

О математическом и физическом подходах к построению квантового кластерного состояния в непрерывных переменных, или можно ли построить кластер из разных мод?

С.Б.Королев, Е.А.Вашукевич, Т.Ю.Голубева, Ю.М.Голубев

Рассмотрены вопросы формирования кластерного состояния из набора ортогональных мод. Показано, что используемое обычно унитарное преобразование не сводится в этом случае к набору стандартных операций линейной оптики, выполняемых над полями в сжатом состоянии, а должно быть дополнено более сложной операцией бесшумового преобразования профиля квантового сигнала. В то же время, если удастся сформировать кластер, амплитуды узлов которого имеют разные временные профили, эта особенность не препятствует выполнению вычислений на кластере.

Ключевые слова: квантовое кластерное состояние, ортогональные моды, сжатое состояние света.

1. Введение

Интерес к квантовым вычислениям и, в частности, к однонаправленным квантовым вычислениям [1–3] породил огромное число вариантов построения квантовых кластерных состояний. Принципы генерации квантовых состояний и операций с ними существенно различаются в зависимости от того, на каком «языке» они описываются – в терминах дискретных [1] или же непрерывных переменных [4–6]. Для обоих вариантов описания разработан аппарат выполнения логических операций, позволяющий реализовать универсальный квантовый компьютер при условии построения подходящего многочастично-перепутанного квантового состояния. В настоящей статье мы рассмотрим только варианты схем в непрерывных переменных.

Квантовым «ресурсом» для построения квантового кластерного состояния может быть квадратурное сжатие световых мод [7, 8], при этом речь может идти о сжатии временных мод или же о пространственном сжатии. Предложены методы построения кластеров на основе корреляций по орбитальному угловому моменту [9, 10]. Есть предложения о построении кластерных состояний на основе спиновых волн атомных ансамблей [11, 12] и оптомеханических систем [13]. Представляют интерес способы создания «гибридных» кластерных состояний на основе материальных и полевых осцилляторов [11].

При обсуждении вопроса о построении квантового кластерного состояния, а далее и о вычислениях на нем, ключевым понятием служит представление о модах света или же о модах других рассматриваемых квантовых объектов. Не снижая общности, мы будем говорить о световых модах. Каждой моде ставится в соответствие квантовый осциллятор, и преобразование такой моды должно описываться по законам квантовой механики. В настоя-

щей статье мы хотим обратить внимание на вопрос о корректности использования тех или иных математических построений при обсуждении генерации кластерного состояния. Побудительной причиной стала для нас публикация целого ряда статей [14–17], в которых рассматривается формирование кластера на основе ортогональных мод различной природы.

2. Генерация кластера как унитарное преобразование над сжатыми модами

Напомним кратко, как определяется кластерное состояние в непрерывных переменных. Математическое описание процедуры построения кластера начинается с задания графа будущего кластера, именно он определяет топологию (структуру) состояния, которое мы хотим получить на выходе. Для определения графа G кластерного состояния достаточно задать множество узлов и множество ребер, соединяющих эти узлы. Узлами графа являются моды физической системы, описываемые парами канонических переменных $\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i\}$, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям, а в качестве ребер выступает квантовая перепутанность мод. Каждому ребру, соединяющему узлы i и j , ставится в соответствие вещественное число $v_{ij} \in [-1, 1]$, называемое весом ребра. Совокупность этих весов задает матрицу смежности $V = \{v_{ij}\}$, которая полностью определяет граф G .

Обычно, говоря о построении кластерного состояния, обсуждают следующую процедуру его генерации. Рассматривают n независимых квантовых гармонических осцилляторов в квадратурно-сжатом состоянии. Каждый из этих осцилляторов задается с помощью операторов квадратур \hat{x}_i и \hat{y}_i , подчиняющихся каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{x}_j, \hat{y}_k] = \frac{i}{2} \delta_{jk}, \quad (1)$$

где индексами j и k обозначается соответствующий осциллятор; δ_{jk} – символ Кронекера. При этом мы будем считать, что все осцилляторы сжаты по \hat{y} -квадратуре [18], т. е. их среднеквадратичные флуктуации меньше среднеквадратичных флуктуаций вакуумного состояния:

