

О возможности наблюдения хаотического блуждания холодных атомов в жестких оптических решетках

С.В.Пранц, Л.Е.Коньков

Теоретически и численно показана возможность экспериментального наблюдения хаотического блуждания холодных атомов в одномерной жесткой оптической решетке без какой-либо модуляции ее параметров и дополнительного воздействия. Этот эффект детерминированного хаоса возникает вблизи оптического резонанса благодаря нелинейному взаимодействию электронной и механической степеней свободы атома. В определенном диапазоне значений расстройки резонанса каждый раз при пересечении атомом узла стоячей световой волны, формирующей решетку, происходит скачкообразное псевдослучайное изменение величины атомного дипольного момента с соответствующим изменением импульса атома. Это приводит к эффекту хаотического блуждания атомов со свойствами классического детерминированного хаоса, а именно к экспоненциальной чувствительности атомных траекторий к малым изменениям начальных условий и/или управляющих параметров. Часть атомов из начального облака со временем меняет направление движения на противоположное, что можно зафиксировать в реальном эксперименте. Численные эксперименты с атомами лития с учетом спонтанного излучения показывают, что, варьируя интенсивность излучения лазера (нормированную расстройку резонанса), можно в реальном эксперименте осуществлять переход от регулярного режима движения атомов к их хаотическому блужданию в жесткой оптической решетке.

Ключевые слова: холодные атомы, жесткие оптические решетки, хаотическое блуждание.

1. Введение

Одно-, двух- и трехмерные оптические решетки (ОР) создаются с помощью встречных лазерных пучков. На нейтральные атомы в такой решетке действуют: диссипативная сила, возникающая в результате поглощения и излучения фотонов, и градиентная сила, обусловленная взаимодействием атомного электрического дипольного момента с пространственно неоднородным полем стоячей световой волны (ССВ) [1, 2]. Градиентная сила равна нулю в плоской бегущей волне и при точном оптическом резонансе, когда частота атомного перехода ω_a в точности равна частоте ССВ ω_f . В отличие от диссипативной силы она не насыщается с увеличением частоты Раби. Достаточно холодные атомы концентрируются в минимумах оптического потенциала ОР, напоминая кристаллическую решетку. Еще в 1962 г. Г. Аскарьяном было показано [3], что при «голубой» расстройке, $\omega_f - \omega_a > 0$, градиентная сила действует в направлении уменьшения напряженности поля и смещает атомы к узлам ССВ. При «красной» расстройке, $\omega_f - \omega_a < 0$, она действует в направлении увеличения напряженности поля и смещает атомы к пучностям ССВ. Таким образом, достаточно холодные атомы захватываются оптическим потенциалом и осциллируют около узлов или пучностей ССВ [4].

Холодные атомы в ОР являются удобными объектами для изучения многих фундаментальных квантовых явлений – конденсации Бозе–Эйнштейна, квантового запу-

тывания, квантовых вычислений, квантового хаоса, динамической локализации и туннелирования, осцилляций Блоха и др. Среди разного рода практических применений отметим атомные часы, атомные лазеры и интерферометры, нанолитографию и др. Что касается проявлений квантового хаоса холодных атомов в ОР, то большинство экспериментов [5–8] выполнялось в ОР с амплитудной или частотной модуляцией ее параметров. Для подавления спонтанного излучения (СИ) атомов частота ССВ достаточно далеко отстраивалась от частоты рабочего атомного перехода. При таких условиях атомы можно моделировать квантовыми «волчками» с периодическим дельтаобразным возмущением [9].

Новые возможности открываются при работе вблизи оптического резонанса, когда следует принимать во внимание изменение электронных (внутренних) степеней свободы атома. Разнообразные динамические эффекты были аналитически описаны и численно обнаружены как в полуклассическом приближении, так и при полностью квантовом описании. Отметим среди них такие проявления гамильтонова хаоса как хаотические осцилляции Раби [10–13], динамические фракталы [14–16], полеты Леви и аномальную диффузию [14, 16–18], пролиферацию атомных волновых пакетов на узлах ССВ [19], квантово-классическое соответствие [20], атомный хаос в 2D и 3D решетках [21, 22] и диссипативный хаос с холодными атомами [23, 24].

