chi_{\varepsilon_2 \varepsilon_2}$ и $\chi_{\Lambda_1 \varepsilon_2}$ и в условиях (21) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\hbar k^2} &= 6\delta_2 \cos^2(2\varepsilon_2) \frac{\nabla_z \varepsilon_2 \nabla_z \varepsilon_2}{k^2} + 6 \frac{\delta_1 S_1}{S_2} \sin(2\varepsilon_1) \cos(2\varepsilon_2) \\ &\times \frac{\nabla_z \Lambda_1 \nabla_z \varepsilon_2}{k^2} = 6\delta_2 \cos^2(2kz + 2\phi) + 6 \frac{\delta_{01} S_{01}}{S_{02}} \\ &\times \sin(2\varepsilon_1) \sin(2kz) \cos(2kz + 2\phi). \end{aligned} \quad (27)$$

Первое слагаемое представляет собой известный результат для коэффициента трения в монохроматическом поле $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации [29, 31], второе слагаемое является добавкой от поля решётки, доминирующей при эллиптической поляризации поля стоячей волны $\varepsilon_1 \neq 0$. Усреднённый по пространственному периоду коэффициент трения

$$\langle \frac{\xi}{\hbar k^2} \rangle = 3\delta_2 - 3 \frac{\delta_1 S_{01}}{S_{02}} \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\phi) \quad (28)$$

определяет направление кинетического процесса (нагрев или охлаждение). Знак коэффициента трения определяется не только знаком отстройки «охлаждающего» поля δ_2 , но и знаком отстройки поля решётки δ_1 , а также эллиптичностью ε_1 и относительной фазой ϕ . Коэффициент вынужденной диффузии определяется тремя основными вкладками, $\mathcal{D}_{\Lambda_1 \Lambda_1}$, $\mathcal{D}_{\varepsilon_2 \varepsilon_2}$ и $\mathcal{D}_{\Lambda_1 \varepsilon_2} + \mathcal{D}_{\varepsilon_2 \Lambda_1}$, и в условиях (21) сводится к

$$\begin{aligned} \frac{D^{(i)}}{\hbar^2 k^2 \gamma} &= 2 \sin^2(2\varepsilon_1) \cos^2(2\varepsilon_2) \frac{\delta_1^2 S_1^2 (\nabla_z \Lambda_1)^2}{\gamma^2 S_2 k^2} \\ &+ 4 \frac{\delta_2 \delta_1 S_1}{\gamma^2} \sin(2\varepsilon_1) \cos^3(2\varepsilon_2) \frac{\nabla_z \Lambda_1 \nabla_z \varepsilon_2}{k^2} \\ &+ \left[2 \frac{\delta_2^2}{\gamma^2} \cos^4(2\varepsilon_2) + \frac{1 + \cos^2(2\varepsilon_2)}{6} \right] S_2 \frac{\partial_z \varepsilon_2 \partial_z \varepsilon_2}{k^2} \\ &= 4 \sin^2(2\varepsilon_1) \frac{\delta_1^2 S_{01}^2}{\gamma^2 S_{02}} \cos^2(2kz + 2\phi) \sin^2(2kz) \\ &+ 8 \sin(2\varepsilon_1) \frac{\delta_2 \delta_1 S_{01}}{\gamma^2} \cos^3(2kz + 2\phi) \sin(2kz) \\ &+ \left[4 \frac{\delta_2^2}{\gamma^2} \cos^4(2kz + 2\phi) + \frac{1 + \cos^2(2kz + 2\phi)}{3} \right] S_{02}. \end{aligned} \quad (29)$$

Третье слагаемое является известным результатом для коэффициента вынужденной диффузии в монохроматическом поле $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации [29, 31], однако первое и второе слагаемые доминируют, если поляризация поля стоячей волны отлична от линейной, т.е. $\varepsilon_1 \neq 0$. Усреднённый по пространственному периоду коэффициент вынужденной диффузии

$$\begin{aligned} \langle \frac{D^{(i)}}{\hbar^2 k^2 \gamma} \rangle &= \sin^2(2\varepsilon_1) \frac{\delta_1^2 S_{01}^2}{\gamma^2 S_{02}} \left[\frac{3}{2} - \cos^2(2\phi) \right] \\ &+ \frac{S_{02}}{2} \left(3 \frac{\delta_2^2}{\gamma^2} + 1 \right) - 3 \frac{\delta_2 \delta_1 S_{01}}{\gamma^2} \sin(2\varepsilon_1) \sin(2\phi). \end{aligned} \quad (30)$$

