

Нормальные моды при электромагнитно-индуцированной прозрачности в Λ -схеме вырожденных энергетических уровней

О.М.Паршков

Приведены результаты аналитического исследования процесса формирования нормальных мод пробного излучения при электромагнитно-индуцированной прозрачности в Λ -схеме квантовых переходов между уровнями 3P_0 , $^3P_1^0$ и 3P_2 при эллиптической поляризации управляющего поля и неоднородном уширении. Нормальные моды представляют собой эллиптически поляризованные волны с одинаковыми эксцентриситетами эллипсов поляризации, но с разными направлениями вращения векторов напряженности электрического поля. Величины эксцентриситетов мод определяются только значением эксцентриситета эллипса поляризации управляющего поля. Главная ось эллипса поляризации одной из нормальных мод параллельна главной оси эллипса поляризации управляющего излучения, тогда как главная ось эллипса поляризации другой нормальной моды перпендикулярна последней. Групповая скорость моды первого типа превышает групповую скорость моды второго типа, причем обе скорости зависят от эксцентриситета эллипса поляризации управляющего излучения и его интенсивности. Пробное излучение с произвольной эллиптической поляризацией является суммой нормальных мод, распространяющихся независимо друг от друга. Ввиду различия групповых скоростей этих мод входящий в среду импульс пробного излучения распадается внутри среды на два отдельных импульса, каждый из которых представляет собой одну из нормальных мод. Доля энергии, приходящаяся на каждую нормальную моду, зависит только от поляризационных характеристик взаимодействующих полей и не зависит от их интенсивностей.

Ключевые слова: электромагнитно-индуцированная прозрачность, эллиптическая поляризация излучений, двойное лучепреломление, нормальные моды.

1. Введение

Использование деструктивной интерференции амплитуд вероятностей квантовых переходов между энергетическими уровнями при резонансном возбуждении среды когерентным лазерным излучением представляет значительный интерес как с теоретической точки зрения, так и в связи с возможными применениями. В зависимости от постановки эксперимента такая интерференция лежит в основе ряда эффектов, наиболее значимыми из которых являются эффекты пленения населенностей [1, 2] и электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭМИП) [3–5]. Ограничиваясь явлением ЭМИП, отметим, что его использование перспективно для создания систем оптической квантовой памяти [4], систем квантовых коммуникаций [4, 6, 7] и квантовой информации [3–5], устройств точных магнитных измерений [8] и хронометрии [9]. Эффект ЭМИП лежит в основе методов создания больших оптических нелинейностей [5, 10] и усиления излучения без инверсии населенностей [11]. Продолжается активное теоретическое изучение специфики ЭМИП в различных ситуациях. Так, например, исследуются особенности этого явления в сильно коррелированных квантовых газах [12], в радиодиапазоне [13], на примесях в фотонных кристаллах [14], в присутствии нановолокна [15].

О.М.Паршков. Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77; e-mail: orparshkov@mail.ru

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г., после доработки – 22 августа 2018 г.

Явление ЭМИП приводит к ряду эффектов, связанных с поляризационными характеристиками взаимодействующих излучений при наличии вырождения энергетических уровней квантовых переходов. В [16, 17] теоретически и экспериментально исследовалось сопровождающее ЭМИП вращение плоскости поляризации пробного поля при изменении напряженности управляющего излучения, а в [18, 19] – влияние постоянного магнитного поля на эволюцию круговых компонент пробного излучения. Линейное и круговое двойное лучепреломление пробного поля при ЭМИП теоретически и экспериментально исследовалось в [20]. В теоретической работе [21] предсказана возможность распространения пробного поля при ЭМИП в виде двух мод с различными состояниями поляризации.

Результаты численного моделирования двойного лучепреломления, сопровождающего ЭМИП в поле эллиптически поляризованного управляющего излучения, приведены в [22], объектом изучения являлась Λ -схема квантовых переходов между вырожденными энергетическими уровнями 3P_0 , 3P_2 , $^3P_1^0$ изотопа ^{208}Pb , в парах которого экспериментально наблюдалось ЭМИП поляризованных по кругу лазерных полей [23, 24]. Моделирование выявило возможность представления пробного поля в виде суммы эллиптически поляризованных нормальных мод. Однако применение численного метода не позволяет судить об общности полученных в [22] результатов и не обеспечивает детального понимания связей характеристик нормальных мод с характеристиками полей взаимодействующих излучений. Цель настоящей статьи состоит в изложении аналитической теории процесса ЭМИП, численное моделирование которого описано в работе [22].

