

# Измерение дрожания изображения протяженного некогерентного источника излучения

В.П.Лукин, В.В.Носов

*Представлена схема работы измерителя дрожания изображения, использующего в качестве источника излучения протяженный некогерентный источник. Аналитически и численно проанализирована эффективность работы такой схемы измерителя, в том числе для обоснования функционирования адаптивной оптической системы, не требующей специального создания или формирования опорного источника. Рассмотрены особенности формируемого изображения некогерентного излучения, в частности с точки зрения возможности его применения с целью измерения фазовых флуктуаций оптических волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере (при этом адаптивная система следит за изображением самосветящегося или подсвеченного посторонними источниками объекта). Показана возможность применения корреляционного датчика Шака–Гартмана для работы в адаптивных системах, использующих изображение произвольного объекта (или его фрагмента) в качестве опорного источника.*

**Ключевые слова:** коррекция, опорный источник, изображение, фаза, когерентность.

## 1. Введение

Проблема переноса оптического излучения через среду (атмосферу) возникает в ряде практических приложений, например при доставке энергии с помощью лазерного излучения. Серьезным препятствием, ограничивающим предельно достижимые характеристики и возможности астрономических телескопов и других оптико-электронных систем (ОЭС) [1, 2], строящих изображение, становятся неоднородности среды, в том числе атмосферная турбулентность. Известно, что применение систем адаптивной оптики (АО) позволяет существенно снизить эти ограничения [3–5]. Однако при практическом применении алгоритмов и систем АО необходима текущая информация о флуктуациях характеристик оптической волны. Эта информация может быть получена, в том числе, с помощью дополнительных (опорных) источников, обеспечивающих возможность измерения искажений в канале распространения излучения [6–8].

## 2. Опорный источник как элемент системы АО

Поясним, что такое опорный источник. С одной стороны, в теории систем АО [6] этот элемент традиционно считается некой моделью, позволяющей оценить предельные возможности коррекции с помощью системы АО, а с другой стороны, он обеспечивает реальный сценарий работы ОЭС с применением АО. Таким образом, опорный источник обеспечивает моделирование работы системы АО в полном объеме. История развития самой

адаптивной оптики неразрывно связана, в том числе, и с развитием взглядов на применение опорных источников в различных ОЭС [9, 10]. Особенно ярко это проявилось в астрономических приложениях систем АО при применении так называемых лазерных опорных звезд. Отметим, что начатый в последнее время фактический пересмотр (см. [11]) истории развития взглядов на применение опорных источников в астрономии – лазерных опорных звезд (опорных источников, формируемых с помощью лазерного излучения) – делает невозможным определение реального вклада работ того или иного автора.

Все работы в США по формированию опорных звезд с помощью лазерного излучения изначально были засекречены, и первые открытые работы появились только в начале 1993 г. Такой первой публикацией следует считать тематический выпуск журнала Линкольнской лаборатории [12]. Других открытых публикаций в США к этому времени не было, и в этом можно убедиться, например, если ознакомиться с программой и текстами докладов на известной конференции Scintillation (Сизтл, США, 3–7 августа 1992 г.) [13]. В то же время были многочисленные открытые публикации советских авторов, в частности по исследованию особенностей флуктуаций фазы и интенсивности оптических волн при двойном прохождении через турбулентность. Подробный научный анализ этой проблемы и первых работ, которые, по сути, и привели к созданию техники лазерных опорных звезд, был дан в монографии [10] (см. гл. 5). Первой открытой западной публикацией по использованию лазерных опорных звезд следует считать работу французских авторов 1985 г. [14].

Уже в первых работах [7, 9, 10] по применению специально создаваемых опорных источников указывалась возможность применения для этого отраженных волн. При этом, например, в качестве такого опорного излучения может выступать излучение, отраженное от самого объекта, на который необходимо фокусировать когерентное лазерное излучение. Возможна ситуация, когда для обеспечения работы датчика волнового фронта си-

В.П.Лукин, В.В.Носов. Институт оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН, Россия, 634021 Томск, пл. Акад. Зуева, 1;  
e-mail: lukin@iao.ru, nosov@iao.ru

Поступила в редакцию 10 марта 2017 г., после доработки – 12 апреля 2017 г.

стемы АО используется опорное излучение, создаваемое «подсвечиванием» объекта пучком излучения от какого-либо дополнительного источника [15–21]. При этом «подсвечивание» может быть как когерентным, так и некогерентным. Методы определения фазы и по когерентному и по некогерентному опорному излучению уже описаны в научной литературе [7, 22, 23].

### 3. Расчет интенсивности изображения для некогерентного источника излучения

В настоящей работе выполнен расчет распределения средней интенсивности в плоскости изображения некогерентного объекта, который формируется ОЭС. Пространство между некогерентным источником излучения и приемной апертурой оптической системы заполнено турбулентной атмосферой, искажающей формируемое изображение.

Для борьбы с турбулентными искажениями применяется система АО, использующая сигнал от опорного источника. В нашем случае в качестве опорного источника предлагается использовать изображение самого протяженного объекта. Воспользовавшись результатами работ [18, 21], запишем мгновенное распределение интенсивности изображения для протяженного источника некогерентного излучения, формируемого через турбулентную среду, в приближении обобщенного метода Гюйгенса–Кирхгофа [2]:

$$\begin{aligned} \gamma(X_{\text{im}}, \rho) = & \frac{1}{X^2 X_{\text{im}}^2} \iint d^2 r_1 I_{\text{об}}(X, r_1) \iint d^4 \rho_{1,2} \exp(-ik\rho_1^2/2f \\ & + ik\rho_2^2/2f) W(\rho_1) W^*(\rho_2) \exp\{ik|\rho - \rho_1|^2/2X_{\text{im}} \\ & - ik|\rho - \rho_2|^2/2X_{\text{im}} + ik|r_1 - \rho_1|^2/2X - ik|r_1 - \rho_2|^2/2X\} \\ & \times \exp\{i[S(X, r_1; 0, \rho_1) - S(X, r_1; 0, \rho_2)]\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $X$  – длина атмосферной трассы между объектом и ОЭС;  $f$  – фокусное расстояние приемного устройства ОЭС, строящего изображение протяженного объекта-источника;  $X_{\text{im}}$  – расстояние от приемной апертуры ОЭС до плоскости изображения;  $I_{\text{об}}(X, r)$  – распределение яркости объекта-источника;  $W(\rho)$  – функция зрачка приемного объектива системы;  $S(X, r_1; 0, \rho_1)$  – фазовые флуктуации, обусловленные действием турбулентности;  $k$  – волновое число.

Анализ выражения (1) будем проводить в так называемой сопряженной плоскости, т. е. в той, для которой верно приближение «тонкой» линзы:

$$1/f = 1/X_{\text{im}} + 1/X. \quad (2)$$

Тогда из выражения (1) получим

$$\begin{aligned} \gamma(X_{\text{im}}, \rho) = & \frac{1}{X^2 X_{\text{im}}^2} \iint d^2 r_1 I_{\text{об}}(X, r_1) \iint d^4 \rho_{1,2} W(\rho_1) W^*(\rho_2) \\ & \times \exp[-ikr_1(\rho_1 - \rho_2)/X] \exp\{-ik\rho(\rho_1 - \rho_2)/X_{\text{im}}\} \\ & + i[S(X, r_1; 0, \rho_1) - S(X, r_1; 0, \rho_2)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для получения выражения (3) в [18, 21] было использовано приближение дельта-коррелированности для функции когерентности исходного излучения. Далее рассмотрим некоторые особенности изображения (3), формируемого некогерентным излучением, в частности возможность его применения для измерения фазовых флуктуаций оптических волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере.