Коэффициент спонтанной диффузии в условиях (21) определяется лишь полем накачки,

$$D^{(s)} = \hbar^2 k^2 \gamma \frac{2S_{02}}{5} \left[1 - \frac{7}{18} \cos^2(2kz + 2\phi) \right], \quad (31)$$

и в точности соответствует результатам для атома в монохроматическом поле $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации.

Как видно из выражений для силы и коэффициентов трения и диффузии, в условиях (21) оптический потенциал определяется полем решётки E_1 , а коэффициенты трения и диффузии – полем накачки E_2 только в случае линейной поляризации поля E_1 ($\varepsilon_1 = 0$). Изменение фазы ϕ приводит лишь к относительному сдвигу пространственных зависимостей оптического потенциала и коэффициентов трения и диффузии. В качестве примера на рис.2 приведены результаты расчета стационарного распределения атомов в решетках для различных фаз при «красных» отстройках поля решётки $\delta_1 < 0$. Расчёт выполнен на основе численного решения квантового кинетического решения для атомной матрицы плотности с полным учётом квантовых эффектов отдачи методом, предложенным в работах [10, 11]. Так, в области $\phi = 0$ минимум оптического потенциала совпадает с минимумом коэффициента трения, что приводит к более сильной локали-

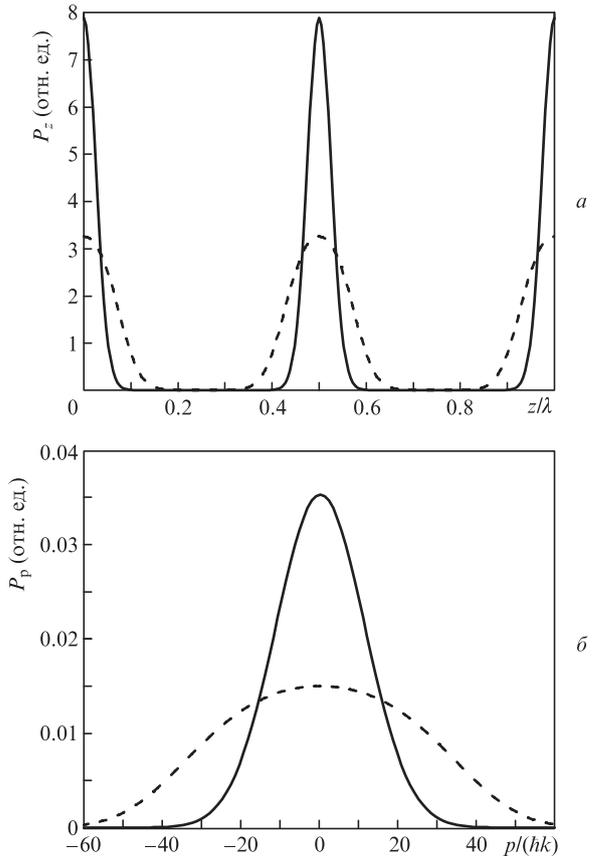


Рис.2. Пространственное (а) и импульсное (б) распределения стационарного решения для атомной матрицы плотности с полным учётом эффектов отдачи при относительной фазе полей $\phi = 0$ (сплошная кривая), $\phi = \pi/4$ (штриховая кривая) и линейной поляризации поля решётки $\varepsilon_1 = 0$. Параметры насыщения волн $S_{01} = 0.05$, $S_{02} = 0.5$, отстройки $\delta_1/\gamma = -200$, $\delta_2/\gamma = -2$, $\varepsilon_{\text{rec}} = 0.005$. Соответствующие средние кинетические энергии стационарных распределений $E_{\text{kin}} \approx 0.65\hbar\gamma$ ($\phi = 0$) и $E_{\text{kin}} \approx 2.75\hbar\gamma$ ($\phi = \pi/4$).