С.Б.Королев, Е.А.Вашукевич, Т.Ю.Голубева, Ю.М.Голубев. Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 190034 С.-Петербург, Университетская наб., 7/9; e-mail: Sergey.Koroleev@gmail.com

$$\langle \delta \hat{y}_i^2 \rangle < \frac{1}{4}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Попарно перепутаем эти подсистемы так, чтобы сила связи между i -м и j -м осцилляторами соответствовала элементу v_{ij} матрицы смежности V (в смысле удовлетворения равенств (3) и (4), см. ниже). В результате мы получим физическую систему, находящуюся в квантовом кластерном состоянии, которой отвечает граф G , заданный с помощью матрицы смежности V . Отметим, что узлам графа G будут соответствовать квантовые гармонические осцилляторы, перепутанные определенным образом. Такое перепутывание можно описать с помощью преобразования Боголюбова [19] над исходной совокупностью независимых квадратурно-сжатых осцилляторов:

$$\hat{X}_j + i \hat{Y}_j = \sum_{k=1}^n u_{jk} (\hat{x}_k + i \hat{y}_k), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $U = \{u_{ij}\}_{j,k=1}^n$ – унитарная матрица, фиксирующая конкретный набор преобразований, совершаемых над подсистемами, так, что результат преобразования отвечает матрице смежности V (ниже мы обсудим связь этих матриц); \hat{X}_j и \hat{Y}_j – операторы квадратур j -го узла кластерного состояния.

Для описания квантово-статистических свойств кластеров в дискретных переменных обычно используют стабилизаторы [20]. Однако в непрерывных переменных наиболее естественным способом описания статистики кластерного состояния является оператор «нуллифайер», который вводится для каждого узла графа G :

$$\hat{N}_j = \hat{Y}_j - \sum_{i=1}^n v_{ji} \hat{X}_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

По определению физическая система находится в квантовом кластерном состоянии, если среднеквадратичные флуктуации всех ее нуллифайеров в пределе бесконечно-го сжатия квантовых гармонических осцилляторов, на которых оно было построено, стремятся к нулю [18]:

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \lim \langle \delta \hat{N}_j^2 \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \langle \delta \hat{y}_1^2 \rangle \rightarrow 0, \dots, \langle \delta \hat{y}_n^2 \rangle \rightarrow 0. \quad (4)$$

Согласно теореме о редукции Блоха–Мессиа [21] произвольное преобразование Боголюбова можно представить в виде четырех последовательных операций:

$$\hat{U} = \hat{R}(\phi_1) \hat{S}(r) \hat{R}(\phi_2) \hat{D}(\alpha), \quad (5)$$

где $\hat{R}(\phi_1)$ и $\hat{R}(\phi_2)$ – операторы поворотов на семейства углов $\phi_1 = \{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и $\phi_2 = \{\phi_{2ij}\}_{i,j=1}^n$ соответственно. Оператор $\hat{S}(r)$ отвечает n -модовому сжатию с вещественными коэффициентами сжатия $r = \{r_1, \dots, r_n\}$. Оператор $\hat{D}(\alpha)$ – оператор смещения n квадратур на величины $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Если преобразование выполняется над гауссовыми состояниями (а именно такой случай мы и рассматриваем), указанные операторы можно представить в матричной форме. Так, например, для одномодового состояния матрицы поворота и сжатия имеют вид

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad S(r) = \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 \\ 0 & e^r \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В случае n -модового состояния соответствующие матрицы приобретут блочную структуру. Отметим, что присут-