### 4. Формулировка теоремы Эренфеста для атмосферно-оптических систем

В известных работах [24, 25] было показано, что задачи рефракции оптического излучения в атмосферно-оптических системах практически сводятся к вычислению различных функционалов от величины  $\nabla_{\rho} \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0}$ , где

$$\gamma(x, \mathbf{R}, \rho) = U(x, \mathbf{R} + \rho/2) U^*(x, \mathbf{R} - \rho/2); \quad (4)$$

$\gamma(x, \mathbf{R}, 0) = I(x, \mathbf{R})$ ;  $U(x, \rho)$  – амплитуда оптического поля, интенсивность которого дается выражением (3).

Такую часто измеряемую характеристику, как вектор смещения энергетического центра тяжести оптического излучения, формируемого в фокальной плоскости приемного устройства, можно представить следующим образом [25]:

$$\rho_t = -\frac{i\lambda F_t}{2\pi c_t} \int d^2 R T(\mathbf{R}) \nabla_{\rho} \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0}, \quad (5)$$

где  $c_t = \int d^2 R T(\mathbf{R}) \gamma(x, \mathbf{R}, 0)$ ;  $T(\mathbf{R})$  – коэффициент пропускания по интенсивности оптики приемного устройства, строящего изображение (телескопа);  $F_t$  – фокальное расстояние приемного устройства (телескопа).

Как известно из [2, 25], соотношение

$$\nabla_{\rho} \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0} = iI(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) \quad (6)$$

связывает поле оптической волны  $U(x, \rho)$  с ее фазой  $S$  и интенсивностью  $I$ . Это соотношение легко доказывается дифференцированием функции  $\gamma(x, \mathbf{R}, \rho)$ . Следует отметить, что, строго говоря, операцию дифференцирования функции  $\gamma(x, \mathbf{R}, \rho)$  можно выполнять только в том случае, когда фаза волны является гладкой аналитической функцией. Тогда в выражении (5) для вектора  $\rho_t$  после дифференцирования под интегралом можно перейти к пределу  $\rho \rightarrow 0$ . Именно такую фазу  $S$  и называют аналитической.

### 5. Сингулярная фаза оптической волны и ее регуляризация. Основные соотношения

В некоторых режимах распространения волны ее фаза сильно «разрушается» и становится не аналитической, а сингулярной [25] функцией. Эти случаи обычно характеризуются малым радиусом  $\rho_{\text{coh}}$  пространственной когерентности поля. Если  $\rho_{\text{coh}}$  значительно меньше эффективного радиуса самого пучка, ширина функции когерентности второго порядка  $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \langle \gamma(x, \mathbf{R}, \rho) \rangle$  по разностной координате  $\rho$  совпадает с  $\rho_{\text{coh}}$ , т. к.  $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) \approx \exp(-\rho^2/\rho_{\text{coh}}^2)$ . Поэтому при  $\rho_{\text{coh}} \rightarrow 0$  можно полагать, что  $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) \approx \exp(-\rho^2/\rho_{\text{coh}}^2) \rightarrow \delta(\bar{\rho})$  (здесь  $\delta(\bar{\rho})$  – дельта-функция). Далее можно показать, что поскольку среднее значение  $\gamma(x, \mathbf{R}, \rho)$  совпадает с функцией когерентности,

то приближенно  $\gamma(x, \mathbf{R}, \rho) \approx \delta(\rho)$ . Следовательно, для малых радиусов когерентности поля (что верно для случая формирования излучения от некогерентного объекта) при вычислении  $\nabla_\rho \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0}$  возникает неопределенность сингулярного типа, а именно:

$$\nabla_\rho \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0} = \nabla_\rho \delta(\rho)|_{\rho=0} = \nabla_\rho \delta^2(\rho).$$

В ситуациях, когда реализуется последнее соотношение, фазу световой волны можно назвать сингулярной. Следовательно, требуется устранение сингулярности, или регуляризация.

Регуляризация необходима при описании некогерентного источника и сфокусированного пучка, а также в области сильного турбулентного уширения пучка. Наиболее простым способом регуляризации в случае сингулярностей фазы является изменение порядка перехода к пределам. Для этого исходное поле, которое описывается уже сингулярной функцией  $\gamma(x, \mathbf{R}, \rho)$ , необходимо представить в виде суперпозиции элементарных пучков с аналитической фазой [25]. Предельный переход в этой суперпозиции (сумме) по некоторому выбранному параметру должен обеспечивать близость суперпозиции этих элементарных пучков к исходному сингулярному пучку. Для каждого такого элементарного пучка величина  $\nabla_\rho \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0}$  уже не является сингулярной, и порядок перехода к пределам можно изменить:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \nabla_\rho \gamma(x, \mathbf{R}, \rho) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \nabla_\rho \gamma_k(x, \mathbf{R}, \rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \nabla_\rho \gamma_k(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0}. \end{aligned} \quad (7)$$

На примере случайных смещений изображения оптического источника покажем, как можно выполнить регуляризацию сингулярной фазы. Для этого представим исходное поле, которое будем называть сингулярным пучком, в виде суммы элементарных пучков с аналитической фазой. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_\rho \gamma(x, \mathbf{R}, \rho)|_{\rho=0} &= i \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N I_k(x, \mathbf{R}) \nabla_R S_k(x, \mathbf{R}), \\ \gamma(x, \mathbf{R}, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N I_k(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $I_k(x, \mathbf{R})$  и  $S_k(x, \mathbf{R})$  – интенсивность и фаза элементарного пучка с номером  $k$  соответственно.

Рассмотрим более подробно случайную составляющую  $\rho'_i$  вектора смещения координат центра тяжести изображения  $\rho_i$ , соответствующую случайной составляющей фазы  $S'_k(x, \mathbf{R})$ :

$$\begin{aligned} \rho'_i &= \frac{\lambda F_i}{2\pi p} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int d^2 R T(\mathbf{R}) I_k(x, \mathbf{R}) \nabla_R S'_k(x, \mathbf{R}), \\ p &= \int d^2 R T(\mathbf{R}) \gamma_k(x, \mathbf{R}, 0). \end{aligned} \quad (9)$$

В выражении (9) расчеты выполняются для элементарного пучка, несущего случайный поток энергии  $p$ .

Далее в (9) воспользуемся лучевым приближением, поскольку известно [2, 25], что оно хорошо описывает дрожание изображения. В лучевом приближении интенсивности  $I_k(x, \mathbf{R})$  можно заменить их средними значения-

ми, т.е.  $\langle I_k(x, \mathbf{R}) \rangle$ . Такая замена производится как в числителе, так и в знаменателе выражения (9). Это означает, что случайный поток  $p$  для элементарного пучка в знаменателе (9) также заменяется его средним значением  $\langle p \rangle$ . Известно, что в лучевом приближении случайная фаза волны  $S'$  представляется [2] геометрооптическим приближением с интегрированием вдоль траектории среднего луча в пучке. Тогда для средней интенсивности любого элементарного пучка (т.е. при всех значениях  $k$ ) имеем

$$\langle I_k(x, \rho) \rangle = \langle I_{\text{eff}}(x, \rho - \rho_{k0}(1 - x/x^*)) \rangle, \quad (10)$$

$$\langle I_{\text{eff}}(x, \rho) \rangle = \frac{I_0 a_{\text{eff}}^2(0)}{a_{\text{eff}}^2(x)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{a_{\text{eff}}^2(x)}\right],$$

где  $a_{\text{eff}}(x)$  – эффективный (средний) радиус элементарного пучка.