зации и к меньшим температурам при лазерном охлаждении атомов в решётках. Стоит ещё раз отметить, что при линейной поляризации поля решётки в условиях (21) изменение знака отстройки поля решётки δ_1 не оказывает значительного влияния на охлаждение атомов, а приводит лишь к инверсии оптического потенциала, что эквивалентно пространственному сдвигу областей локализации на $\lambda/4$. При этом необходимым условием охлаждения является $\delta_2 < 0$.

Совершенно иная картина наблюдается при отличной от линейной поляризации поля решётки. А именно, при круговой, так же как и при эллиптической поляризации поля решётки (в областях $\phi \neq \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) в коэффициентах трения и диффузии начинают доминировать дополнительные вклады, определяемые полем \mathbf{E}_1 . Более того, выпрямляющий вклад в силу (24) приводит к макроскопической модуляции оптического потенциала (см. рис.1). При этом выделяются области пространства, где $\phi = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), и области, где фаза $\phi = \pm \pi/4$. В первом случае возникает значительный эффект выпрямления дипольной силы, приводящий к «выдавливанию» атомов, которые совершают надбарьерное движение в области с $\phi = \pm \pi/4$ (в зависимости от знака отстройки δ_1 и эллиптичности поля ε_1), где выпрямление дипольной силы отсутствует (24). Эти области соответствуют глобальным минимумам оптического потенциала, и в них доминируют дополнительные вклады в коэффициентах трения и диффузии, определяемые полем решётки, что значительно меняет картину кинетических процессов. При этом выбор знака отстройки поля накачки δ_2 практически не влияет на результаты охлаждения атомов в решётках, а направление кинетического процесса всецело зависит от отстройки поля решётки δ_1 , знака эллиптичности ε_1 и знака фазы ϕ в уравнении (28).

При $\delta_1 < 0$ относительная фаза полей ϕ в условиях (21) растёт с увеличением z (см. рис.1). Области глобальных минимумов оптического потенциала (25) соответствуют относительной фазе $\phi = \pi/4$ при $\varepsilon_1 > 0$ и соответственно $\phi = -\pi/4$ при $\varepsilon_1 < 0$. Однако эти условия, как видно из (28), исключают возможность охлаждения атомов в решётках. Охлаждения в областях глобальных минимумов оптического потенциала как при $\varepsilon_1 > 0$ (положение глобального минимума соответствует $\phi = \pi/4$), так и при $\varepsilon_1 < 0$ (положение глобального минимума соответствует $\phi = -\pi/4$) можно добиться лишь при $\delta_1 > 0$.

Рассмотрим подробнее механизм выпрямления дипольной силы в данной полевой конфигурации. Для этого удобно воспользоваться понятием «одетых» состояний. Напомним, что «одетыми» (адиабатическими) состояниями являются собственные состояния гамильтониана атома в поле без учёта поступательного движения. Для двухуровневого атома имеется только пара «одетых» состояний [32]. В рассматриваемом случае атомов с оптическим переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ имеются шесть таких состояний, $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |6\rangle$, каждое из которых является суперпозицией волновых функций зеемановских подуровней основного и возбуждённого состояний атома. Собственные значения, соответствующие «одетым» состояниям, являются адиабатическими потенциалами:

$$\begin{aligned} U_1 &= -\hbar\delta_1/2 + \mathcal{E}_-, & U_3 &= -\hbar\delta_1/2 - \mathcal{E}_-, & U_5 &= -\hbar\delta_1/2, \\ U_2 &= -\hbar\delta_1/2 + \mathcal{E}_+, & U_4 &= -\hbar\delta_1/2 - \mathcal{E}_+, & U_6 &= -\hbar\delta_1/2, \end{aligned} \quad (32)$$