ствующую в общем разложении матрицу смещений квадратур можно опустить в дальнейших преобразованиях, поскольку описываемые ею смещения каждой моды на некоторые заданные классические величины не влияют на квантово-статистические свойства кластера и на его использование для квантовых вычислений. Как было показано в работе [22], проводя процедуру построения кластера из исходно сжатых мод, достаточно ограничиться только преобразованиями линейной оптики. Матрица U в этом случае соответствует последовательному применению преобразований поворота и смещения на светоделителе. Условие на число требуемых операций можно получить, исходя из размерности и топологии кластера [23]. Однако для нас сейчас важно наличие процедуры смешения мод, «зашитое» внутри преобразования Боголюбова. Преобразование смещения не может быть выполнено над модами с разными профилями без добавления шума. В самом деле, если на первый вход светоделителя падает поле с временным профилем $L_1(t)$ (а на второй – с временным профилем $L_2(t)$), то, согласно правилам преобразования, мы обязаны рассмотреть поле этой же моды и на другом входе светоделителя. Поскольку на втором входе светоделителя в данную моду засветки нет, то это поле должно рассматриваться как вакуумное. Таким образом, смешение полей с разными профилями фактически следует описывать как четырехволновой линейный процесс, в котором участвуют два вакуумных поля и два поля в сжатом состоянии. При смешении таких полей корреляции мод уменьшаются, и полученное поле хотя и проявляет свойства перепутывания, но является небольшим из-за влияния вакуумных шумов.

Иными словами, говоря об унитарном многомодовом преобразовании Боголюбова, мы обязаны принимать во внимание также моды, исходно находившиеся в вакуумном состоянии и не участвовавшие в процессе. Разворот базиса обуславливает взаимодействие этих мод.

Таким образом, мы видим, что, смешивая моды с различными временными профилями, невозможно получить хорошо перепутанное состояние. В частности, нельзя получить квантовое кластерное состояние путем линейных преобразований над сжатыми модами с разными временными профилями. Тот же вывод справедлив, если моды различаются не временными профилями, а любой другой характеристикой, позволяющей говорить о модовом составе излучения.

Использование преобразования Боголюбова позволяет нам обсуждать проблему смешения мод не напрямую, как преобразование световых полей на светоделителе, а как некоторую обобщенную процедуру, преобразующую формы смешиваемых полей. В качестве примера подобной процедуры можно указать запись сигнала в ячейку квантовой памяти с последующим считыванием из нее сигнала другой формы [24, 25]. В случае, если эффективность такого процесса стремится к единице, квантово-статистические корреляции исходной волны переносятся на волну с другим профилем моды без потерь. Как известно, данное преобразование описывается гамильтонианом светоделителя, а высокая эффективность процесса соответствует в этой аналогии коэффициенту пропускания светоделителя, стремящемуся к единице. Однако следует отметить, что создание таких преобразователей требует немалых усилий, и предполагать наличие преобразователя в схеме «по умолчанию», без обсуждения вариантов его реализации, представляется неоправданным.

Мы обсудили вопрос о построении кластерного состояния путем линейных преобразований над сжатыми осцилляторами. Однако это обсуждение не исчерпывает вопроса, поскольку исключает возможность использования нелинейных преобразований для построения кластера. Допустим, что существует нелинейный физический процесс, который позволяет записать формальный набор равенств (3), где операторы \hat{X}_j и \hat{Y}_j относятся к ортогональным модам [26]. В каком смысле следует понимать такое равенство и можно ли говорить о таком состоянии как о кластерном?

Чтобы ответить на данный вопрос, обратимся вновь к определению кластерного состояния (3) и (4). Это определение включает в себя процедуру усреднения, т. е. связано напрямую с измерением. Какое же измерение предполагается при такой записи? Можно с уверенностью утверждать, что нельзя указать профиль гомодина, выполняющий измерение в случае, когда квадратуры \hat{X}_j и \hat{Y}_j принадлежат ортогональным модам. Таким образом, в этом случае опять же надо предполагать, что имеется вспомогательное устройство, преобразующее профиль моды с сохранением ее квантовой статистики.

В связи с тем, что квантовое кластерное состояние представляет интерес прежде всего как ресурс для однонаправленных вычислений, обсудим вопрос о построении кластера на основе ортогональных мод с точки зрения возможности произвести на нем такие вычисления. Поскольку процедура вычислений базируется на измерениях, можно ожидать, что они также накладывают ограничения на модовый состав кластера.

3. Однонаправленные вычисления и их связь с выбором мод кластера

Опишем процедуру однонаправленных квантовых вычислений на многочастичном квантовом состоянии поля, удовлетворяющем равенству (3), где операторы \hat{X}_j и \hat{Y}_j будем считать относящимися к ортогональным модам.