Цель настоящей работы – показать возможность экспериментального наблюдения хаотического блуждания холодных атомов в одномерной жесткой оптической решетке без какой-либо модуляции ее параметров и дополнительного воздействия на атомы. Исходя из стандартного гамильтониана взаимодействия двухуровневого атома с одномодовой плоской и одномерной ССВ, в полуклассическом приближении выводятся уравнения движения

С.В.Пранц, Л.Е.Коньков. Тихоокеанский океанологический институт им. В.И.Ильичева ДВО РАН, Россия, 690041 Владивосток, Балтийская ул., 43; e-mail: prants@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 9 марта 2017 г., после доработки – 18 апреля 2017 г.

для координаты и импульса точечного атома и компонент вектора Блоха. Полученная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений анализируется и численно решается с учетом спонтанного излучения методом стохастической волновой функции. В результате численно показано, что гистограммы распределений атомов по координатам и импульсам существенно различаются для различных режимов их движения. Варьируя интенсивность излучения лазера и изменяя таким образом нормированную расстройку резонанса, можно в реальном эксперименте осуществлять переход от регулярного режима движения атомов к их хаотическому блужданию в жесткой ОР.

2. Результаты

Для конкретности будем рассматривать атомы лития-6 массой $m_a = 1.15 \times 10^{-23}$ г на переходе $2^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ с длиной волны $\lambda_a = 671$ нм и частотой $\omega_a = 2\pi 4.47 \times 10^{14}$ рад/с. Время жизни возбужденного уровня $T_{sp} = 2.7 \times 10^{-8}$ с, скорость отдачи при испускании фотона $v_r = 8.87$ см/с, а соответствующая частота отдачи $\nu_r = 63$ кГц.

Одномерная ОР сформирована встречными пучками лазерного излучения с длиной волны λ_r и волновым числом k_r . Гамильтониан двухуровневого атома в системе отсчета, вращающейся с лазерной частотой ω_r , имеет стандартный вид:

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m_a} + \frac{\hbar}{2}(\omega_a - \omega_r)\hat{\sigma}_z - \hbar\Omega(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)\cos k_r X - \frac{i\hbar\Gamma}{2}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_{\pm,z}$ – операторы Паули для электронной степени свободы атома; X и P – его координата и импульс; Ω – амплитудное значение частоты Раби; $\Gamma = 1/T_{sp}$ – коэффициент релаксации. Движение не слишком холодных атомов можно рассматривать в полуклассическом приближении, в котором квантуется электронная степень свободы атома, а трансляционное движение трактуется как классическое.

Волновая функция электронной степени свободы имеет вид $|\Psi(t)\rangle = a(t)|2\rangle + b(t)|1\rangle$, где $a \equiv A + i\alpha$ и $b \equiv B + i\beta$ – комплекснозначные амплитуды вероятности обнаружить атом в возбужденном ($|2\rangle$) и основном ($|1\rangle$) состояниях. Уравнения движения для вещественных и мнимых частей этих амплитуд и для координаты и импульса точечного атома имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_r p, & \dot{p} &= -2(AB + \alpha\beta)\sin x, \\ \dot{A} &= \frac{1}{2}(\omega_r p^2 - \Delta)\alpha - \frac{1}{2}\gamma A - \beta \cos x, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{1}{2}(\omega_r p^2 - \Delta)A - \frac{1}{2}\gamma\alpha + B \cos x, \\ \dot{B} &= \frac{1}{2}(\omega_r p^2 + \Delta)\beta - \alpha \cos x, \\ \dot{\beta} &= -\frac{1}{2}(\omega_r p^2 + \Delta)B + A \cos x, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x \equiv k_r X$; $p \equiv P/\hbar k_r$; дифференцирование ведется по безразмерному времени $\tau \equiv \Omega t$. Уравнения (2) содержат несколько нормированных управляющих параметров: $\omega_r \equiv \hbar k_r^2/(m_a \Omega)$ – частота отдачи атома; $\Delta \equiv (\omega_r - \omega_a)/\Omega$ – рас-

стройка резонанса; $\gamma = \Gamma/\Omega$ – скорость распада возбужденного уровня атома.