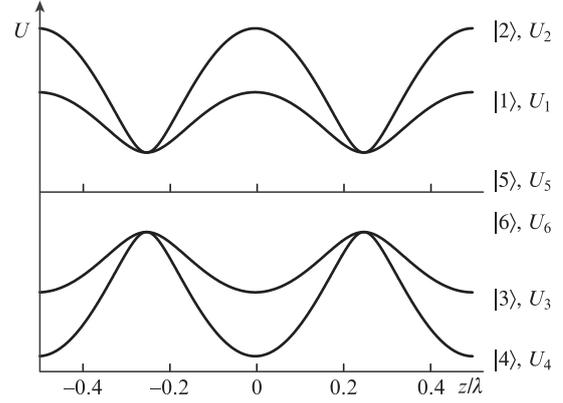


Рис.3. Пространственная зависимость адиабатических потенциалов в монохроматическом поле стоячей волны эллиптической поляризации ($\varepsilon_1 > 0$) при синих отстройках светового поля ($\delta_1 > 0$) для атомов с оптическим переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$.

где

$$\mathcal{E}_\mp = \hbar \frac{1}{2} \sqrt{\delta_1^2 + \frac{4}{3} |\Omega_1(z)|^2 [2 \mp \sin(2\varepsilon_1)]}. \quad (33)$$

На рис.3 схематически представлена пространственная зависимость оптических потенциалов в монохроматическом поле стоячей волны. При положительных отстройках $\delta_1 > 0$ и в пределе малых интенсивностей светового поля $\Omega_1 \ll \gamma$ состояния с оптическими потенциалами U_1 и U_2 соответствуют зеемановским подуровням основного состояния $|j_g, -1/2\rangle$ и $|j_g, 1/2\rangle$ соответственно, а населённости остальных состояний пренебрежимо малы. В монохроматическом поле стоячей волны населённости состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$ задаются симметричной пространственной функцией относительно узлов и пучностей поля решётки, что приводит к нулевой средней по пространственному периоду силе.

Добавление поля $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации приводит к дополнительной пространственно-модулированной оптической накачке подуровней основного состояния. Рассмотрим область с $\phi = 0$, где согласно (26) эффект выпрямления дипольной силы максимально выражен. Параметр эллиптичности поля накачки определяется зависимостью $\sin(2\varepsilon_2) = -\sin(2kz)$ и принимает нулевые значения (соответствующие линейной поляризации поля) в узлах и пучностях поля решётки ($z = n\lambda/4$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$; рис.3). При этом в симметричных относительно максимумов поля решётки промежуточных интервалах параметр эллиптичности поля накачки ε_2 имеет асимметричную зависимость. Данная асимметрия приводит к асимметричной добавке в пространственном распределении населённостей адиабатических состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$. В результате средняя по пространственному периоду сила принимает отличные от нуля значения.

3.3. Конфигурация $\sigma_+ - \sigma_-$

Рассмотрим второй случай, когда поле накачки образовано встречными волнами с циркулярными поляризациями, т.е. $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурацию поля. В таком поле имеется лишь один полевой градиент, отличный от нуля, – градиент ориентации вектора поляризации $\nabla_z \psi_2 = -k$. При этом \mathbf{E}_2 в каждой точке имеет линейную поляризацию, т.е. $\varepsilon_2 = 0$. Так же как и для $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации, в любой точке z параметр насыщения поля накачки

$$S_2 = 2S_{02},$$

где параметр насыщения S_{02} определяется в расчете на каждую встречную волну с амплитудой E_{02} . Сила разбивается на два основных вклада, в условиях (21) принимающих следующий вид:

$$F = -\hbar \frac{4}{3} \delta_1 S_1 \nabla_z \Lambda_1 - \hbar \frac{\gamma}{3} S_1 \sin(2\varepsilon_1) \nabla_z \psi_2. \quad (34)$$

Второе слагаемое имеет малый вес, однако не исчезает при усреднении по пространственному периоду полей

$$\langle F \rangle = \frac{\hbar k \gamma 2 S_{01} \sin(2\varepsilon_1)}{3}. \quad (35)$$

Этот вклад возникает в результате дисбаланса сил светового давления от встречных волн поля накачки. Действительно, поляризация поля решётки, отличная от линейной, приводит к анизотропии населённости в основном состоянии и к различной вероятности рассеяния фотонов σ_+ - и σ_- -поляризации от встречных волн поля накачки. Соответствующий силе оптический потенциал

$$U = \frac{\hbar 8 \delta_1 S_{01} \cos^2(kz)}{3} - \frac{\hbar \gamma S_{01} \sin(2\varepsilon_1) [\sin(2kz) + 2kz]}{3} \quad (36)$$