В качестве примера рассмотрим вычисление на линейном четырехмодовом кластерном состоянии. Схема вычислений представлена на рис.1. Амплитуды такого кластерного состояния представим в виде

$$\hat{A}_j(t) = L_j(t)(\hat{X}_j + i\hat{Y}_j) + \text{vac}_j, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (7)$$

Здесь $\{L_j(t)\}_{j=1}^4$ – произвольные ортогональные функции, принадлежащие полному ортонормированному набору,

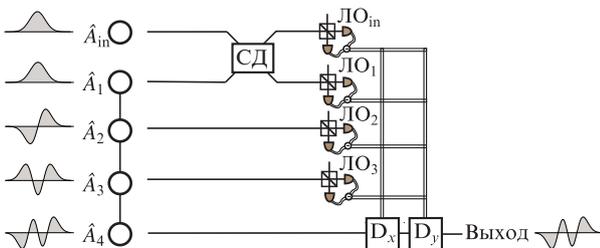


Рис.1. Схема однонаправленных вычислений с помощью четырехмодового кластерного состояния. Амплитуды $\hat{A}_1 - \hat{A}_4$ имеют различные профили мод, но являются амплитудами узлов кластерного состояния; \hat{A}_{in} – амплитуда входного состояния, над которым проводятся вычисления; СД – светоделитель; ЛО_{in}, ЛО₁₋₃ – локальные осцилляторы; D_x и D_y осуществляют операции смещения фототока.

по которому разложены амплитуды полей. Будем полагать, что остальные моды, также присутствующие в разложении, находятся в вакуумном состоянии и описываются слагаемыми vac_j . Величины $\{\hat{X}_j, \hat{Y}_j\}_{j=1}^4$ – операторные коэффициенты разложения, представляющие собой канонические квадратуры выделенных мод. Поскольку рассматриваемое квантовое состояние является кластерным, то эти квадратуры должны удовлетворять трем неравенствам ван Лука – Фурусавы:

$$\langle \delta(\hat{Y}_1 - \hat{X}_2)^2 \rangle + \langle \delta(\hat{Y}_2 - \hat{X}_1 - \hat{X}_3)^2 \rangle < 1, \quad (8)$$

$$\langle \delta(\hat{Y}_3 - \hat{X}_2 - \hat{X}_4)^2 \rangle + \langle \delta(\hat{Y}_2 - \hat{X}_1 - \hat{X}_3)^2 \rangle < 1, \quad (9)$$

$$\langle \delta(\hat{Y}_3 - \hat{X}_2 - \hat{X}_4)^2 \rangle + \langle \delta(\hat{Y}_4 - \hat{X}_3)^2 \rangle < 1. \quad (10)$$

Из них можно получить связь квадратур кластерного состояния с квадратурами сжатых осцилляторов, на которых это состояние было создано:

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x}_2 + \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{y}_3, \quad (11)$$

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{x}_3,$$

$$\hat{X}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{x}_3, \quad (12)$$

$$\hat{Y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{y}_3,$$

$$\hat{X}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}_4 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{y}_3 - \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{x}_2, \quad (13)$$

$$\hat{Y}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_4 - \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x}_3 - \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{y}_2,$$

$$\hat{X}_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_4 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x}_3 + \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{y}_2, \quad (14)$$

$$\hat{Y}_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}_4 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{y}_3 - \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{x}_2.$$

Амплитуду входного поля, над которым будем проводить вычисления, представим аналогично разложениям (7):

$$\hat{A}_{in}(t) = L_1(t)(\hat{X}_{in} + i\hat{Y}_{in}) + \text{vac}_{in}. \quad (15)$$

Профиль входного сигнала должен быть согласован с профилем первого узла кластера. Для проведения вычислений над входным состоянием подмешаем его к кластерному состоянию. Для этого смешаем на светоделителе поля с амплитудами $\hat{A}_{in}(t)$ и $\hat{A}_1(t)$. Результат преобразования можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{A}'_{in}(t) = & \frac{L_1(t)}{\sqrt{2}} \left[\hat{X}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{x}_2 + \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{y}_3 \right. \\ & \left. + i \left(\hat{Y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}}\hat{x}_3 \right) \right] + \text{vac}_{in}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\hat{A}_1'(t) = \frac{L_1(t)}{\sqrt{2}} \left[\hat{X}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right. \\ \left. + i \left(\hat{Y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \right] + \text{vac}_1. \quad (17)$$