В плоскости излучения ( $x = 0$ ) ось такого элементарного пучка находится на расстоянии  $\rho_{k0}$  от оси  $X$  и пересекает эту ось при  $x = x^*$ . Точка пересечения лежит на положительной полуоси  $X$ , если  $x^* > 0$ , и на отрицательной при  $x^* < 0$ . Далее все элементарные пучки для простоты считаем одинаковыми. Они отличаются друг от друга только положением своих осей, задаваемым вектором  $\rho_{k0}$ , в начальной плоскости. В лучевом приближении случайная фаза волны  $S'_k$  представляется геометрооптическим приближением с интегрированием вдоль траектории среднего луча  $P'(x', x, \rho)$  отклонения случайной диэлектрической проницаемости среды от единицы, т.е. величины  $\varepsilon_1 = \varepsilon - 1$ . Тогда случайная фаза элементарного пучка с номером  $k$  выглядит следующим образом:

$$S'_k(x, \rho) = \frac{\pi}{\lambda} \int_0^x dx' \varepsilon_1(x', P_k(x', x, \rho)), \quad (11)$$

где

$$P_k(x', x, \rho) = \rho_{0k} f(x', x) + \rho l_{\text{eff}}(x', x); \quad P_k(x, x, \rho) = \rho;$$

$$f(x', x) = 1 - l_{\text{eff}}(x', x) + (x/x^*) [l_{\text{eff}}(x', x) - x'/x];$$

$$f(x, x) = 0; \quad l_{\text{eff}}(x', x) = a_{\text{eff}}(x')/a_{\text{eff}}(x).$$

Выбранные таким способом (по формулам (9) и (10)) величины  $\langle I_k(x, \rho) \rangle$  и  $S'_k(x, \rho)$  позволяют в качестве суперпозиции рассматривать сумму одинаковых элементарных пучков, оси которых пересекают ось  $X$  в точке  $x = x^*$ , но в начальной плоскости  $x = 0$  находятся от нее на различных расстояниях  $\rho_{k0}$ .

Переходя к интегралам, с использованием гауссова профиля для коэффициента пропускания приемника вида  $T(\mathbf{R}) = T_0 \exp(-R^2/a_t^2)$ , получаем из (9) регуляризованное представление для  $\rho'_i$ :

$$\rho'_i = \frac{F_i}{2P} \int_0^x dx' l_{\text{eff}}(x', x) \int d^2 R \nabla_\perp \varepsilon_1(x', \mathbf{R}) \langle I(x', x, \mathbf{R}) \rangle, \quad (12)$$

где

$$\langle I(x', x, \mathbf{R}) \rangle = I_0 \frac{a_R^2(x, x)}{a_R^2(x', x)} \exp(-R^2/a_R^2(x', x));$$

$$\begin{aligned}
P &= I_0 \pi a_R^2(x, x) = I_0 \pi a_1^2(x); \quad a_R^2(x', x) = [a_1^2 a_{\Sigma}^2(x')] \\
&+ a_{\text{eff}}^2(x) a^{*2} f^2(x', x) / [a_1^2 + a_{\Sigma}^2(x)]; \quad a_{\Sigma}^2(x) = a_{\text{eff}}^2(x) \\
&+ a^{*2} (1 - x/x^*)^2; \quad a_R^2(x, x) = a_1^2 a_{\Sigma}^2(x) / [a_1^2 + a_{\Sigma}^2(x)] \\
&= a_1^2(x); \quad a_1^{-2}(x) = a_1^{-2} + a_{\Sigma}^{-2}(x);
\end{aligned}$$

$T_0 = \text{const}$ ;  $a_1$  – радиус приемного телескопа;  $a^*$  – радиус некогерентного источника;  $a_{\Sigma}(x)$  – эффективный радиус составного пучка, являющегося суммой элементарных пучков с аналитической фазой.

В итоге получаем выражение (12), по форме совпадающее с представлением вектора  $\rho'_i$  для случая, когда фаза аналитическая и регуляризации не требуется, а именно с его следующим видом:

$$\begin{aligned}
\rho'_i &= \frac{F_i}{k \langle P \rangle} \int d^2 \rho T(\rho) \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle \nabla_{\rho} S'(x, \rho) \\
&= \frac{F_i}{k P_1} \int_0^x dx' l(x', x) \int d^2 R \nabla_{\perp} \varepsilon_1(x', \mathbf{R}) \langle I_1(x', x, \mathbf{R}) \rangle, \quad (13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
l(x', x) &= a_{\text{eff}}(x') / a_{\text{eff}}(x); \quad \langle I(x, x', \mathbf{R}) \rangle = I_0 \frac{a_1^2(x, x)}{a_1^2(x', x)} \\
&\times \exp\left(\frac{-R^2}{a_1^2(x', x)}\right); \quad P_1 = I_0 \pi a_1^2(x, x) = I_0 \pi a_0^2(x);
\end{aligned}$$

$$a_1^2(x', x) = a_1^2 a_{\text{eff}}^2(x') / [a_1^2 + a_{\text{eff}}^2(x')] = a_0^2(x) l^2(x', x);$$

$$a_0^{-2}(x) = a_{\text{eff}}^{-2}(x) + a_1^{-2}.$$

Таким образом, сингулярный некогерентный пучок радиусом  $a$  легко аппроксимируется суммой элементарных пучков, распространяющихся из начальной плоскости  $x = 0$ , каждый из которых имеет начальный радиус, равный радиусу когерентности исходного некогерентного сингулярного пучка ( $a_{\text{eff}}(0) = \rho_k \rightarrow 0$ ). В этом случае в (12) можно принять, что  $a = a^*$  и оси всех элементарных пучков параллельны ( $x^* \rightarrow \infty$ ). Сильная дифракционная расходимость приводит к тому, что радиус элементарного пучка в конце трассы значительно больше, чем в начале,  $a_{\text{eff}}(x) \gg a^*$ . Поэтому далее в выражениях (12), (13) можно положить

$$l^2(x', x) = x'/x, \quad a_{\Sigma}^2(x) = a_{\text{eff}}^2(x), \quad (14)$$

$$a_1^2(x', x) = (x'/x) a_1^2 + a_1^2(x) + (1 - x'/x)^2 a^2.$$

## 6. Дрожание изображений протяженных некогерентных астрономических источников

Используя представление (13) энергетического центра тяжести (вектор  $\rho'_i$ ), можно вычислить взаимную корреляционную функцию  $B(\rho'_{i1}, \rho'_{i2}) = \langle \rho'_{i1} \rho'_{i2} \rangle$  двух таких векторов,  $\rho'_{i1}$  и  $\rho'_{i2}$ . Далее в расчетах используем модель

спектра турбулентности, учитывающую конечность внешнего масштаба турбулентности [2, 9, 24]:

$$\Phi_n(\kappa, \xi) = A_0 C_n^2(\xi) \kappa^{-11/3} [1 - \exp(-\kappa^2 / \kappa_0^2(\xi))], \quad (15)$$

где  $C_n^2(\xi)$  – структурный параметр показателя преломления атмосферы;  $\kappa$  – волновое число;  $\kappa_0(\xi) = 2\pi/L_0(\xi)$ ;  $L_0(\xi)$  – внешний масштаб турбулентности атмосферы;  $A_0 = 0.033$ .

