

# Оптимизация призмной связи с оптическими микрорезонаторами типа шепчущей галереи

Ю.А.Демченко, И.Ф.Биленко, М.Л.Городецкий

*Аналитически исследованы методы повышения эффективности связи призмы с микрорезонаторами сфероидальной формы для возбуждения мод шепчущей галереи. Для заданной геометрии резонатора получены оптимальные углы падения и параметры падающего пучка. Рассчитана величина сдвига собственных частот резонатора из-за наличия призмы и вносимые ею потери.*

**Ключевые слова:** микрорезонаторы типа шепчущей галереи, призмная связь, оптимизация связи.

## 1. Введение

Оптические резонаторы с модами шепчущей галереи (МШГ) [1, 2] нашли широкое применение в оптике. Их добротность может достигать  $\sim 10^{11}$  [3], что делает такие резонаторы привлекательными для стабилизации лазеров [4], создания сенсоров и датчиков [5], оптических фильтров [6], модуляторов [7], генерации оптических гребенок [8] и квантовой оптомеханики [9].

Большинство методов, используемых для связи с такими микрорезонаторами, основано на эффекте «выпадающего» поля: при полном внутреннем отражении в резонаторе или элементе связи существует поле снаружи, напряженность которого экспоненциально спадает при удалении от отражающей поверхности. При этом продольная скорость волны определяется углом падения и может варьироваться для достижения фазового синхронизма. Наилучшая связь с резонатором (максимальный отбор падающей мощности на резонансной частоте) была получена с помощью растянутого волокна и достигала 99.97% [10]. Однако растянутое волокно чрезвычайно чувствительно к механическим вибрациям и легко повреждается. Хотя частично проблему можно решить при упаковке резонатора с волокном в защищенный корпус, достигнутая эффективность связи в такой схеме составляла лишь 81% [11]. Существуют и другие методы связи с резонаторами с МШГ, например применение полированных волокон (эффективность связи около 10% [12]), сточенных с торца волокон («пигтэйлов») [13] (эффективность связи  $\sim 60\%$ ), различных дифракционных решеток (достигнута связь до 50% с решетками на торце волокна [14] и до 60% с решетками с большим периодом [15]). Исторически использование призмы было первым предложенным методом связи с резонатором с МШГ [16], и этот метод по-прежнему является наиболее простым и позволяющим получить эффективность связи до 75% [17].

Ю.А.Демченко, М.Л.Городецкий, И.Ф.Биленко. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: yury.demchenko@gmail.com

Поступила в редакцию 18 марта 2017 г., после доработки – 1 мая 2017 г.

Во многих экспериментах для связи с резонаторами, форма которых отличается от сферической, также используется призма [18–23]. Для аппроксимации формы таких резонаторов можно использовать сфероид (эллипсоид вращения), являющийся, с одной стороны, хорошим приближением для описания формы резонаторов в области, в которой распространяется свет, а с другой стороны, позволяющий получить хорошую точность при расчете собственных частот [24].

В настоящей работе для описания связи между призмой и резонатором используется подход, аналогичный разработанному в [25] и основанный на расчете дифракции в дальней зоне «выпадающего» поля резонатора, туннелирующего в призму, и исследуются параметры пучка в призме, необходимые для оптимальной связи. Для нахождения сдвигов собственных частот резонатора используется адиабатический инвариант.

## 2. Распределение поля моды снаружи резонатора

Чтобы возникла связь излучения с резонатором через призму, излучение должно быть сфокусировано на внутренней поверхности призмы под углом, большим угла полного внутреннего отражения, а резонатор должен быть приближен к точке фокусировки на расстояние  $\sim \lambda/(2\pi)$ , где  $\lambda$  – длина волны [25]. Аналогично предыдущей работе [25], нами выбрана сферическая система координат  $(\rho, \theta, \varphi)$  в центре резонатора и декартова система координат  $(x, y, z)$  с центром в точке фокусировки излучения (рис.1). Угол между осью  $z$  и волновым вектором поля в призме и угол между осью  $x$  и проекцией волнового вектора на плоскость  $xu$  обозначим  $\Theta$  и  $\Phi$  соответственно.