Чтобы совершить преобразование над входным полем \hat{A}_{in} , необходимо провести измерения амплитуд $\hat{A}_{in}(t)$, $\hat{A}_1'(t)$, $\hat{A}_2(t)$ и $\hat{A}_3(t)$ с помощью четырех гомодинных детекторов, локальные сцилляторы которых имеют амплитуды $\beta_k(t) = \beta_0 L_k(t) (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, где $k = \{in, 1\}$ и $\beta_k(t) = \beta_0 L_k(t) (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, где $k = \{2, 3\}$ соответственно. В результате получим выражения для операторов фототока, зависящих от времени:

$$\sqrt{2} \hat{i}_{in}(t) = \beta_0 L_1^2(t) \left[\left(\hat{X}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \cos \theta_{in} \right. \\ \left. + \left(\hat{Y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \sin \theta_{in} \right], \quad (18)$$

$$\sqrt{2} \hat{i}_1(t) = \beta_0 L_1^2(t) \left[\left(\hat{X}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \cos \theta_1 \right. \\ \left. + \left(\hat{Y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \sin \theta_1 \right], \quad (19)$$

$$\hat{i}_2(t) = \beta_0 L_2^2(t) \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \cos \theta_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \sin \theta_2 \right], \quad (20)$$

$$\hat{i}_3(t) = \beta_0 L_3^2(t) \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \cos \theta_3 \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \sin \theta_3 \right], \quad (21)$$

которые после интегрирования по времени с учетом ортонормированности набора профилей $\{L_i(t)\}$ приведут нас к соотношениям

$$\sqrt{2} \hat{i}_{in} = \beta_0 \left[\left(\hat{X}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \cos \theta_{in} \right. \\ \left. + \left(\hat{Y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \sin \theta_{in} \right], \quad (22)$$

$$\sqrt{2} \hat{i}_1 = \beta_0 \left[\left(\hat{X}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \cos \theta_1 \right. \\ \left. + \left(\hat{Y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \sin \theta_1 \right], \quad (23)$$

$$\hat{i}_2 = \beta_0 \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \cos \theta_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \sin \theta_2 \right], \quad (24)$$

$$\hat{i}_3 = \beta_0 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{y}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{x}_3 \right) \cos \theta_3 \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{x}_2 - \sqrt{\frac{2}{5}} \hat{y}_3 \right) \sin \theta_3 \right]. \quad (25)$$

Решим полученную систему уравнений относительно неизвестных квадратур \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 и \hat{x}_4 и подставим их в уравнение (7) для амплитуды $\hat{A}_4(t)$ с учетом связи (14). Таким образом мы найдем квадратуры поля $\hat{A}_4(t)$, которые обозначим как $\hat{X}_{out}(t)$ и $\hat{Y}_{out}(t)$. Эти квадратуры связаны с квадратурами исходного сигнала $\hat{A}_{in}(t)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}(t) \\ \hat{Y}_{out}(t) \end{pmatrix} = L_4(t) K(\theta_2, \theta_3) M(\theta_+, \theta_-) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in} \\ \hat{Y}_{in} \end{pmatrix} \\ + L_4(t) F \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \end{pmatrix} + L_4(t) H \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где $\theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_{in}$;

$$M(\theta_+, \theta_-) = \frac{1}{\sin \theta_-} \begin{pmatrix} \cos \theta_+ + \cos \theta_- & \sin \theta_+ \\ -\sin \theta_+ & \cos \theta_+ - \cos \theta_- \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$K(\theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) & \cot \theta_3 \\ \sin \theta_2 \sin \theta_3 & -1 \\ -\cot \theta_2 & \end{pmatrix} \quad (28)$$

– матрицы; F и H также являются матрицами, зависящими от θ_{in} , θ_1 , θ_2 , θ_3 . Общий вид квадратур $\hat{X}_{out}(t)$ и $\hat{Y}_{out}(t)$ приведен в Приложении.