При этом турбулентная среда задается набором атмосферных профилей структурного параметра показателя преломления  $C_n^2(\xi)$  и внешнего масштаба турбулентности  $L_0(\xi)$ , которые являются функциями координат вдоль трассы распространения оптической волны.

Конкретизируем оптический сценарий: пусть используются два одинаковых приемных телескопа, разнесенных на расстояние  $\mathbf{R}$  в плоскости наблюдения, снабженных одинаковыми приборами, которые измеряют центр тяжести случайного смещения изображений вследствие турбулентности атмосферы. Эти телескопы нацелены на два одинаковых по размеру некогерентных источника излучения, разнесенных на расстояние  $\rho$  в исходной плоскости. Некогерентные источники и телескопы-приемники удалены друг от друга на расстояние  $x$ . Все пространство между исходной плоскостью и плоскостью наблюдения заполнено турбулентной средой. Исходя из такого сценария, в работах [24, 25] была рассчитана функция взаимной корреляции  $B(\rho'_{i1}, \rho'_{i2})$  случайных смещений  $\rho'_{i1}$  и  $\rho'_{i2}$  двух изображений некогерентных источников. Такая корреляционная функция в приближении «плоской Земли» [2] представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
B(\rho'_{i1}, \rho'_{i2}) &= B(x, \rho, \mathbf{R}) = 2^{7/6} \pi^2 A_0 \Gamma(1/6) F_1^2 \\
&\times \int_0^x dx' (1 - x'/x)^2 C_n^2(h_0 + x \cos \theta) \{ [a_1^2 (1 - x'/x)^2 \\
&+ a^{*2} (x/x)^2]^{-1/6} {}_1F_1 \left[ 1/6, 1; -\frac{[\mathbf{R}(1 - x'/x) + \rho(x'/x)]^2}{2[a_1^2 (1 - x'/x)^2 + a^{*2} (x/x)^2]} \right] \} \\
&- [a_1^2 (1 - x'/x)^2 + a^{*2} (x/x)^2 + 2\kappa_0^{-2} (h_0 + x' \cos \theta)]^{-1/6} \\
&\times {}_1F_1 \left[ 1/6, 1; -\frac{[\mathbf{R}(1 - x'/x) + \rho(x'/x)]^2}{2[a_1^2 (1 - x'/x)^2 + a^{*2} (x/x)^2 + 2\kappa_0^{-2} (h_0 + x' \cos \theta)]} \right], \quad (16)
\end{aligned}$$

где  ${}_1F_1$  – гипергеометрическая функция Гаусса;  $h_0$  – высота расположения телескопов-приемников над подстилающей поверхностью;  $\theta$  – зенитный угол центра между двумя некогерентными источниками;  $x$  – расстояние между плоскостью источников и плоскостью наблюдения.

Этот оптический сценарий измерений и формула (16) являются наиболее общими; возможны более простые ситуации. Так, если некогерентный источник только один и он наблюдается двумя приемниками, то  $\rho = 0$  и в формуле (16) переменным является только расстояние  $\mathbf{R}$  между двумя приемниками. Если же источника два и они наблюдаются одновременно только одним телескопом-приемником, то  $\mathbf{R} = 0$  и изменяется лишь расстояние  $\rho$  между двумя источниками. Для точечного источника (сферическая волна)  $a^* = 0$ , и мы получаем известное выражение для функции корреляции смещений изображений двух точечных источников, принимаемых каждый своим телеско-

пом. Используя выражение (16), можно выполнить расчеты для различных сценариев оптических наблюдений.

### 7. Расчет для астрономических трасс

Рассмотрим случай практического использования некогерентных астрономических источников и работу системы через всю толщу атмосферы. Этот случай реализуется, например, при использовании солнечных пятен для измерений дрожания изображения в фокальной плоскости солнечного телескопа. Измерения проводятся с помощью корреляционного датчика волнового фронта Шака–Гартмана. В этом случае в выражении (16) необходимо перейти к пределу  $x \rightarrow \infty$ . Введем два новых параметра:  $\alpha_0 = a^*/x$  – угловой радиус приемного телескопа и  $\beta_0 = \rho/x$  – угловое расстояние между двумя астрономическими протяженными некогерентными источниками. Также предположим, что атмосферная турбулентность описывается колмогоровской моделью, т. е.  $L_0(\xi) \rightarrow \infty$ , тогда

$$B(\mathbf{R}, \beta_0, \alpha_0) = 2^{7/6} A_0 \pi^2 \Gamma(1/6) F_t^2 \int_0^x dx' C_n^2(h_0 + x' \cos \theta) \times (a_t^2 + a_0^2 x'^2)^{-1/6} {}_1F_1 \left[ 1/6, 1; -\frac{(\mathbf{R} + \beta_0 x')^2}{2(a_t^2 + \alpha_0^2 x'^2)} \right], \quad (17)$$

где  $\sigma_t^2 = B(0, \beta_0, \alpha_0)$  – дисперсия дрожания изображения.

Далее приведем численные оценки взаимного дрожания двух изображений для одного протяженного некогерентного астрономического источника на наклонных трассах. Это могут быть два изображения одного и того же солнечного пятна, измеренного двумя пространственно разнесенными датчиками. Для датчика Шака–Гартмана это могут быть различные субапертуры одного и того же датчика. Нетрудно показать из (17), что при  $\beta_0 = 0$

$$B(\mathbf{R}, 0, \alpha_0) = 2^{7/6} A_0 \pi^2 \Gamma(1/6) F_t^2 \int_0^x dx' C_n^2(h_0 + x' \cos \theta) \times (a_t^2 + a_0^2 x'^2)^{-1/6} {}_1F_1 \left[ 1/6, 1; -\frac{R^2}{2(a_t^2 + \alpha_0^2 x'^2)} \right]. \quad (18)$$

Тогда все характеристики (18) становятся функциями одного обобщенного параметра  $a_0 h_{\text{eff}} \sec \theta / a_t$ . В численных расчетах воспользуемся известной обобщенной моделью вертикального профиля  $C_n^2(h)$  [2, 25]:

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0) (h/h_0)^{-2/3} \exp(-h/h_{\text{eff}}), \quad h \geq h_0, \quad (19)$$

где  $h_{\text{eff}}$  – эффективная толщина турбулентной атмосферы (для используемой модели  $h_{\text{eff}} \approx 3200$  м);  $h$  – текущая высота над подстилающей поверхностью.

На рис.1, 2 приведены результаты численных расчетов корреляционной функции и дисперсии. На рис.1 показана зависимость отношения  $\sigma_t^2$  к дисперсии дрожания сферической волны  $\sigma_{t,\text{sp}}^2 = B(x, 0, 0)$  от углового размера протяженного некогерентного источника  $\alpha_0$ . Видно, что для типичной модели турбулентности и при типичном размере измерительного телескопа  $\sim 15$  см отклонения от дрожания сферической волны не превысят 5%–10% для протяженного источника с размером не более 20 угл. с.