Поскольку для сфероидальной геометрии уравнение Гельмгольца не может быть решено явно, используются приближения [24] для распределения поля в резонаторе. Для фундаментальной моды резонатора угловое распределение поля на поверхности резонатора вблизи экватора может быть записано в виде

$$E_{ll}(\rho = a, \theta, \varphi) = c_{ll} \exp(-\tilde{\theta}^2/2) \exp(im\varphi), \quad (1)$$

а для мод высокого порядка с  $l - m \gg 1$  в виде

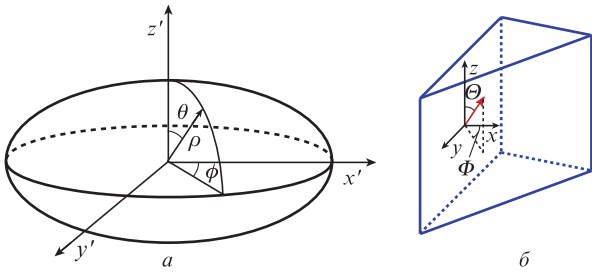


Рис. 1. Сферическая система координат с началом в центре резонатора (а) и декартова система с началом в точке фокусировки излучения (б).

$$E_{lm}(\rho = \alpha, \theta, \varphi) = c_{lm} \left[ \sqrt{2} \sqrt{l-m} \tilde{\theta} + \frac{\pi}{2}(l-m) \right] \exp(im\varphi), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)^4 \sqrt{\frac{m^2 \tilde{b}^2}{\tilde{a}^2} - \frac{1}{4}}; \\ \tilde{a} &= a + Pr^*; \quad \tilde{b} = \sqrt{\tilde{a} \left( \frac{b^2}{a} - \Delta_p \right)}; \\ \frac{1}{r^*} &= k \sqrt{n_r^2 - 1}; \quad \Delta_p \approx 1.05 a m^{-2/3}; \end{aligned} \quad (3)$$

$m$  – азимутальный индекс моды;  $l$  – угловой индекс моды;  $n_r$  – показатель преломления резонатора;  $P = 1$  для ТЕ мод и  $P = 1/n_r^2$  для ТМ мод;  $p = l - m$  – меридиональный индекс моды;  $a$  и  $b$  – полуоси сфероиды, сжатие которого определяется как  $c = (a - b)/a$ ;  $k$  – постоянная распространения волны в вакууме;  $c_{ll}$  и  $c_{lm}$  – нормировочные константы. Влияние выпадающего из резонатора поля при расчете эффективных геометрических параметров сфероиды не учитывалось, т. к. величина соответствующих поправок по сравнению с исходными параметрами сфероиды мала (порядка  $m^{-2/3}$ ) и, таким образом, полагается, что  $\tilde{a} \approx a$  и  $\tilde{b} \approx b$ .

В работе [26] для исследования связи с помощью призмы использовались несколько другие приближения поля, полученные в [27] на основе приближенного решения скалярного уравнения Гельмгольца вблизи поверхности сфероиды. Отметим, однако, что те же выражения и с использованием того же метода были получены ранее в монографии [1, с. 174], возможно, неизвестной авторам [27]. Асимптотическую эквивалентность распределений в [27] и [24] легко показать простым преобразованием координат.

Метод, описанный в [27] и [1, с. 174], использует ортогональную систему координат, в которой производные коэффициентов Ламе малы и ими можно пренебречь, что позволяет упростить уравнение Гельмгольца и записать решение радиальной части через функции Эйри, а угловой – через функции Эрмита–Гаусса, тогда как в работе [24] используется приближение для радиальной части через цилиндрические функции Бесселя. Поскольку функции Бесселя высокого порядка можно аппроксимировать через функции Эйри, оба подхода асимптотически одинаковы. При исследовании связи играют роль только угловые распределения и рассматриваются моды очень высокого порядка, поэтому различия в аппроксимации радиального распределения практически не имеют значения. Полагая, что сфероидальные координаты  $\zeta$  и  $\eta$  соот-

ветствуют координатам  $u$  (расстояние от рассматриваемой точки до поверхности) и  $\theta$  (полярный угол), угловую и радиальную части распределения поля можно представить как

$$\begin{aligned} E_\theta(\theta, \varphi) &= c_{ll} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_m^2}\right) H\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right) \exp(im\varphi), \\ E_R(u) &= Ai\left(\frac{u - \delta}{u_m}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $H$  – функция Эрмита–Гаусса;  $Ai$  – функция Эйри;  $\theta_m$  и  $\delta$  – параметры распределения поля в резонаторе. Легко также показать, что угловое распределение для фундаментальных мод и мод высокого порядка может быть получено из (4) при  $p = 0$  и  $p \gg 1$  соответственно.