Уравнение (26) состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое отвечает желаемому преобразованию над квадратурами поля \hat{A}_{in} . Это преобразование полностью определяется выбором углов θ_{in} , θ_1 , θ_2 , θ_3 при гомодинном детектировании. Второе слагаемое содержит только сжатые квадратуры с числовыми коэффициентами, а последнее – операторы фототоков. В схеме вычислений на кластерных состояниях мы измеряем фототоки, поэтому должны перейти от операторов \hat{i}_{in} , \hat{i}_1 , \hat{i}_2 , \hat{i}_3 к соответствующим измеренным их с-числовым значениям. Тогда в последнем слагаемом правой части (26) окажутся только классические величины, которые могут быть скомпенсированы с помощью смещения квадратур выходного поля. Формально смещение описывается действием операторов $\hat{D}_x(s) = \exp(-is\hat{Y})$ и $\hat{D}_y(s) = \exp(-is\hat{X})$:

$$\hat{D}_x^\dagger(s(t)) \hat{X}(t) \hat{D}_x(s(t)) = \hat{X}(t) + s(t), \quad (29)$$

$$\hat{D}_x^\dagger(s(t)) \hat{Y}(t) \hat{D}_x(s(t)) = \hat{Y}(t),$$

$$\hat{D}_y^\dagger(s(t)) \hat{Y}(t) \hat{D}_y(s(t)) = \hat{Y}(t) + s(t), \quad (30)$$

$$\hat{D}_y^\dagger(s(t)) \hat{X}(t) \hat{D}_y(s(t)) = \hat{X}(t).$$

Стоит отметить, что величина смещения подбирается с использованием процедуры feed-forward в каждом отдельном опыте. Суть этой операции состоит в том, что мы отправляем результаты измерений на физические приборы, которые выполняют преобразования $\hat{D}_x(s)$ и

$\hat{D}_y(s')$ до того, как на них пришло поле. Тем самым мы подготавливаем эти приборы так, чтобы квадратуры пришедшего на них света смещались нужным нам образом. Если в нашей задаче к выходным квадратурам применить преобразования

$$\hat{D}_x(-L_4(t)(H_{11}i_{in} + H_{12}i_1 + H_{13}i_2 + H_{14}i_3)),$$

$$\hat{D}_y(-L_4(t)(H_{21}i_{in} + H_{22}i_1 + H_{23}i_2 + H_{24}i_3)),$$

то мы полностью скомпенсируем последнее слагаемое в выражении (26).

Второе слагаемое в правой части (26) пропорционально сжатым квадратурам \hat{y}_1 , \hat{y}_2 , \hat{y}_3 и \hat{y}_4 . Поскольку каждое вычисление заканчивается процедурой измерения полученного состояния, при достаточно хорошем начальном сжатии можно пренебречь этими слагаемыми как малыми поправками. Поэтому окончательное уравнение, связывающее входные и выходные квадратуры, принимает вид

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}(t) \\ \hat{Y}_{out}(t) \end{pmatrix} = L_4(t) K(\theta_2, \theta_3) M(\theta_+, \theta_-) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in} \\ \hat{Y}_{in} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Данное уравнение демонстрирует линейную связь между входными и выходными квадратурами. Следовательно, можно воспользоваться теоремой о редукции Блоха – Мессиа [21], которая гласит, что матрицу $K(\theta_2, \theta_3) M(\theta_+, \theta_-)$, связывающую квадратуры, можно разложить следующим образом:

$$K(\theta_2, \theta_3) M(\theta_+, \theta_-) = R(\phi_1) S(r) R(\phi_2), \quad (32)$$

где матрицы вращения (R) и сжатия (S) имеют вид (6), а углы поворота ϕ_1 и ϕ_2 и параметр сжатия r выражаются явным образом через углы гомодинов θ_{in} , θ_1 , θ_2 , θ_3 . Как было показано в работе [27], это наиболее общее разложение, т.е., выбирая углы гомодинов, мы можем выполнить произвольное линейное преобразование над входным состоянием поля.