Полуклассическое приближение справедливо при выполнении двух условий. Во-первых, энергия отдачи атома должна быть много меньше его кинетической энергии и энергии взаимодействия с полем, что для системы (2) формулируется в виде простого условия $\omega_r \ll 1$. Во-вторых, импульс атома должен быть много больше импульса фотона, т.е. $p \gg 1$. Если выбрать амплитудное значение частоты Раби $\Omega_0/2\pi = 125 \times 10^6$ Гц, то получим для нормированной частоты отдачи атома $\omega_r = 10^{-3} \ll 1$ и нормированную скорость распада возбужденного уровня $\gamma = 5 \times 10^{-2}$.

Импульс атома изменяется из-за отдачи в результате СИ на некоторую случайную величину в интервале $|\Delta p| \leq 1$. Кроме того, величина $2(AB + \alpha\beta)\sin x$ изменяется по мере движения атома сквозь решетку. Эти изменения обусловлены не только градиентом поля ССВ, но и поведением компоненты электрического дипольного момента атома $u \equiv 2(AB + \alpha\beta)$.

Начальное облако из N невзаимодействующих холодных атомов имеет гауссово распределение по координатам и импульсам

$$\rho(x, p) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_p} \exp\left(-\frac{|x - x_0|^2}{2\sigma_x^2} - \frac{|p - p_0|^2}{2\sigma_p^2}\right),$$

где положим $x_0 = 0$, $p_0 = -10$, $\sigma_x = \sigma_p = 2$. Все атомы находятся в основном состоянии: $A(0) = \alpha(0) = \beta(0) = 0$, $B(0) = 1$. Лазер включается в момент времени $\tau = 0$. Вычисляются координаты и импульсы атомов в некоторый фиксированный момент времени. Отметим, что среднее значение нормированных импульсов в атомном облаке, $p_0 = -10$, на порядок больше импульса фотона и отрицательно, т.е. все атомы первоначально летят вдоль отрицательной полуоси ОР.

Для доказательства того, что скачкообразное псевдослучайное изменение величины атомного дипольного момента u при пересечении атомом узла ССВ является ключевой причиной его хаотического блуждания в жесткой ОР, сначала выполним численный эксперимент в отсутствие СИ, т.е. положим в (2) $\gamma = 0$. Введем компоненты вектора Блоха

$$u \equiv 2\text{Re}(ab^*), \quad v \equiv -2\text{Im}(ab^*), \quad z \equiv |a|^2 - |b|^2, \quad (3)$$

где u и v – компоненты атомного дипольного момента; z – инверсия населенности уровней атома. Уравнения движения в отсутствие диссипации можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_r p, & \dot{p} &= -u \sin x, & \dot{u} &= \Delta v, \\ \dot{v} &= -\Delta u + 2z \cos x, & \dot{z} &= -2v \cos x. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти уравнения имеют два интеграла движения: полную энергию

$$H \equiv \frac{\omega_r}{2} p^2 - u \cos x - \frac{\Delta}{2} z \quad (5)$$

и длину вектора Блоха $u^2 + v^2 + z^2 = 1$.

При точном резонансе имеем $u(\tau) = \text{const} = u(0) = 0$. Следовательно, оптический потенциал отсутствует и $p =$

$\text{const} = p(0)$ для каждого атома. Таким образом, облако атомов летит баллистически в отрицательном направлении оси x , сохраняя первоначальную форму. Это подтверждает гистограмма распределения 10^4 атомов по координатам на рис.1,*а*, вычисленная в фиксированный момент времени $\tau = 10^4$.