Поле снаружи от резонатора спадает экспоненциально с характерным расстоянием затухания  $r^*$  [25]. Затухание поля снаружи от сплюснутого резонатора можно выразить как  $\exp[-z^2/(2a_z r^*) - y^2/(2a_y r^*)]$ , где  $a_z$  и  $a_y$  – радиусы кривизны поверхности резонатора в горизонтальной и меридиональной плоскостях. В случае осесимметричного сфероидального резонатора радиус кривизны в экваториальной плоскости  $a_z = a$ . В меридиональной плоскости зависимость кривизны от угла  $\theta$  не учитывается и радиус полагается равным радиусу кривизны при  $\theta = 0$  и соответственно  $a_y = b^2/a$ . Перемножив выражения для поля на поверхности резонатора (1), (2) с полученным выражением для затухания поля, можно получить распределение поля на поверхности призмы. Для того чтобы перейти от распределения поля на поверхности призмы к распределению поля внутри нее используется интеграл Френеля. Распределение поля умножается на  $\exp[i(k_z z + k_y y)]$  и интегрируется по плоскости призмы, к которой приближен резонатор. Так как область, в которой проникающее в призму из резонатора поле не мало, значительно меньше размеров призмы, то интегрирование можно проводить в бесконечных пределах. Предполагая, что  $\tilde{k}_z = k_z/k$  и  $\tilde{k}_y = k_y/k$ , результат интегрирования можно представить в виде

$$E(k_z, k_y) \propto \exp\left[-\frac{(\tilde{k}_z - \tilde{k}_{z0})^2}{2\Delta\tilde{k}_z^2} - \frac{(\tilde{k}_y - \tilde{k}_{y0})^2}{2\Delta\tilde{k}_y^2}\right].$$

После интегрирования могут быть найдены величины  $\tilde{k}_{z0}$ ,  $\tilde{k}_{y0}$ , которые определяют оптимальные углы падения излучения на внутреннюю границу призмы, а также характерные ширины диапазонов оптимальных углов  $\Delta\tilde{k}_z^2$ ,  $\Delta\tilde{k}_y^2$  в плоскостях  $xz$  и  $xy$  соответственно. Для  $p = 0$

$$\tilde{k}_{z0} = \cos \Theta = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{k}_z^2 &= \Delta\Theta^2 = \frac{rbmla + a}{rb^2 n_p^2 k^2} \\ &= \frac{mn_r^2 a}{l^2 n_p^2 b} + \frac{n_r a^2}{ln_p^2 b^2} \sqrt{n_r^2 - 1}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\tilde{k}_{y0} = \sin \Phi = \frac{m}{n_p k a} \approx \frac{n_r}{n_p}, \quad (7)$$

$$\Delta\tilde{k}_y^2 = \Delta\Phi^2 \cos^2 \Phi = \frac{1}{n_p^2 k^2 a r} \approx \frac{n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 l}, \quad (8)$$

а для  $p \gg 1$

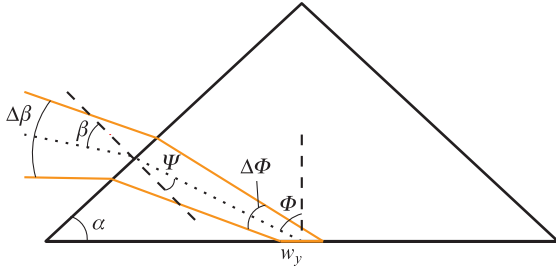


Рис.2. Ход лучей в призме.

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{z0} &= \cos \Theta = \pm \frac{\sqrt{2bm}}{bn_p k} \sqrt{\frac{l-m}{a}} \\ &\approx \pm \sqrt{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{n_r}{n_p} \sqrt{\frac{m(l-m)}{l}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta \tilde{k}_z^2 = \Delta \Theta^2 \sin^2 \Theta = \frac{a}{n_p^2 k^2 b^2 r} \approx \frac{a^2 n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 b^2 l}, \quad (10)$$

$$\tilde{k}_{y0} = \sin \Phi \sin \Theta = \frac{m}{n_p k a} \approx \frac{m n_r}{l n_p}, \quad (11)$$

$$\Delta \tilde{k}_y^2 = \Delta \Phi^2 \cos^2 \Phi \sin^2 \Theta = \frac{1}{n_p^2 k^2 a r} \approx \frac{n_r \sqrt{n_r^2 - 1}}{n_p^2 l}, \quad (12)$$

где  $n_p$  – показатель преломления призмы.