Квадратуры узла кластерного состояния (26) после процедуры редукции, связанной с измерением квадратур предыдущего узла, пропорциональны профилю моды данного узла. В остальном выражение (26) полностью совпадает с аналогичной формулой без учета специфики различных профилей узлов кластера [27]. Как мы видим, никакие дополнительные шумовые члены, связанные с несовпадением профилей мод, не появляются. Таким образом, процедура вычислений оказывается устойчивой относительно изменения модового состава узлов кластера. Отметим, что профиль сигнала, над которым производится вычисление, в данном случае изменится и будет совпадать с профилем последнего измеряемого узла кластера. Полностью аналогичная ситуация возникает и при выполнении двухкубитовых операций как на линейных кластерах, так и на кластерах с более сложной топологией.

4. Заключение

Мы показали, что формальное использование унитарного преобразования, часто применяемого при описании построения кластера из полевых осцилляторов с несовпадающими профилями амплитуд, приводит к добавлению шума, если такое преобразование реализуется посред-

ством устройств стандартной линейной оптики. Для выполнения этого преобразования необходимо применять дополнительное устройство, контролируемо изменяющее профиль амплитуды поля и сохраняющее неизменными квантовые корреляции в нем. В качестве возможного варианта подобного преобразователя можно рассматривать ячейку квантовой памяти [24, 25]. В то же время, если удастся сформировать кластер, амплитуды узлов которого имеют разные временные профили, эта особенность не препятствует выполнению вычислений на кластере.

Следует отметить, что именно простота построения кластерного состояния из полевых осцилляторов в сжатом квантовом состоянии рассматривается как большое преимущество данных многочастично-перепутанных систем. Избыточные шумы в них часто оцениваются исходя из количества элементов, осуществляющих смещения и повороты амплитуд полей. Эти оценки перестают быть верными, если предполагается включение в схему таких нетривиальных устройств, как квантовый преобразователь профиля сигнала.

Мы провели обсуждение, считая, что моды поля различаются по временным профилям. Однако те же рассуждения справедливы, если полевые моды получены любым другим разложением по полному ортонормированному набору функций. При смешении таких мод необходимо учитывать наличие ортогональных мод в вакуумном состоянии. Заметим, что, хотя для временных мод механизмы их квантового преобразования уже предложены, создание устройств, осуществляющих бесшумовое преобразование других степеней свободы, требует обсуждения.

Мы хотели бы подчеркнуть, что при рассмотрении формирования многочастично-перепутанных квантовых систем вопрос о смешении различных мод не должен оставаться лишь математической операцией, а требует указания используемой процедуры смешения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-02-00180а, 18-02-00648а и 18-32-00255мол_а). Научные результаты достигнуты в ходе реализации Программы Центра НТИ «Квантовые технологии».

Приложение. Связь входных и выходных квадратур осцилляторов при квантовых вычислениях

Раскроем явный вид квадратур \hat{X}_{out} и \hat{Y}_{out} в выражении (26):

$$\begin{aligned} \hat{X}_{out}(t) = & \frac{L_4(t)}{\sin \theta} \\ & \times \left\{ \left[\frac{\cos(\theta_2 + \theta_3)(\cos \theta_+ + \cos \theta_-)}{\sin \theta_2 \sin \theta_3} - \cot \theta_3 \sin \theta_+ \right] \hat{x}_{in} \right. \\ & \left. + \left[\frac{\cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_+}{\sin \theta_2 \sin \theta_3} + \cot \theta_3 (\cos \theta_+ - \cos \theta_-) \right] \hat{y}_{in} \right\} \\ & + L_4(t) [(1 - 2 \cot \theta_2 \cot \theta_3) \hat{y}_1 + 3(\cot \theta_3) \hat{y}_2 \\ & + (-2 - \cot \theta_2 \cot \theta_3) \hat{y}_3 + (\cot \theta_3) \hat{y}_4] \\ & + \frac{L_4(t)}{\sin \theta_-} [(\cos \theta_1 - \cos \theta_1 \cot \theta_2 \cos \theta_3 + \cot \theta_3 \sin \theta_1) \hat{i}_{in} + \end{aligned}$$