При расстройке резонанса движение атомов не столь тривиально, но тоже регулярно. Для системы уравнений (4) в работе [20] было показано, что максимальный показатель Ляпунова (количественная мера детерминированного хаоса) отличается от нуля в диапазоне расстроек $|\Delta| < 0.8$, т.е. при сравнительно больших абсолютных значениях расстройки движение регулярно. Гистограмма распределения по координатам в момент времени $\tau = 10^4$ показана на рис.1,*б* для $\Delta = 1$. Для такого значения расстройки большинство атомов оказывается захваченным в ближайших к центру облака ямах оптического потенциала. Только небольшая часть атомов с начальными импульсами, превышающими потенциальный барьер, способна пролететь на значительное расстояние в отри-

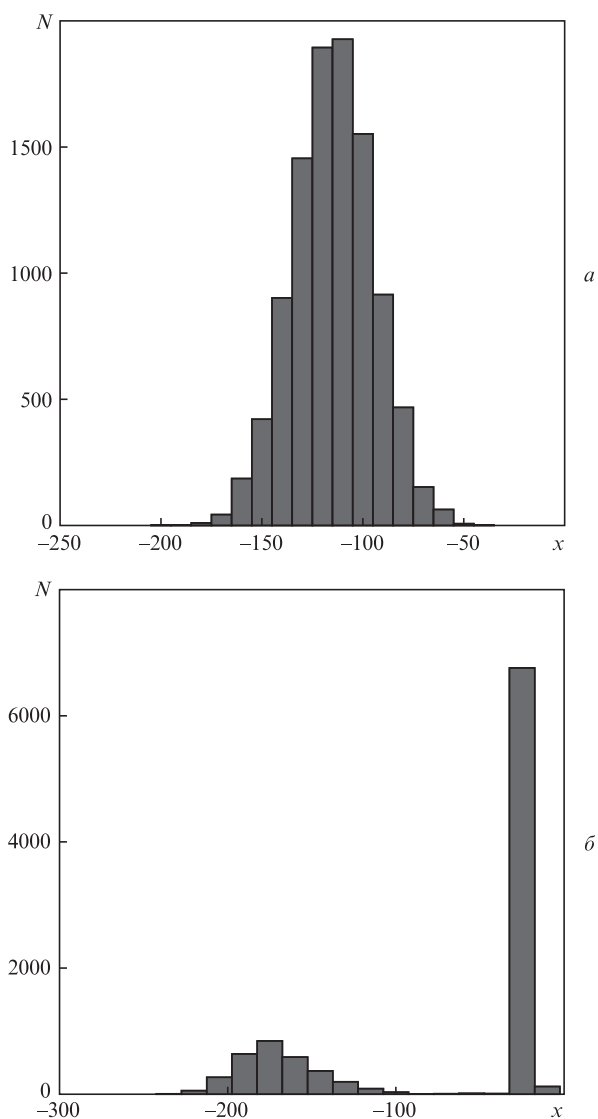


Рис.1. Гистограммы распределений атомов по координатам в фиксированный момент времени без учета СИ: баллистический полет атомов сквозь ССВ при точном резонансе ($\Delta = 0$) (*а*); пленение одной части атомного облака в ямах оптического потенциала и баллистический полет другой его части сквозь ССВ при $\Delta = 1$ (*б*).

цательном направлении оси x . Кроме того, вдали от резонанса падает эффективность возбуждения атомов лазерным полем. Подчеркнем, что как при точном резонансе, так и достаточно далеко от него все атомы начального облака в момент времени $\tau = 10^4$ имеют отрицательные значения координаты x .