Видно, что сжатие сфероида определяет характеристики поля в призме. Одно из важнейших соотношений,  $n_p > n_r$ , следующее из условия полного внутреннего отражения на грани призмы и ограничивающее выбор возможных материалов призмы и резонатора, можно получить из (7) и (11). Это условие не изменяется существенно с изменением  $b/a$  из-за довольно слабой зависимости собственной частоты от степени сжатия резонатора [24]. Основное отличие от случая идеальной сферы заключается в распределении поля в вертикальной плоскости. Для фундаментальных мод характерная ширина распределения поля в призме увеличивается с увеличением сжатия резонатора из-за уменьшения характерной ширины распределения поля, проникающего из резонатора в призму. Для мод высокого порядка с  $p \gg 1$  зависимость характерной ширины от сжатия аналогична и в основном определяется углом прецессии, в свою очередь зависящим от  $m/l$  [25]. Отметим, что распределения поля вблизи резонатора для фундаментальной моды хорошо описываются двумерными гауссовыми функциями и потому интегралы перекрытия в бесконечных пределах легко считаются.

Получить углы распространения света в призме (рис.2) можно, используя формулы геометрической оптики:

$$\Psi = \Phi - \alpha,$$

$$\beta = \arcsin[n_p \sin(\Phi - \alpha)],$$

$$\Delta \beta = \frac{n_p \cos(\Phi - \alpha)}{\sqrt{1 - n_p^2 \sin^2(\Phi - \alpha)}} \Delta \Phi.$$

### 3. Оптимизация величины связи

Предполагая, что падающий на грань призмы пучок  $E_l(y, z)$  имеет гауссово поперечное распределение поля и

углы в призме подобраны оптимальным образом, можно получить степень сжатия резонатора, необходимую для наибольшей связи. Предположим, что падающий на призму пучок сфокусирован на поверхность призмы и в направлениях  $y$  и  $z$  вблизи фокуса имеет поперечные размеры  $w_y$  и  $w$  соответственно, причем отношение  $w_y/w$  зависит от угла падения излучения в призме.

Для того чтобы оптимизировать величину связи, максимизируем интеграл перекрытия на поверхности призмы [28] между полем резонатора  $E_r(y, z)$ , проникающим в призму, и полем излучения:

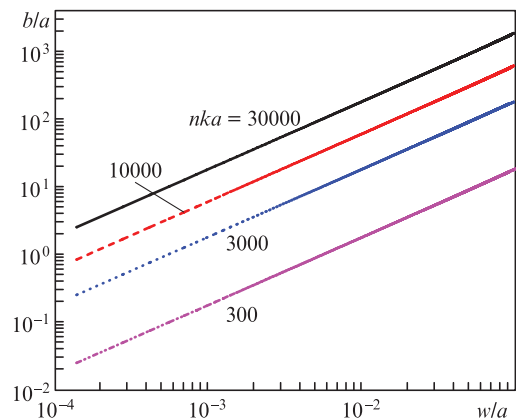
$$\begin{aligned} l_{cs} &\propto \frac{\int E_l(y, z) E_r(y, z) dy dz}{\sqrt{\int E_l^2(y, z) dy dz} \sqrt{\int E_r^2(y, z) dy dz}} \\ &= \int \exp\left(-\frac{y^2}{w_y^2} - \frac{z^2}{w^2}\right) E_l(y, z) dy dz \\ &\quad \times \left[ \int \sqrt{\exp\left(-2\frac{y^2}{w_y^2} - 2\frac{z^2}{w^2}\right)} dy dz \sqrt{\int E_l^2(y, z) dy dz} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Для фундаментальной моды интеграл может быть посчитан и результат продифференцирован по  $b/a$  для поиска экстремума:

$$\frac{b}{a} = \frac{w^2}{4a^2} m + \frac{w^4}{2a} \sqrt{\frac{n_r^2 - 1}{n_r^2}} m. \quad (13)$$

В случае фундаментальной моды удается получить аналитически корень  $b/a$  уравнения, являющийся экстремумом интеграла перекрытия. Для того чтобы убедиться, что найденный экстремум является максимумом, возьмем вторую производную  $I_{cs}$  в этой точке. Выражение для второй производной в точке экстремума громоздко, но легко проверить, что оно меньше нуля; это и означает, что данная точка является максимумом. Характер зависимости оптимального сжатия от размера пучка  $w$  представлен на рис.3.