$$+ (\cos \theta_{in} - \cos \theta_{in} \cot \theta_2 \cot \theta_3 + \cot \theta_3 \sin \theta_{in}) \hat{i}_1 - \frac{\cot \theta_3 \hat{i}_2 - \frac{1}{\sin \theta_3} \hat{i}_3}{\sin \theta_2}, \quad (\text{III})$$

$$\hat{Y}_{out}(t) = \frac{L_4(t)}{\sin \theta_-} \{ [-\cot \theta_2 (\cos \theta_+ + \cos \theta_-) + \sin \theta_+] \hat{x}_{in} + (-\cot \theta_2 \sin \theta_+ - \cos \theta_+ + \cos \theta_-) \hat{y}_{in} \} + L_4(t) [2(\cot \theta_2) \hat{y}_1 - 2\hat{y}_2 + (\cot \theta_2) \hat{y}_3 + \hat{y}_4] + \frac{L_4(t)}{\sin \theta_2} \left[\frac{\cos(\theta_{in} + \theta_2)}{\sin \theta_-} \hat{i}_{in} + \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_-} \hat{i}_1 - \hat{i}_2 \right]. \quad (\text{II2})$$

1. Raussendorf R., Briegel H. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5188 (2001).
2. Briegel H.J., Browne D.E., Dur W. *Nat. Phys.*, **5** (1), 19 (2009).
3. Nielsen M.A. *Phys. Lett. A*, **308** (2-3), 96 (2003).
4. Menicucci N. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 110501 (2006).
5. Lloyd S., Braunstein S.L. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1784 (1999).
6. Jing Zhang, Braunstein S. *Phys. Rev. A*, **73**, 032318 (2006).
7. Yokoyama S., Ukai R., Armstrong S.C. *Nat. Photonics*, **7**, 982 (2013).
8. Menicucci N.C. *Phys. Rev. A*, **83**, 062314 (2011).
9. Beltran L. et al. *J. Opt.*, **19**, 044005 (2017).
10. Yang R., Wang J., Zhang J., Liu K., Gao J. *J. Opt. Soc. Am. B*, **33** (12), 2424 (2016).
11. Milne D. et al. *Phys. Rev. A*, **85**, 032310 (2012).
12. Hui Sun Li, Qin Chen Yan, Xiang Li Gao. *Opt. Express*, **20** (3), 3176 (2012).
13. Houhou O. et al. *Phys. Rev. A*, **92**, 063843 (2015).
14. Medeiros de Araujo R., Roslund J., Cai Y., Ferrini G., Fabre C., Treps N. *Phys. Rev. A*, **89**, 053828 (2014).
15. Moran Chen, Menicucci N., Pfister O. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 120505 (2014).
16. Pysher M., Miwa Y., Shahrokshahi R., Bloomer R., Pfister O. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 030505 (2011).
17. Pooser R., Jing J. *Phys. Rev. A*, **90**, 043841 (2014).
18. Gu M. et al. *Phys. Rev. A*, **79**, 062318 (2009).
19. Bogoljubov N. *Il Nuovo Cimento*, **7**, 794 (1958).
20. Raussendorf R. et al. *Ann. Rev. Cond. Matt. Phys.*, **3**, 239 (2012).
21. Braunstein S.L. *Phys. Rev. A*, **71**, 055801 (2005).
22. Van Loock P., Weedbrook C., Gu M. *Phys. Rev. A*, **76**, 032321 (2007).
23. Reck M., Zeilinger A., Bernstein H.J., Bertani P. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 58 (1994).
24. Kuz'min V.V., Vetlugin A.N., Sokolov I.V. *Opt. Spectrosc.*, **119** (6), 1004 (2015).
25. Manukhova A.D., Tikhonov K.S., Golubeva T.Yu., Golubev Yu.M. *Phys. Rev. A*, **96**, 023851 (2017).
26. Zhang J., Wang J.J., Yang R.G., Liu K., Gao J.R. *Opt. Express*, **25**, 27172 (2017).
27. Ukai R., Yoshikawa J., Iwata N., van Loock P., Furusawa A. *Phys. Rev. A*, **81**, 032315 (2010).