При сравнительно малых расстройках движение атомов кардинально меняется. Из гистограмм на рис.2 следует, что значительная часть атомов для $\Delta = 0.15$ в результате нелинейного взаимодействия с ССВ изменила направление движения. В фиксированный момент времени $\tau = 10^4$ атомы облака имеют почти гауссово распределение по координатам в интервале от -150 до 100 , по импульсам – в интервале от -50 до 45 . Причиной изменения направления движения атомов является их хаотическое блуждание, которое в свою очередь обусловлено скачкообразным изменением компоненты электрического дипольного момента атома u при пересечении узлов ССВ. Как показано в работе [16], u псевдослучайно изменяется в диапазоне $[-1, 1]$ при пересечении каждого узла. Из уравнений движения (4) следует, что эти изменения вызывают соответствующие псевдослучайные изменения импульса атома при пересечении каждого узла. В резуль-

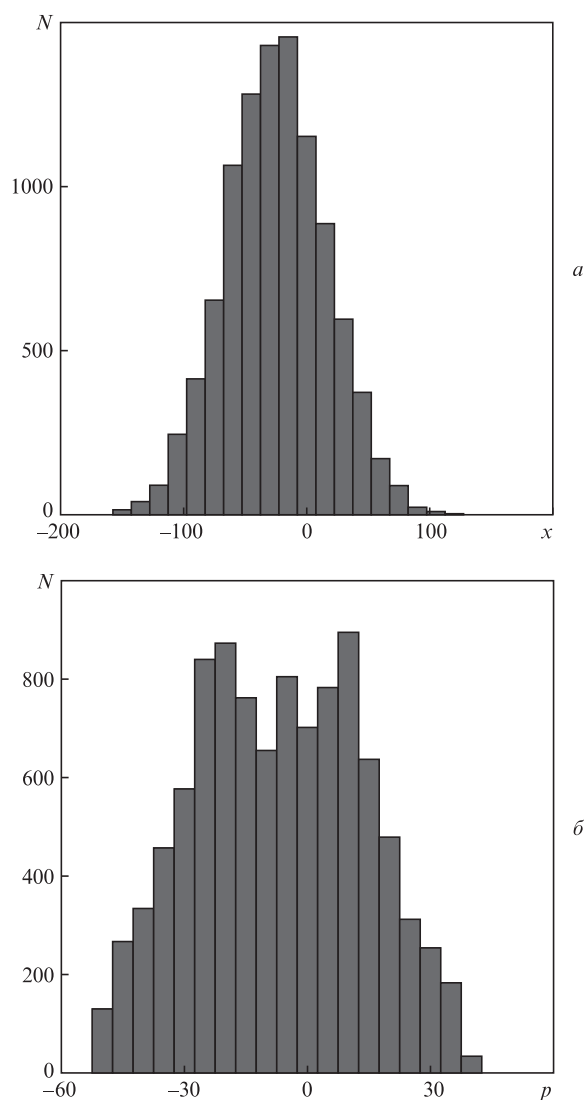


Рис.2. Хаотическое блуждание атомов в ССВ вблизи резонанса ($\Delta = 0.15$) без учета СИ. Гистограммы распределения атомов по координатам (*а*) и импульсам (*б*).

тате часть атомов со временем приобретает положительные значения импульсов, и атомное облако расщепляется.

Прямое вычисление максимального показателя Ляпунова по методу [25] дает величину 0.03 для $\Delta = 0.15$, подтверждая количественно факт хаотического движения атомов в смысле экспоненциальной чувствительности к малым изменениям начальных условий. Проще говоря, два атома с очень малым начальным различием своих положений в облаке со временем могут начать двигаться в противоположных направлениях. Скорость их разлета в среднем близка к экспоненциальной.

Из выражения для нормированной энергии атома (5) можно найти условие, при котором атом после пересечения m -го узла ССВ изменит знак p . Результат зависит от четности числа пересечений m . Атом продолжит движение в том же направлении, если $(-1)^{m+1}u_m < H$, и изменит направление движения на противоположное, если $(-1)^{m+1}u_m > H$. При точном равенстве, $(-1)^{m+1}u_m = H$, движение является сепаратрисоподобным. Хаотическое блуждание возможно, если энергия атома находится в диапазоне $0 < H < 1$. При $H < 0$ атомы не достигают даже ближайшего узла и захватываются ямой оптического потенциала, а при $H > 1$ значения u всегда соответствуют

движению в первоначальном направлении. Итак, если $|u| < H$, то атомы продолжают движение в том же направлении, а если $|u| > H$, то в зависимости от знака $\cos x$ на данном промежутке времени они либо продолжат движение в том же направлении, либо поменяют его на противоположное.