На рис.2 приведены зависимости коэффициента взаимной корреляции случайных смещений изображений

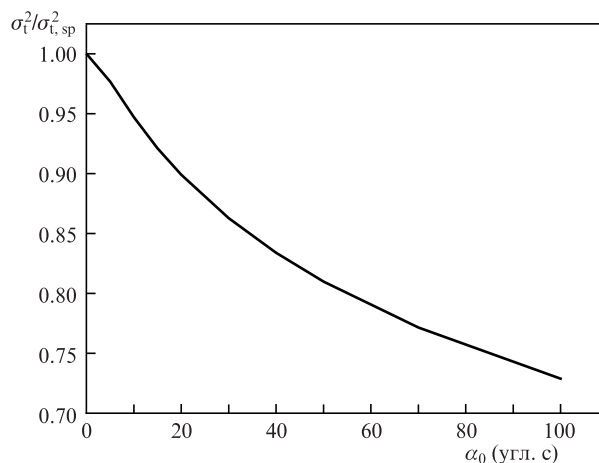


Рис.1. Зависимость отношения  $\sigma_t^2/\sigma_{t,\text{sp}}^2$  от углового размера астрономического протяженного источника  $\alpha_0$ . Здесь и на рис.2, 3  $h_{\text{eff}} = 3200$  м,  $h_0 = 6$  м,  $\theta = 45$  угл. град,  $a_t = 0.15$  м.

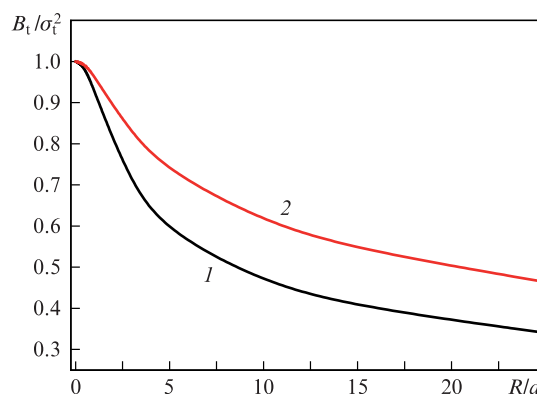


Рис.2. Зависимости коэффициента взаимной корреляции  $B_t/\sigma_t^2$  от нормированного расстояния между двумя приемниками  $R/a_t$  при  $\alpha_0 = 0$  (1) и 100 угл. с (2).

протяженного источника с угловым размером 100 угл. с и точечного источника от нормированного расстояния между двумя приемниками-телескопами. В частности обнаружено, что даже при  $R/a_t \sim 10$  корреляция для протяженного источника существенно отличается от таковой для предельного случая – точечного объекта.

### 8. Работа корреляционного датчика Шака–Гартмана в дифференциальном режиме

На основе результатов выполненных расчетов можно также оценить эффективность и правильность работы дифференциального измерителя турбулентности, использующего сигнал от датчика волнового фронта Шака–Гартмана. Речь идет о корреляционном датчике Шака–Гартмана, работающем в режиме дифференциального измерителя [26–28]. При этом дифференциальную схему образуют несколько пар субапертур датчика с различным разнесением. Использование такого датчика эквивалентно следующей схеме наблюдения: на астрономической трассе имеется некогерентный протяженный источник излучения с некоторым угловым размером. Таким объектом может быть солнечная пёра, солнечное пятно или край солнечного диска. Выделим в этом датчике две одинаковые приемные субапертуры, которые для простоты дальнейшего анализа будем считать гауссовыми. Тогда

можно воспользоваться результатами расчетов [25] для вертикальных и наклонных трасс, на которых турбулентность описывается колмогоровской моделью. Известно, что дифференциальный измеритель фактически оценивает средний квадрат разности случайных смещений (эффект дрожания) двух изображений, характеризующихся двумя векторами смещения центра тяжести,  $\rho'_{11}$  и  $\rho'_{12}$ , двух изображений, т.е. измеряет величину структурной функции случайного угла прихода  $D(\rho'_{11}, \rho'_{12}) = \langle [\rho'_{11} - \rho'_{12}]^2 \rangle$ . При этом усреднение  $\langle [\rho'_{11} - \rho'_{12}]^2 \rangle$  выполняется по ансамблю турбулентных флуктуаций.

Для дисперсии разности  $\langle [\rho'_{11} - \rho'_{12}]^2 \rangle$  легко получить из (18) выражение

$$D(\mathbf{R}, 0, \alpha_0) = 2^{13/6} A_0 \pi^2 \Gamma(1/6) F_t^2 \int_0^\infty dx' C_n^2(h_0 + x' \cos \theta) \times (a_t^2 + a_0^2 x'^2)^{-1/6} \left[ 1 - {}_1F_1\left(1/6, 1; -\frac{R^2}{2(a_t^2 + a_0^2 x'^2)}\right) \right], \quad (20)$$

которое можно анализировать с точки зрения влияния размера некогерентного протяженного источника на данные измерений, получаемых с помощью этого датчика. Чтобы максимально упростить анализ, рассмотрим случай вертикальных трасс, т.е.  $\theta = 0$ , и положим также  $h_0 = 0$ ; тогда

$$D(\mathbf{R}, 0, \alpha_0) = 2^{13/6} A_0 \pi^2 \Gamma(1/6) F_t^2 \int_0^\infty dh C_n^2(h) \times (a_t^2 + a_0^2 h^2)^{-1/6} \left[ 1 - {}_1F_1\left(1/6, 1; -\frac{R^2}{2(a_t^2 + a_0^2 h^2)}\right) \right]. \quad (21)$$

Для случая точечного опорного источника параметр  $\alpha_0 = 0$ , и из (21) получим

$$D(\mathbf{R}, 0, 0) = 2^{13/6} A_0 \pi^2 \Gamma(1/6) a_t^{-1/3} F_t^2 \int_0^\infty dh C_n^2(h) \times \left[ 1 - {}_1F_1\left(1/6, 1; -\frac{R^2}{2a_t^2}\right) \right]. \quad (22)$$

В последнем выражении имеются только два параметра – размер приемных апертур  $a_t$  и их взаимное разнесение  $R$ . Известно, что вырожденная гипергеометрическая функция Гаусса из (21), (22) обладает следующими свойствами:

для малых значений аргумента ( $R < a$ )

$${}_1F_1\left(1/6, 1; -\frac{R^2}{2a_t^2}\right) \approx 1 - \frac{R^2}{12a_t^2},$$

для больших значений аргумента ( $R > a$ )

$${}_1F_1\left(1/6, 1; -\frac{R^2}{2a_t^2}\right) \approx \frac{1}{\Gamma(5/6)} \left(\frac{R^2}{2a_t^2}\right)^{-1/6}.$$

Тогда для наиболее интересного для практики случая ( $R > a$ ) получаем из (22) выражение

$$D(\mathbf{R}, 0, 0) = 2^{13/6} A_0 \pi^2 \Gamma(1/6) a_t^{-1/3} F_t^2 \times \left[ 1 - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} \left(\frac{R}{a_t}\right)^{-1/3} \right] \int_0^\infty dh C_n^2(h). \quad (23)$$

Именно эту формулу используют практически все разработчики датчиков волнового фронта для проведения оценки радиуса Фрида. Однако нетрудно видеть, что для телескопа, использующего протяженные объекты на Солнце, применение этой формулы может привести к ошибке. Оценим ее. Для этого формулу (21) рассчитаем для случая большого разнесения субапертур:

$$D(\mathbf{R}, 0, \alpha_0) = 2^{13/6} A_0 \pi^2 \Gamma(1/6) F_t^2 \times a_t^{-1/3} \int_0^\infty dh C_n^2(h) \left[ \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{a_t^2} h^2\right)^{-1/6} - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} \left(\frac{R}{a_t}\right)^{-1/3} \right]. \quad (24)$$

Чтобы проводить сравнительный анализ дальше, необходимо ввести модель для вертикальной эволюции величины  $C_n^2(h)$ , а также для соотношения между  $R$  и  $\alpha_0$ . Самая упрощенная модель для  $C_n^2(h)$  – экспоненциальная, которая имеет следующий вид:

$$C_n^2(h) = C_n^2(0) \exp(-h/h_\xi), \quad (25)$$

где  $h_\xi$  – эффективная атмосферная толщина турбулентности.