не зависит от относительной фазы полей, что, в отличие от $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации поля накачки, не приводит к периодической зависимости в масштабах $\pi/(\delta k)$. Основной вклад в коэффициент трения в поле накачки $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации в условиях (21) определяется вкладом от $\chi_{\Lambda_1 \Lambda_1}$, коэффициент $\chi_{\psi_2 \Lambda_1}$ даёт незначительную добавку:

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{\hbar k^2} &= 6 \delta_1 \frac{S_1^2}{S_2^2} \sin^2(2\varepsilon_1) \frac{\nabla_z \Lambda_1 \nabla_z \Lambda_1}{k^2} \\ &+ 3 \gamma \frac{S_1}{S_2} \sin(2\varepsilon_1) \frac{\nabla_z \psi_2 \nabla_z \Lambda_1}{k^2} = 6 \delta_1 \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} \sin^2(2\varepsilon_1) \sin^2(2kz) \\ &+ 3 \gamma \frac{S_{01}}{S_{02}} \sin(2\varepsilon_1) \sin(2kz). \end{aligned} \quad (37)$$

Коэффициент вынужденной диффузии определяется вкладами от $\mathcal{D}_{\Lambda_1 \Lambda_1}$, $\mathcal{D}_{\psi_2 \psi_2}$ и $\mathcal{D}_{\Lambda_1 \psi_2} + \mathcal{D}_{\psi_2 \Lambda_1}$, в условиях (21) принимающих следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{D^{(i)}}{\hbar^2 k^2 \gamma} &= 2 \frac{\delta_1^2 S_1^2}{\gamma^2 S_2^2} \frac{\nabla_z \Lambda_1 \nabla_z \Lambda_1}{k^2} + \frac{8 \delta_1 S_1}{3 \gamma} \sin(2\varepsilon_1) \frac{\nabla_z \Lambda_1 \nabla_z \psi_2}{k^2} \\ &+ \frac{7 S_2}{6} \frac{\nabla_z \psi_2 \nabla_z \psi_2}{k^2} = \frac{\delta_1^2 S_{01}^2}{\gamma^2 S_{02}^2} \sin^2(2\varepsilon_1) \sin^2(2kz) \\ &+ \frac{8 \delta_1 S_{01}}{3 \gamma} \sin(2\varepsilon_1) \sin(2kz) + \frac{7 S_{02}}{3}. \end{aligned} \quad (38)$$

Последнее слагаемое – известный вклад, определяющий коэффициент диффузии для атома в монохроматическом поле $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации. Коэффициент спонтанной диффузии