В реальности когерентная эволюция атомов лития при взаимодействии с лазерным полем вблизи резонанса прерывается актами СИ в случайные моменты времени. Атомный импульс в результате каждого такого акта изменяется на случайную величину из интервала $[-1, 1]$. Численное решение (2) осуществляется методом стохастической волновой функции (см., напр., [26, 27]) по следующему алгоритму. Время интегрирования разбивается на большое число малых интервалов $\Delta\tau = 10^{-5}$. Генератор случайных чисел выбирает число ϵ_1 из интервала $[0, 1]$. В конце первого интервала времени $\tau = \tau_1$ вероятность СИ атома вычисляется по формуле

$$s_1 = \gamma\Delta\tau |a_{\tau_1}|^2 / (|a_{\tau_1}|^2 + |b_{\tau_1}|^2).$$

Далее, в зависимости от соотношения между числами ϵ_1 и s_1 возможны два случая.

1. Если $s_1 < \epsilon_1$, то продолжается интегрирование уравнений (2) на следующем временном интервале. Поскольку когерентная эволюция происходит с уменьшением нормы волновой функции, то вектор состояния нужно перенормировать сразу по окончании первого интервала при $\tau = \tau_1^+$:

$$a_{\tau_1^+} = a_{\tau_1} / \sqrt{|a_{\tau_1}|^2 + |b_{\tau_1}|^2}, \quad b_{\tau_1^+} = b_{\tau_1} / \sqrt{|a_{\tau_1}|^2 + |b_{\tau_1}|^2}.$$

Эта когерентная эволюция с уменьшением нормы волновой функции описывает непрерывную релаксацию атомного дипольного момента.

2. Если $s_1 \geq \epsilon_1$, то происходит СИ, и атом оказывается в основном состоянии в момент времени $\tau = \tau_1$: $A_{\tau_1} = \alpha_{\tau_1} = \beta_{\tau_1} = 0$, $B_{\tau_1} = 1$, а его импульс скачком меняется: $p_{\tau_1} = p_{\tau_1^-} + l$, где l – случайное число из интервала $[-1, 1]$, описывающее изменение атомного импульса в результате СИ фотона (эффект отдачи). Процедура повторяется на следующих временных интервалах.

Главный результат численного моделирования с учетом СИ состоит в том, что оно значительно облегчает наблюдение эффекта хаотического блуждания в реальном эксперименте. Из сравнения рис.2,*a* (без учета СИ) с рис.3,*a* (с учетом СИ) следует, что в последнем случае наблюдается не просто увеличение размера первоначального облака атомов, но и его расщепление с увеличением длин полета атомов как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси x . Часть атомного облака движется в положительном направлении оси x , смещаясь ко времени $\tau = 10^4$ на расстояние до $x \approx 1000$. При выбранных значениях параметров это соответствует для атомов лития смещению на $x = 100$ мкм за 10^{-5} с, что можно обнаружить в реальном эксперименте. Распределение атомов по импульсам с учетом СИ также имеет двугорбый вид (см. рис.3,*b*) со значениями импульсов на порядок больше, чем у когерентно эволюционирующих атомов (см. рис.2,*b*). Для сравнения на рис.4 показаны гистограммы распределений атомов по координатам с учетом СИ при точном резонансе (рис.4,*a*) и вдали от резонанса (рис.4,*b*), на которых координаты всех атомов отрицательны. Отличие от рис.3,*a* очевидно.