При анализе такой модели фактически необходимо рассматривать соотношения между размерами приемников  $a_t$  и произведением  $\alpha_0 h_\xi$ . Отметим, что фактические значения интересующих нас параметров могут быть определены исходя из того, что размер  $a_t$  выбирается обычно  $\sim r_0$  (радиус Фрида). Тогда размер объекта на изображении Солнца должен быть ограничен следующим условием:

$$\alpha_0 < r_0/h_\xi. \quad (26)$$

В эксперименте эти два параметра, входящих в условие (26), легко оцениваются: если известен вертикальный профиль турбулентности, они вычисляются из первых моментов этого профиля:

$$r_0 \propto \left( \int_0^\infty dh C_n^2(h) \right)^{-3/5}, \quad h_\xi = \int_0^\infty dh h C_n^2(h) / \int_0^\infty dh C_n^2(h). \quad (27)$$

Однако, как показывает анализ различных схем введения систем АО в солнечные телескопы, не все разработчики аппаратуры обеспечивают на практике выполнение простого условия (26). Это, в свою очередь, приводит как к искажениям в работе созданного датчика волнового фронта, так и к ошибкам при оценке интегрального значения турбулентности, а следовательно, и радиуса Фрида.

Проведем расчеты этих возможных ошибок, для чего воспользуемся формулами (23) и (24). Приравняв их значения, получим соотношение

$$\int_0^\infty dh \hat{C}_n^2(h) \left[ 1 - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} \left(\frac{R}{a_t}\right)^{-1/3} \right] = \int_0^\infty dh C_n^2(h) \left[ \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{a_t^2} h^2\right)^{-1/6} - \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} \left(\frac{R}{a_t}\right)^{-1/3} \right]. \quad (28)$$

Здесь слева введено обозначение интегрального профиля  $\int_0^\infty dh \hat{C}_n^2(h)$ , измеренного с ошибкой ввиду использования предположения, что опорный объект точечный, а справа дана корректная оценка интегрального профиля турбулентности  $\int_0^\infty dh C_n^2(h)$ , полученная в предположении, что

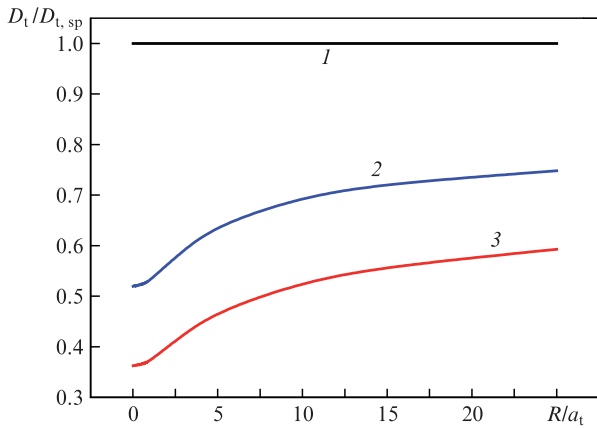


Рис.3. Зависимости отношения структурной функции смещений изображений изображения одного астрономического протяженного источника к структурной функции смещений изображений изображения сферической волны от нормированного расстояния между двумя приемниками  $R/a_t$  при  $\alpha_0 = 0$  (1), 40 (2), и 100 угл. с (3).

объект протяженный. Далее из (28) приближенно получаем, что это предположение приводит к занижению отношения

$$\int_0^\infty dh \hat{C}_n^2(h) / \int_0^\infty dh C_n^2(h) = \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{a_t^2} h_\xi^2\right)^{-1/6} \quad (29)$$

примерно в  $1 - 1/6(\alpha_0^2/a_t^2)h_\xi^2$  раз. Например, оценка при радиусе Фрида  $r_0 = 5$  см (для длины волны 0.55 мкм) и атмосферной толще турбулентности  $h_\xi = 1000 - 1500$  м дает, что при угловом размере опорного объекта на Солнце 3 и 5 угл. с занижение может составлять от 5% до 30%. А это, соответственно, будет завышать оценку радиуса Фрида. Формула (24) показывает, что корректная оценка интегрального профиля турбулентности, а следовательно, и радиуса Фрида может быть получена только при наличии информации о поведении интегрального профиля или моментов (27).

Подобные расчеты были также выполнены численно, с использованисм более реалистичной модели атмосферной турбулентности. На рис.3 приведены расчеты зависимости отношения структурной функции случайного смещения для работы дифференциального измерителя по объектам разного размера от нормированного расстояния между двумя приемниками.

Результаты эти расчетов позволяют получить полную информацию по выбору необходимого разнеса двух субапертур, чтобы гарантировать правильные измерения интегрального профиля турбулентности на вертикальной трассе.

### 9. Эксперимент для вертикальных (астрономических) трасс

Для проверки выводов теории нами были выполнены оптико-метеорологические измерения в Саянской солнечной обсерватории Института солнечно-земной физики СО РАН на автоматизированном горизонтальном солнечном телескопе [26]. Конструкция телескопа включает в себя целостатную установку, представляющую собой систему из двух плоских зеркал диаметром 800 мм, которая обеспечивает непрерывное слежение за Солнцем. Целостат направляет солнечный свет на главное сфериче-

ское зеркало диаметром 800 мм с фокусным расстоянием 18 м. Зеркало строит изображение Солнца на фотоприемнике. Измерялась дисперсия дрожания изображения  $\sigma_t^2$  края солнечного диска в зависимости от радиуса приемного зеркала  $a_t$ . В качестве измерителя дрожания изображения использовался фотоэлектрический датчик Брандта, который прошел успешную апробацию в течение нескольких десятков лет и применялся ранее в аналогичных исследованиях в России и за рубежом.

Одновременно с оптическими измерениями состояние атмосферы контролировалось мобильной ультразвуковой метеосистемой «Метео-3М». Основные усредненные параметры экспериментов: зенитный угол наблюдаемого объекта  $\theta \approx 60^\circ$ ; структурная характеристика флуктуаций показателя преломления на высоте 4.5 м от подстилающей поверхности  $C_n^2 = 1.7 \times 10^{-15} \text{ см}^{-2/3}$ ; средняя скорость приземного ветра 6 м/с; угловой размер  $\alpha_0$  астрономического некогерентного источника (край солнечного диска), соответствующий угловому разрешению используемого приемника, изменялся от 0.1 до 1.5 угл. с.

Результаты астрономических и параллельных метеорологических измерений показали (рис.4), что когда в атмосфере регистрируется когерентная турбулентность (спектр флуктуаций температуры  $W_T \sim f^{-8/3}$ ) [26], то наши данные совпадают с когерентной теорией ( $\sigma_\alpha \approx \text{const}$ , светлые точки и линия 3 на рис.4). В случае некогерентной колмогоровской турбулентности ( $W_T \sim f^{-5/3}$ ) наши результаты для точечного источника ( $\alpha_0 = 0.1$  угл. с) совпадают с традиционной колмогоровской теорией (темные точки и линия 1 на рис.4).