$$D^{(s)} = \gamma \hbar^2 k^2 S_{02} \frac{11}{45} \quad (39)$$

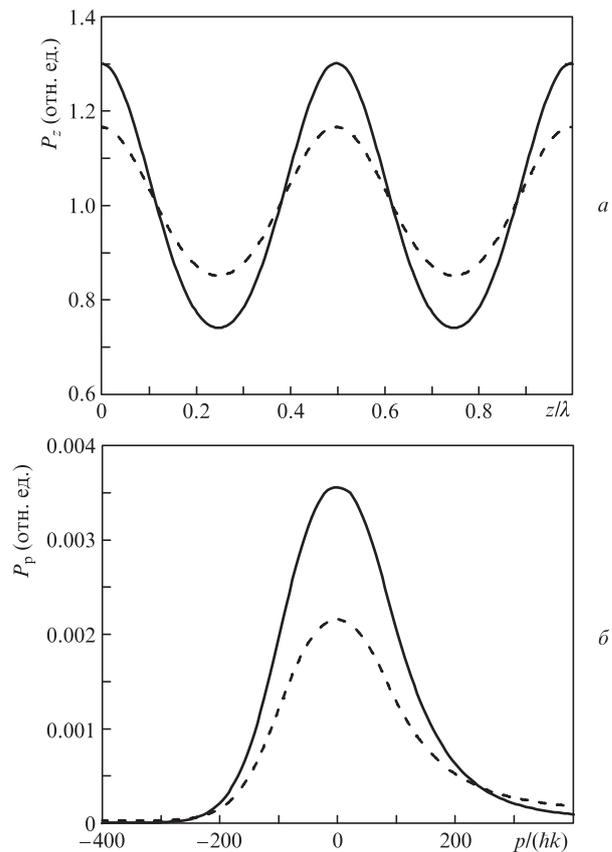


Рис.4. Пространственное (а) и импульсное (б) распределения стационарного решения для атомной матрицы плотности с полным учётом эффектов отдачи при параметре эллиптичности оптической решётки $\varepsilon_1 = \pi/4$ (сплошная кривая) и $\pi/8$ (штриховая кривая). Параметры насыщения волн $S_{01} = 0.05$, $S_{02} = 0.2$, отстройки $\delta_1/\gamma = -400$, $\delta_2/\gamma = 0$, $\varepsilon_{\text{rec}} = 0.005$. Соответствующие температуры стационарных распределений $k_B T = 133 \hbar \gamma$ ($\varepsilon_1 = \pi/4$) и $226 \hbar \gamma$ ($\varepsilon_1 = \pi/8$).

также совпадает с выражением для атома в монохроматическом поле $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации.

Отметим, что в данной конфигурации световых полей ненулевой коэффициент трения связан с наличием интерференционных вкладов в коэффициенты $\chi_{\Lambda_1 \Lambda_1}$ и $\chi_{\psi_2 \Lambda_1}$ и полностью исчезает в отсутствие одного из полей. Охлаждение возможно лишь при $\delta_1 < 0$ и поляризации поля решётки, отличной от линейной. При этом стационарное распределение атомов в импульсном пространстве рис.4 имеет несимметричное по импульсам распределение, являющееся результатом дисбаланса сил спонтанного светового давления волн с $\sigma_+ - \sigma_-$ -поляризациями поля накачки. Охлаждение возможно при любом знаке отстройки δ_2 , в том числе в точном резонансе для поля накачки.

4. Заключение

В работе рассмотрена кинетика атомов в поле, образованном двумя монохроматическими волнами с различными частотами, близкими к частоте оптического резонанса двухуровневого атома. Для простой модели атомов с вырожденными по проекции углового момента уровнями с замкнутым оптическим переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_e = 3/2$ получены общие выражения для кинетических коэффициентов уравнения Фоккера–Планка, а также выражения для силы, коэффициентов трения и диффузии атомов.

Выражения представлены в общем виде разложения по градиентам параметров световых полей. Для двухуровневой модели атома это градиенты амплитуды и фазы световых полей. В общем случае показано, что коэффициенты трения и диффузии могут быть представлены в виде разложения по квадратичным комбинациям этих градиентов, в том числе содержат их перекрестные комбинации. Дополнительно рассмотрены два предельных случая, при которых поле E_1 является сильно отстроенной от атомного резонанса стоячей волной и создаёт глубокий оптический потенциал, а поле E_2 резонансно оптическому переходу и используется для оптической накачки уровней. При этом рассмотрены два случая, когда резонансное поле является полем стоячей либо бегущей волны. Обнаружены следующие особенности кинетики для $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации поля накачки:

– Для линейной поляризации поля решётки охлаждение не зависит от знака поля решётки δ_1 . Коэффициенты трения и диффузии принимают известный вид для атомов в монохроматическом поле $\text{lin} \perp \text{lin}$ -конфигурации. Соответственно направление кинетического процесса определяется знаком отстройки поля накачки – для охлаждения необходимы «красные» отстройки поля $\delta_2 < 0$.

– При эллиптических и круговых поляризациях поля решётки $\epsilon_1 \neq 0$ возникает эффект «выпрямления» дипольной силы, приводящий к дополнительной пространственной модуляции оптического потенциала с периодом, много большим длины волны $\pi/(\delta k)$. При этом в областях глобальных минимумов и максимумов оптического потенциала начинают доминировать дополнительные вклады в коэффициенты трения и диффузии, что приводит к значительным изменениям в кинетике. Так, охлаждение атомов в области минимумов оптического потенциала возможно лишь при «синих» отстройках поля решётки $\delta_1 > 0$, при этом знак отстройки поля накачки существенного влияния не оказывает. В частности отстройка поля накачки может принимать нулевые значения.