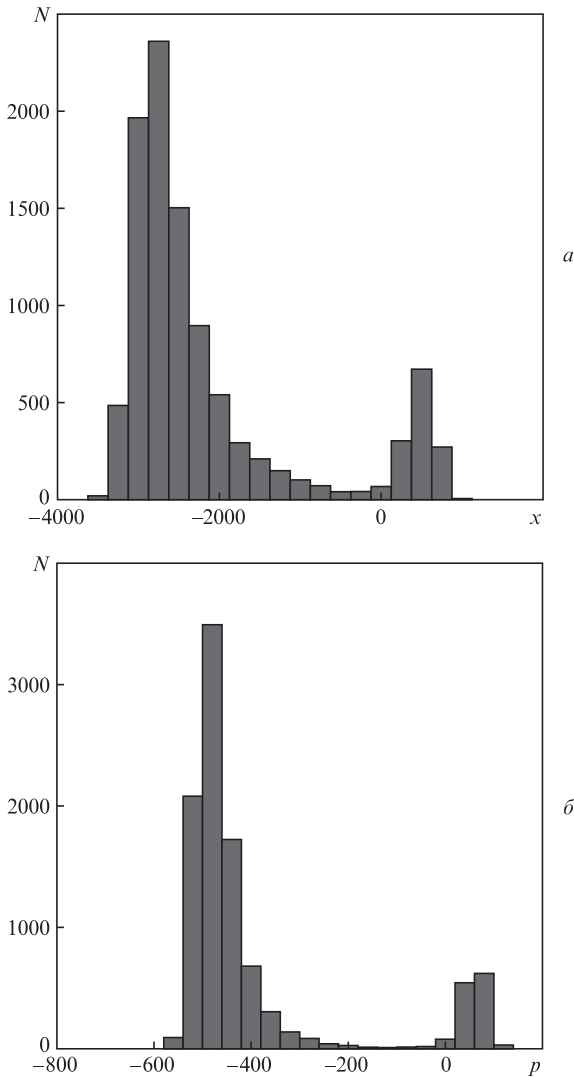


Рис.3. Хаотическое блуждание атомов с учетом СИ вблизи резонанса ($\Delta = 0.15$). Гистограммы распределений атомов по координатам (*a*) и импульсам (*b*).

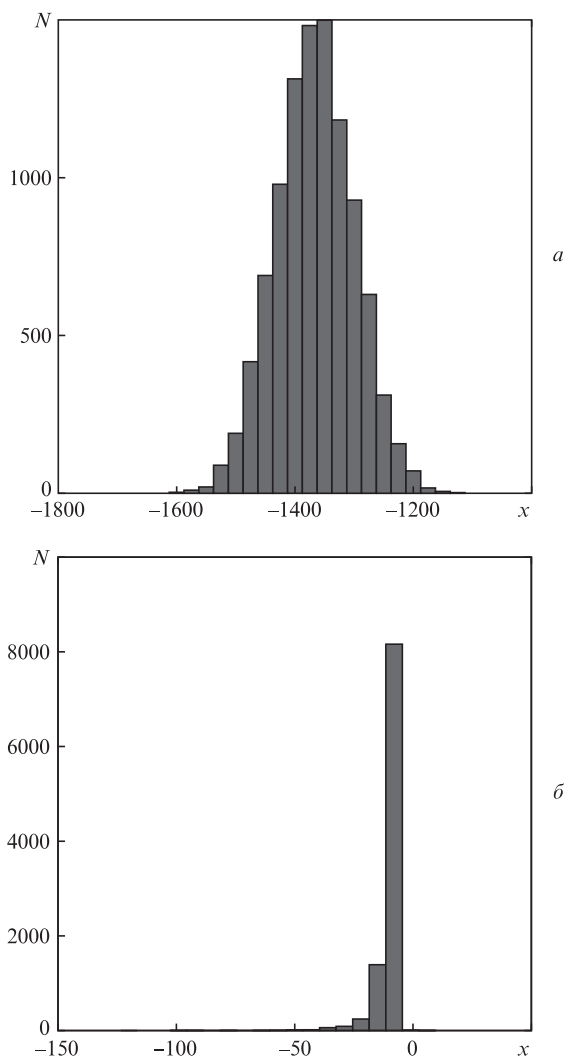


Рис.4. То же, что и на рис.1, но с учетом СИ.