Возбуждение мод с  $p \gg l$ , требующих гауссова пучка, падающего под углом к плоскости  $xy$  [25], в настоящей работе не рассматривается. Оптимальные параметры не зависят одновременно и от  $w_y$  и от  $w$ , т. к. сжатие резонатора существенно изменяет распределение поля лишь в вертикальной плоскости. Как можно видеть из рис.4, за-


 Рис.3. Параметры сфероида, соответствующие его оптимальной форме при  $n_r = 1.4$ .

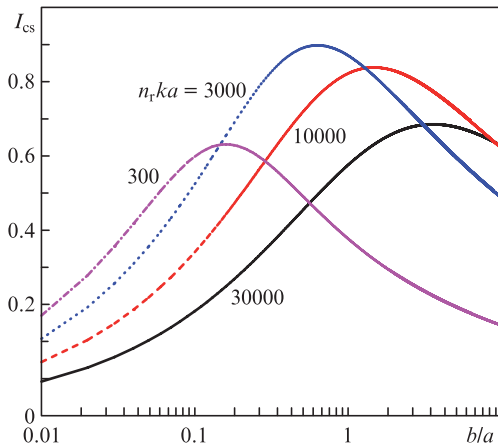


Рис.4. Зависимости интеграла перекрытия от параметра  $bla$  для фундаментальных мод при  $a = 100$  мкм,  $n_r = 1.4$ ,  $w = 1.41$  мкм,  $w_y = 2.83$  мкм.

висимость связи от сжатия резонатора достаточно слабая. Для типичных экспериментальных значений величина интеграла перекрытия изменяется лишь на 10% при изменении сжатия на 30%.

Результат, полученный для оптимального сжатия резонатора, отличается от аналогичного из работы [29], в которой предполагалось, что оптимальная связь достигается при равенстве отношений поперечных размеров пучка в направлениях осей  $z$  и  $y$  для исходного лазерного пучка и для пучка в резонаторе на грани призмы. Предложенный в настоящей работе метод является методологически более корректным, т.к. при решении уравнений связанных мод [28] для коэффициентов связи появляются именно интегралы перекрытия, которые и максимизируются в настоящей работе.

#### 4. Добротность нагружения

Наличие элемента связи (призмы) приводит к тому, что через него энергия из резонатора будет излучаться. Потери энергии на излучение через призму можно характеризовать обратной величиной, которую мы будем называть добротностью нагружения. Сжатие резонатора также влияет на добротность нагружения. Найти ее можно по формуле, связывающей запасенную в резонаторе энергию  $E$  и излучаемую мощность  $P$ , уходящую через призму:

$$Q = \frac{\omega E}{P}.$$

Для того чтобы найти мощность, излучаемую в призму, которая находится на расстоянии  $d$ , интегрируется плотность выходящей из резонатора энергии, причем, аналогично предыдущим выкладкам, поверхность призмы считается бесконечной. Таким образом, добротность нагружения

$$Q = \frac{n_r^2}{n_p} \left[ \frac{2\pi a(n_r^2 - 1)}{\lambda} \right]^{3/2} \exp\left(\frac{4\pi d\sqrt{n_r^2 - 1}}{\lambda}\right) \times \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{n_r^2 - 1}} + \frac{\pi a}{bn_r}}.$$

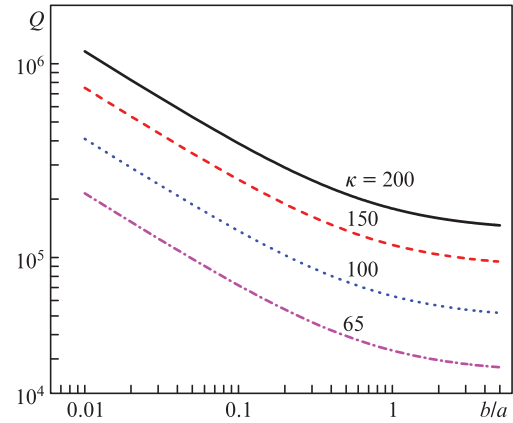


Рис.5. Зависимости добротности  $Q$  от параметра  $bla$  при  $n_r = 1.4$ ,  $n_p = 1.5$ ,  $d = 0$ ,  $\kappa = a/\lambda$ .