Для $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации поля накачки:

– Кинетика атомов не зависит от относительной фазы полей решётки и накачки.

– Охлаждение возможно лишь при «красных» отстройках поля решётки $\delta_1 < 0$ и любых знаках поля накачки (в том числе $\delta_2 = 0$). Необходимым условием для охлаждения атомов с оптическим переходом $j_g = 1/2 \rightarrow j_c = 3/2$ в данной конфигурации световых полей является наличие ненулевой эллиптичности вектора поляризации поля решётки $\epsilon_1 \neq 0$.

Исследование поддержано Российским научным фондом (проект № 16-12-00054). Работа В.И.Ю. поддержана

Министерством образования и науки РФ (проект № 3.1326.2017/ПЧ).

- Grynberg G., Robilliard C. *Phys. Reports*, **355**, 335 (2001).
- Jaksch D., Briegel H.-J., Cirac J.I., Gardiner C.W., Zoller P. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1975 (1999).
- Brennen G.K., Caves C.M., Jessen P.S., Deutsch I.H. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1060 (1999).
- Jaksch D., Cirac J.I., Zoller P., Rolston S.L., Cote R., Lukin M.D. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 2208 (2000).
- Jessen P.S., Deutsch I.H., Stock R. *Quantum Inf. Process*, **3**, 91 (2004).
- Daley A.J., Boyd M., Ye M.J., Zoller P. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 170504 (2008).
- Bloch I. *Nature (London)*, **453**, 1016 (2008).
- Brickman Soderberg K.-A., Gemelke N., Chin C. *New J. Phys.*, **11**, 055022 (2009).
- Castin Y., Dalibard J. *Europhys. Lett.*, **14**, 761 (1991).
- Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **131**, 963 (2007).
- Прудников О.Н., Ильенков Р.Я., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **139**, 1074 (2011).
- Казанцев А.П., Краснов И.В. *Письма в ЖЭТФ*, **46**, 264 (1987).
- Grimm R., Ovchinnikov Y.B., Sidorov A.I., Letokhov V.S. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 1415 (1990).
- Hemmer P.R., Shahriar M.S., Prentiss M.G., Katz D.P., Berggren K., Mervis J., Bigelow N.P. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3148 (1992).
- Gupta R., Xie C., Padua S., Batelaan H., Metcalf H. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 3087 (1993).
- Drewnsen M. *Phys. Rev. A*, **51**, 1407 (1995).
- Javanainen J. *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 519 (1990).
- Kosachiov D.V., Rozhdestvensky Yu.V., Nienhuis G. *J. Opt. Soc. Am. B*, **14**, 535 (1997).
- Prudnikov O.N., Arimondo E. *J. Opt. Soc. Am. B*, **20**, 909 (2003).
- Grove T.T., Gould P.L. *Laser Phys.*, **4**, 957 (1994).
- Pu H., Cai T., Bigelow N.P., et al. *Opt. Commun.*, **118**, 261 (1995).
- Dunn J.W., Thomsen J.W., Greene C.H., Cruz F.C. *Phys. Rev. A*, **76**, 011401(R) (2007).
- Hamann S.E., Haycock D.L., Klose G., Pax P.H., Deutsch I.H., Jessen P.S. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 4149 (1998).
- Vuletic V., Chin C., Kerman A.J., Chu S. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5768 (1998).
- Kerman A.J., Vuletic V., Chin C., Chu S. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 439 (2000).
- Taichenachev A.V., Tumaikin A.M., Yudin V.I., Hollberg L. *Phys. Rev. A*, **63**, 033402 (2001).
- Domenico G.Di., Castanga N., Mileti G., Thoman P., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *Phys. Rev. A*, **69**, 063403 (2004).
- Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **144**, 262 (2013).
- Dalibard J., Tannoudji C.C. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**, 2023 (1989).
- Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **125**, 499 (2004).
- Безвербный А.В., Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **123**, 437 (2003).
- Казанцев А.П., Сурдутович Г.И., Яковлев В.П. *Механическое действие света на атомы* (М.: Наука, 1991).