Для колмогоровской турбулентности теоретическая кривая на рис.4 построена с учетом регуляризации дрожаний изображения некогерентного протяженного источника. Это соответствует учету отклонения реального астрономического некогерентного объекта (край солнечного диска) от точечного. Как видно из рис.4, наблюдается удовлетворительное совпадение теории с экспериментом. В соответствии с теоретическими данными дрожание изображения края солнечного диска ( $\alpha_0 \neq 0$ ) при уменьшении диаметра приемника  $2a_t$  должно приближать-

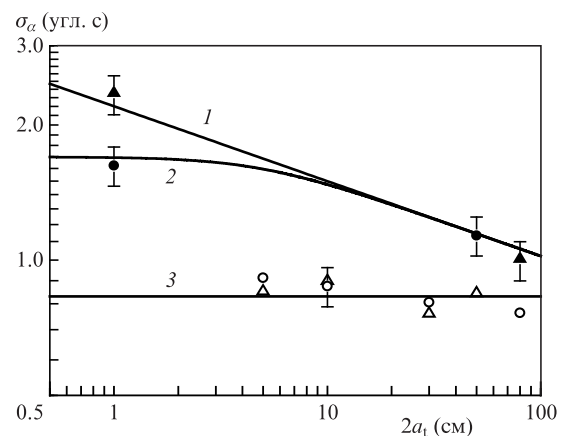


Рис.4. Зависимости стандартного отклонения  $\sigma_\alpha$  углового дрожания астрономического изображения края солнечного диска от диаметра входной апертуры телескопа  $2a_t$  в случае когерентной турбулентности ( $\circ, \Delta$ ) и некогерентной колмогоровской турбулентности ( $\bullet, \blacktriangle$ ) для точечного источника ( $\blacktriangle, \Delta; \alpha_0 = 0.1$  угл. с) и протяженного некогерентного источника ( $\bullet, \circ; \alpha_0 = 1.1$  угл. с); 1 – колмогоровская турбулентность и точечный источник, 2 – то же для протяженного источника, 3 – расчет для условий когерентной турбулентности.

ся к постоянному значению; стандартное отклонение дрожания изображения края солнечного диска для турбулентности колмогоровского типа при уменьшении диаметра приемника  $2a_t$  также стремится к постоянному значению.

Данные, получаемые с помощью датчика Брандта, можно использовать для одновременного определения радиуса Фрида  $r_0$  и эффективного внешнего масштаба турбулентности атмосферы. В работе [27] для этого предлагается выполнить измерения дисперсии дрожания изображения звезды в фокальной плоскости телескопа одновременно при нескольких (как минимум двух) значениях приемной апертуры  $a_t$  телескопа. При этом используется выражение для дисперсии дрожания изображения источника излучения в фокальной плоскости телескопа, рассчитанной для модели атмосферной турбулентности (15), которая учитывает конечность величины внешнего масштаба турбулентности

$$\langle (\rho_t^{\text{pl}})^2 \rangle \approx 3.23 F_t^2 a_t^{-1/3} r_0^{-5/3} k^{-2} [1 - 2^{-1/6} (\kappa_0^* a_t)^{1/3}]. \quad (30)$$

Эффективный (интегральный) внешний масштаб турбулентности  $(\kappa_0^*)^{-1}$  в [27] был введен на основе следующей формулы:

$$(\kappa_0^*)^{-1} = \left[ \int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \kappa_0^{1/3} / \int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) \right]^{-3}. \quad (31)$$

## 10. Оценка требований к размеру опорного источника

Рассмотрим требования к многоканальному корреляционному датчику волнового фронта Шака–Гартмана. При анализе ситуации будем исходить из формулы, определяющей зависимость дисперсии дрожания изображения от размера субапертуры и размера самого некогерентного источника. Это приводит к тому, что дисперсия случайного (линейного) смещения изображения такого некогерентного объекта-источника  $\sigma_t^2$ , измеряемая с помощью датчика с приемной апертурой эффективного радиуса  $a_t$ , на неоднородной трассе (например, при распространении в зенит) может быть рассчитана по формулам (17) и (18).

Имеет смысл рассмотреть два случая: однородную трассу и вертикальную трассу до объекта, находящегося за пределами атмосферы (в случае искусственного спутника Земли). Используя наши результаты, выражение для дисперсии дрожания изображения (18) на вертикальной трассе можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_t^2 = \text{const} F_t^2 \int_0^\infty d\xi C_n^2(\xi) [a_t^2 + \xi^2 a_0^2]^{-1/6}. \quad (32)$$

Поскольку атмосферная турбулентность ограничена по протяженности эффективной толщиной [8, 15] атмосферной турбулентности  $h_\xi$ , получаем следующее условие, при котором размер приемника  $a_t$  можно считать «большим», а объект слежения – «малым»:

$$a_t > a_0 h_\xi. \quad (33)$$

Следует отметить, что поскольку измеритель смещения фрагмента изображения на субапертуре может реагиро-

вать на смещение края изображения, в качестве углового «размера изображения» можно принять минимальный угловой размер, который способна разрешить оптическая система. Рассмотрим гипотетический случай, когда объект слежения имеет множество контрастных фрагментов, позволяющих измерять дрожание его изображения. Тогда при работе системы в условиях турбулентной среды минимальным угловым размером объекта, за которым можно осуществлять слежение, может служить предельное угловое разрешение для оптической системы в турбулентной среде, а именно  $\lambda/r_0^{\text{sc}}$ , где  $r_0^{\text{sc}}$  – радиус когерентности турбулентной атмосферы при «короткой экспозиции»;  $\lambda$  – длина волны излучения. При этом условии (33), которому должен удовлетворять минимально необходимый размер субапертуры датчика, переходит в следующее:

$$a_t > \lambda h_\xi / r_0^{\text{sc}}. \quad (34)$$

Известно, что всегда  $r_0^{\text{sc}} > r_0$  [24, 25]. Из анализа последнего выражения легко заключить, что если для вертикальных атмосферных трасс взять в качестве размера эффективного объекта слежения минимально разрешаемый объект при короткой экспозиции, то такой объект можно считать практически точечным. И действительно, такой объект можно эффективно использовать для измерения и коррекции фазы.

Для примера возьмем следующие значения: пусть толщина (высота) турбулентной атмосферы  $h_\xi = 2$  км, радиус когерентности для «короткой экспозиции»  $r_0^{\text{sc}}$  положим для видимого диапазона длин волн равным 10 см. Получаем тогда из (34), что необходимый минимальный размер субапертуры датчика, приведенный на входную апертуру, должен быть больше 1 см.