Полученное выражение совпадает с добротностью для сферы [25] при  $a = b$  и изменяется со сжатием резонатора (рис.5), что связано с изменением формы области на поверхности призмы, в которую эффективно проникает поле из резонатора. Добротность нагружения, так же как и в случае сферы, экспоненциально зависит от расстояния между резонатором и призмой, что позволяет легко добиваться оптимального нагружения выбором необходимого расстояния  $d$ .

#### 5. Влияние призмы на сдвиг собственных частот и добротность

Поскольку призма находится в области быстро спадающего с расстоянием поля резонатора, то ее присутствие влияет на его собственные частоты. Соответствующий малый сдвиг частот может быть легко получен с использованием адиабатического инварианта аналогично [30]:

$$\frac{\Delta A}{E} = \frac{\Delta \omega}{\omega}.$$

Призма достаточно велика, поэтому она рассматривается как полупространство. Для того чтобы найти работу по перемещению призмы из бесконечности на расстояние  $d$ , рассмотрим разность энергий при наличии призмы на расстоянии  $d$  и в ее отсутствие. Предполагая, что выпадающее поле резонатора  $E_r$  зависит только от расстояния  $d$ , можно получить:

$$E_r(d) = - \int_d^\infty dx \int |E(y,z)|^2 dS \exp\left(-\frac{2x}{r}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2d}{r}\right) \int |E(y,z)|^2 dS.$$

Таким образом,  $\Delta A = E_r(d)(n_p^2 - 1)$  и

$$\frac{\Delta A}{E} = \frac{1}{Q} \frac{r/2}{c/\omega} = \frac{1}{Q} \frac{rk}{2} = \frac{1}{Q} \frac{n_p^2 - 1}{2\sqrt{n_r^2 - 1}}. \tag{14}$$

При наличии потерь в материале призмы часть энергии из резонатора будет поглощаться в ней. Определим вклад этих потерь в добротность микрорезонатора. Чтобы ее найти, подставим комплексный показатель преломления

материала призмы  $n_p = n_{pr} + in_{pi}$  в выражение для добротности:

$$Q_i = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\text{Im}[\Delta A/E]}.$$

Пусть  $Q = Q_0/n_p$ , где  $Q_0$  не зависит от  $n_p$ ; тогда мнимая часть

$$\begin{aligned} \text{Im}\left[\frac{\Delta A}{E}\right] &= \frac{1}{Q_0\sqrt{n_r^2-1}} \text{Im}\left[\frac{n_p^2-1}{n_p}\right] \\ &= \frac{1}{Q_0\sqrt{n_r^2-1}} n_i \left(\frac{1}{n_{pi}^2+n_{pr}^2} + 1\right). \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение для мнимой части в выражение для добротности, получим

$$Q_i = Q\sqrt{n_r^2-1} \frac{n_{pr}}{n_{pi}} \frac{n_{pr}^2+n_{pi}^2}{n_{pr}^2+n_{pi}^2+1}. \tag{15}$$

### 6. Заключение

В настоящей работе рассматривалось влияние сжатия резонатора на величину его связи с призмой и добротность нагружения. Было показано, что распределение поля в призме заметно меняется с увеличением сжатия резонатора только в направлении сжатия. Изменение формы резонатора может позволить смягчить требования к его наклону относительно плоскости призмы. Добротность нагружения призмой сплюснутого резонатора слабо зависит от сжатия резонатора. Также было показано, что выбор оптимальных параметров падающего излучения может увеличить связь между резонатором и призмой на несколько процентов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект RFMEFI585516X0005).

1. Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Phys. Lett. A*, **137**, 393 (1989).
2. Городецкий М.Л. *Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью* (М.: Физматлит, 2011).
3. Grudin I., Ilchenko V., Maleki L. *Phys. Rev. A*, **74**, 063806 (2006).
4. Ilchenko V.S., Liang W., Maleki L., Matsko A.B., Savchenkov A.A., Seidel D. *Opt. Lett.*, **35**, 2822 (2010).

5. Foreman M.R., Swaim J.D., Vollmer F. *Adv. Opt. Photon.*, **7**, 168 (2015).
6. Ilchenko V.S., Maleki L., Matsko A.B., Savchenkov A.A. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, **17**, 136 (2005).
7. Dalton L.R., Rabiei P., Steier W.H., Zhang C. *J. Lightwave Technol.*, **20**, 1968 (2002).
8. Del'Haye P., Gorodetsky M.L., Gavartin E., Herr T., Holzwarth R., Kippenberg T.J. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 63901 (2011).
9. Aspelmeyer M., Marquardt F., Kippenberg T.J. *Rev. Mod. Phys.*, **86**, 1391 (2014).
10. Kippenberg T.J., Painter O.J., Spillane S.M., Vahala K.J. *Phys. Rev. Lett.*, **94** (4), 043902 (2003).
11. Dong Y., Jin X., Wang K. *Appl. Opt.*, **54** (2), 277 (2015).
12. Dubreuil N., Hare J., Knight J.C., Lefèvre V., Leventhal D.K., Sandoghdar V. *Opt. Lett.*, **20**, 813 (1995).
13. Ilchenko V., Maleki L., Yao S. *Simple Fiber-Optic Coupling for Microsphere Resonators* (NASA's Jet Propulsion Laboratory Tech Briefs, 2001).
14. Ding W., Gu B., Luan F., Yu X., Zhao C., Zhou Y. *Opt. Lett.*, **40**, 9 (2015).
15. Baldini F., Chiavaioli F., Farnesi D., Righini G.C., Soria S., Trono C., Conti G.N. *Opt. Express*, **23** (16), 21179 (2015).
16. Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Phys. Lett. A*, **137** (7-8), 393 (1989).
17. Chang R.K., Pan Y. *Appl. Phys. Lett.*, **82** (4), 487 (2003).
18. Ilchenko V.S., Liang W., Maleki L., Matsko A.B., Savchenkov A.A., Seidel D. *Nature Photon.*, **5**, 293 (2011).
19. Becker P., Bohatý L., Breunig I., Josef U.F., Karsten B., Liebertz J. *Opt. Lett.*, **40**, 9 (2015).
20. Burkhart J., Ilchenko V.S., Liang W., Maleki L., Matsko A.B., McMillan J.F., Savchenkov A.A., Xie Z., Wong C.W. *Optica*, **2**, 1 (2015).
21. Fortsch M., Furst J.U., Leuchs G., Marquardt C., Schunk G., Schwefel H.G.L., Sedlmeir F., Strekalov D.V., Vogl U. *Opt. Express*, **22** (25), 30795 (2014).
22. Bennett A.M., Ilchenko V.S., Maleki L., Matsko A.B., Santini P., Savchenkov A.A. *Opt. Lett.*, **38**, 21 (2013).
23. Matsko A.B., Maleki L., Mohageg M. *Opt. Express*, **20** (15), 16704 (2012).
24. Demchenko Y.A., Gorodetsky M.L. *J. Opt. Soc. Am. B*, **30**, 11 (2013).
25. Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Opt. Commun.*, **113**, 133 (1994).
26. Foreman M.R., Leuchs G., Schwefel H.G.L., Sedlmeir F. *J. Opt. Soc. Am. B*, **33** (11), 2177 (2016).
27. Buse K., Breunig I., Schwefel H.G.L., Sedlmeir F., Sturman B. *Opt. Express*, **21** (25), 30683 (2013).
28. Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S., Savchenkov A.A. *Proc. SPIE*, **3267**, 251 (1998).
29. Abdalmalak K.A., Döhler G.H., García Muñoz L.E., Lampérez A.G., Malzer S., Preu S., Romano L.S., Santamaría-Botello G.A., Schwefel H.G.L., Sedlmeir F., Segovia-Vargas D., Weber H.B. *Opt. Express*, **24** (23), 26503 (2016).
30. Демченко Ю.А., Городецкий М.Л. *Вестник Моск. ун-та. Сер. Физ., Астроном.*, № 3, 32 (2015).