3. Заключение

В работе описан новый эффект, возникающий при взаимодействии холодных атомов с формирующими ССВ лазерными пучками. Теоретически и численно показано, что в определенном диапазоне расстроек резонанса атомы могут хаотически блуждать в жесткой ОР без какой-либо модуляции параметров решетки и дополнительного воздействия на атомы. Этот эффект детерминированно-го хаоса возникает вблизи оптического резонанса вслед-

ствие нелинейного взаимодействия электронной и механической степеней свободы атома, в результате которого каждый раз при пересечении атомом узла ССВ происходит скачкообразное и псевдослучайное изменение величины атомного дипольного момента с соответствующим изменением импульса атома. Благодаря этому часть атомов из начального облака со временем меняет направление движения на противоположное, что приводит к расщеплению атомного облака, которое можно зафиксировать в реальном эксперименте. Численные эксперименты с атомами лития-6 с учетом СИ показали, что, варьируя интенсивность излучения лазера, можно в реальном эксперименте создавать различные режимы движения атомов в ОР – от баллистического полета до хаотического блуждания.

Работа выполнена по госбюджетной тематике ТОИ ДВО РАН (проект №01201363045).

1. Казанцев А.П., Сурдутович Г.И., Яковлев В.П. *Механическое действие света на атомы* (М.: Наука, 1991).
2. Minogin V.G., Letokhov V.S. *Laser Light Pressure on Atoms* (New York: Gordon and Breach, 1987).
3. Аскарьян Г. А. *ЖЭТФ*, **20**, 1567 (1962).
4. Летохов В.С. *Письма в ЖЭТФ*, **7**, 348 (1968).
5. Moore F.L., Robinson J.C., Bharucha C., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 2974 (1994).
6. Moore F.L., Robinson J.C., Bharucha C., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4598 (1995).
7. Steck D.A., Oskay W.H., Raizen M. *Science*, **293**, 274 (2001).
8. Hensinger W.K., Heckenberg N.R., Milburn G.J., Rubinsztein-Dunlop H. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **5**, 83 (2003).
9. Graham R., Schlautmann M., Zoller P. *Phys. Rev. A*, **45**, 19 (1992).
10. Коньков Л.Е., Пранц С.В. *Письма в ЖЭТФ*, **65**, 801 (1997).
11. Prants S.V. *Phys. Lett. A*, **33**, 225 (1997).
12. Prants S.V., Kon'kov L.E., Kiriluyk I. *Phys. Rev. E*, **60**, 335 (1999).
13. Prants S.V., Sirotkin V.Yu. *Phys. Rev. A*, **64**, 033412 (2001).
14. Аргонов В.Ю., Пранц С.В. *ЖЭТФ*, **123**, 946 (2003).
15. Prants S.V., Uleysky M.Yu., Argonov V.Yu. *Phys. Rev. A*, **73**, 023807 (2006).
16. Argonov V.Yu., Prants S.V. *Phys. Rev. A*, **75**, 063428 (2007).
17. Пранц С.В., Коньков Л.Е. *Письма в ЖЭТФ*, **73**, 4 (2001).
18. Argonov V.Yu., Prants S.V. *J. Russ. Laser Res.*, **27**, 360 (2006).
19. Пранц С.В. *ЖЭТФ*, **136**, 872 (2009).
20. Prants S.V. *Chaos, Solitons & Fractals*, **43**, 1 (2010).
21. Horsley E., Koppell S., Reichl L.E. *Phys. Rev. E*, **89**, 012917 (2014).
22. Boretz Y., Reichl L.E. *Phys. Rev. E*, **91**, 042901 (2015).
23. Argonov V.Yu., Prants S.V. *Phys. Rev. A*, **71**, 053408 (2005).
24. Argonov V.Yu., Prants S.V. *Phys. Rev. A*, **78**, 043413 (2008).
25. Kon'kov L.E., Prants S.V. *J. Math. Phys.*, **37**, 1204 (1996).
26. Carmichael H. *An Open Systems Approach to Quantum Optics* (Berlin: Springer-Verlag, 1993).
27. Molmer K., Castin Y., Dalibard J. *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, 524 (1993).