Проанализируем эту же проблему при работе на однородных трассах (когда  $C_n^2(\xi) = C_n^2$ ) для турбулентности колмогоровского типа. В этом случае (32) переходит в

$$\sigma_t^2 \approx 4 F_t^2 C_n^2 X \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 [(1 - \xi)^2 a_t^2 + \xi^2 b^2]^{-1/6}. \quad (35)$$

Таким образом, при малых линейных размерах некогерентного объекта-источника ( $b < a_t$ ), таких, когда в (35) можно использовать разложение в ряд по малому параметру  $b/a_t$ , получаем

$$\sigma_t^2 \approx 4 F_t^2 C_n^2 X a_t^{-1/3} \left\{ \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^{5/3} - \frac{b^2}{6 a_t^2} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^{-1/3} \xi^2 \right\}. \quad (36)$$

Вычисляя интегралы в (36), приходим к выражению

$$\sigma_t^2 \approx \frac{3}{2} F_t^2 C_n^2 X a_t^{-1/3} \left( 1 - 0.4 \frac{b^2}{a_t^2} \right). \quad (37)$$

Поскольку первое слагаемое в (37) представляет собой выражение для дисперсии смещения изображения точечного источника на апертуре, видно, что с ростом линейного размера опорного источника  $b$  происходит незначительное уменьшение полезного сигнала по сравнению со случаем точечного источника. Если же в выражении (35) положить, например,  $b = d$ , получим



$$\sigma_i^2 = 4F_i^2 C_n^2 X a_i^{-1/3} \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 [(1-\xi)^2 + \xi^2]^{-1/6}. \quad (38)$$

Приближенное вычисление интеграла (38) дает

$$\int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 [(1-\xi)^2 + \xi^2]^{-1/6} \approx 1/3.$$

Таким образом, уменьшение уровня сигнала действительно происходит, поскольку  $1/3 < 3/8$ , однако оно незначительно. Так, оказывается, что на горизонтальной трассе, даже в условиях, когда размер приемника становится соизмеримым с линейным размером источника ( $b = a_i$ ), уровень сигнала дрожания изображения уменьшается только на 6%. Интересный вывод: на горизонтальных трассах зависимость сигнала дрожания слабо зависит от размера некогерентного источника.

Еще раз подчеркнем, что в этих оценках параметр  $a_i$  – это размер субапертуры датчика волнового фронта, приведенный ко входу оптической системы. Именно при выполнении условия (34) по каждому из каналов датчика волнового фронта обеспечивается измерение, аналогичное измерению в случае сферической волны датчиком в целом [25–27]. Следует отметить, что в ряде работ по применению датчиков волнового фронта для солнечных телескопов угловой размер отдельной субапертуры находится в диапазоне 8–20 угл. с [28, 29]. Если при этом считать, что высота атмосферы  $h_\xi$  составляет 1–2 км, то использование формулы (21) взамен формулы (22), учитывающей конечность размера области слежения, может быть достаточно обоснованным только для достаточно хорошей турбулентности. Скажем,  $r_0$  должны быть больше 7–10 см, чтобы могло реализоваться условие (31). Как показывает наш анализ [26, 27], далеко не всегда такое условие имеет место в реальности, поэтому следует взамен формулы (21) использовать при обработке сигнала с датчика волнового фронта формулу (22), в которой учитывается конечность области слежения. Корректный учет требует предварительного изучения структуры турбулентности в регионе [26, 27]. Зависимость дрожания изображений от длины волны опорного излучения можно учесть, например, так, как в работе [30].

## 11. Заключение

Нами представлена схема работы адаптивной оптической системы, не требующей создания или формирования специального опорного источника. Адаптивная система использует слежение за изображением самосветящегося или подсвеченного посторонними источниками объекта. Отметим, что для эффективной работы корреляционного датчика при слежении следует использовать максимально малый, но контрастный элемент изображения. В атмосфере на протяженных трассах возможно сильное аэрозольное размытие изображения опорного источника, и только достаточно протяженный объект, т.е. объект с низкими пространственными частотами, будет отчетливо

виден на фоне других объектов. Это связано с тем, что частотно-контрастная характеристика аэрозольной атмосферы имеет максимум в области низких частот и спадает на высоких пространственных частотах [31]. Ухудшение видимости объекта из-за наличия аэрозольных частот в атмосфере снижает потенциальные возможности этого измерителя.

В целом нами показана возможность применения корреляционного датчика Шака–Гартмана для работы в адаптивных системах, использующих изображение объекта (или его фрагмента) в качестве опорного источника.

Работа частично финансировалась РНФ (грант № 15-19-20013).

1. Fried D.L. *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (10), 1380 (1966).
2. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. *Лазерное излучение в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1976).
3. Линник В.П. *Оптика и спектроскопия*, **25** (4), 401 (1957).
4. Харди Дж. *Труды НИЭР*, **66** (6), 31 (1978).
5. Лукин В.П. *Квантовая электроника*, **7** (6), 1270 (1980) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **10** (6), 727 (1980)].
6. Лукин В.П. *Квантовая электроника*, **8** (10), 2145 (1981) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **11** (10), 1311 (1981)].
7. Лукин В.П., Чарноцкий М.И. *Квантовая электроника*, **9** (5), 952 (1982) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **12** (5), 602 (1982)].
8. Лукин В.П., Матюхин В.Ф. *Квантовая электроника*, **10** (12), 2465 (1983) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **13** (12), 1604 (1983)].
9. Лукин В.П. *Атмосферная адаптивная оптика* (Новосибирск: Наука, 1986).
10. Лукин В.П., Фортес Б.В. *Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере* (Новосибирск: изд-во СО РАН, 1999).
11. Лукин В.П. В сб. «Как это было...» (М.: ЛАС, 2016, т. 5, с. 181).
12. Grinwood *Lincoln Lab. J.*, **5** (1), 3 (1992).
13. *Scintillation. International Meeting for Wave Propagation in Random Media* (Seattle, WA, USA, 1992).
14. Foy R., Labeyrie A. *Astronomy & Astrophysics*, **152**, L29 (1985).
15. Lukin V.P. *Proc. SPIE*, **5743**, 50 (2004).
16. Лукин В.П. *Оптика атмосферы и океана*, **19** (12), 1021 (2006).
17. Лукин И.П. *Оптика атмосферы и океана*, **28** (4), 298 (2015).
18. Lukin V.P. *J. Opt.*, **15** (4), 044009 (2013).
19. Khizhnyak A.I., Markov V.B. *Proc. SPIE*, **8238**, 82380K-1 (2012).
20. Lukina N.P. *Proc. SPIE*, **4338**, 4 (2001).
21. Лукин В.П. *Оптика атмосферы и океана*, **26** (2), 175 (2013).
22. Michau V., Rousset G., Fontanella J.C. *Proc. of Workshop on Real-Time and Post-Facto Solar Image Correction* (NSO, Sacramento Peak, USA, 1992, p. 91).
23. Лукин В.П., Чарноцкий М.И. *Оптика и спектроскопия*, **66** (5), 1131 (1989).
24. Миронов В.Л., Носов В.В., Чен Б.Н. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **23** (4), 461 (1980).
25. Носов В.В. *Докт. дисс.* (Томск, 2010).
26. Носов В.В., Григорьев В.М., Ковадло П.Г., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В. *Вестник МГТУ «Станкин»*, № 1, 103 (2013).
27. Lukin V.P., Nosov V.V., Torgaev A.V. *Appl. Opt.*, **53** (10), B196 (2014).
28. Noriaki Miura, Akira Oh-ishi, Susumu Kuwamura, Naoshi Baba, Yoichiro Hanaoka, Satoru Ueno, Yoshikazu Nakatani, Kiyoshi Ichimoto. *Proc. SPIE*, **9909**, 99092N (2016).
29. Dirk Schmidt, Thomas Rimmele, Jose Marino, Friedrich Wöger. *Proc. SPIE*, **9909**, 99090X (2016).
30. Lukin V.P. *Appl. Opt.*, **48** (1), A93 (2009).
31. Зув В.Е., Белов В.В., Веретенников В.В. *Теория систем в оптике дисперсных сред* (Томск: изд-во СО РАН, 1997).