2. Исходные уравнения

Рассматриваемая Λ -схема (рис. 1) состоит из невырожденного нижнего (3P_0), пяти- и трехкратно вырожденных среднего (3P_2) и верхнего (${}^3P_1^0$) уровней изотопа ${}^{208}\text{Pb}$. Пусть ϕ_k ($k = 1, 2, \dots, 9$) – ортонормированный базис из общих собственных функций операторов энергии, квадрата и проекции момента импульса на ось z для изолированного атома, соответствующих нижнему ($k = 1, M = 0$), верхнему ($k = 2, 3, 4, M = -1, 0, 1$) и среднему ($k = 5, 6, \dots, 9, M = -2, -1, 0, 1, 2$) уровням. Обозначим через D_1 и D_2 приведенные электродипольные моменты переходов ${}^3P_0 \rightarrow {}^3P_1^0$ и ${}^3P_2 \rightarrow {}^3P_1^0$ соответственно, а через ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) – центральные частоты этих переходов (рис. 1). Положим также $T_1 = 1/\Delta_1$, где Δ_1 – полуширина (по уровню e^{-1} высоты) плотности распределения частот ω'_1 переходов ${}^3P_0 \rightarrow {}^3P_1^0$ вследствие эффекта Доплера.

Зададим полное электрическое поле двух лазерных импульсов, распространяющихся вдоль оси z , в виде

$$E = E_1 + E_2, \tag{1}$$

где

$$E_l = \mu_l [iE_{xl} \cos(\omega_l t - k_l z + \delta_{xl}) + jE_{yl} \cos(\omega_l t - k_l z + \delta_{yl})],$$

$$l = 1, 2,$$

– напряженность электрического поля; ω_l – несущая частота пробного ($l = 1$) и управляющего ($l = 2$) полей; $\mu_l = \hbar \sqrt{2l + 1} / (|D_l| T_1)$; i, j – орт-векторы осей x и y ; E_{xl}, E_{yl} – неотрицательные действительные амплитуды; δ_{xl}, δ_{yl} – фазовые добавки x и y компонент пробного ($l = 1$) и управляющего ($l = 2$) полей; $k_l = \omega_l/c$. Величины $E_{xl}, E_{yl}, \delta_{xl}, \delta_{yl}$ являются функциями от z и t .

Определим переменные f_l и g_l равенствами

$$f_l = [E_{xl} \exp(i\delta_{xl}) - iE_{yl} \exp(i\delta_{yl})] / \sqrt{2},$$

$$g_l = [E_{xl} \exp(i\delta_{xl}) + iE_{yl} \exp(i\delta_{yl})] / \sqrt{2}. \tag{2}$$

Следуя [25], далее будем именовать f_l и g_l амплитудами левой и правой круговых компонент пробного ($l = 1$) и управляющего ($l = 2$) полей. Волновую функцию Ψ атома в поле (1) представим в виде разложения по базису ϕ_k ($k = 1, 2, \dots, 9$):

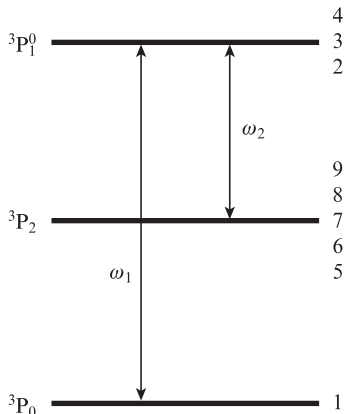


Рис. 1. Λ -схема квантовых переходов; числа справа – номера состояний в математической модели.

$$\Psi = \bar{c}_1 \phi_1 + \left(\sum_{k=2}^4 \bar{c}_k \phi_k \right) \exp(-i\xi_1) + \left(\sum_{k=5}^9 \bar{c}_k \phi_k \right) \exp[-i(\xi_1 - \xi_2)],$$

где \bar{c}_k ($k = 1, 2, \dots, 9$) – амплитуды вероятности заселения квантовых состояний; $\xi_l = \omega_l t - k_l z$; $l = 1, 2$. Введем c_i следующими соотношениями:

$$c_1 = p_1^* \bar{c}_1, \quad c_2 = \bar{c}_2, \quad c_4 = \bar{c}_4, \quad c_5 = p_2 \bar{c}_5,$$

$$c_7 = (1/\sqrt{6}) p_2 \bar{c}_7, \quad c_9 = p_2 \bar{c}_9,$$

где $p_l = 2D_l / |D_l|$, $l = 1, 2$. Определим нормированные независимые переменные s и w :

$$s = z/z_0, \quad w = (t - z/c)/T_1,$$

где $z_0 = 3\hbar c / (2\pi N |D_1|^2 T_1 \omega_1)$; N – концентрация атомов. Используя уравнения Максвелла и уравнение Шрёдингера, получим в первом приближении медленных огибающих следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial s} &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_1 c_2^* \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} &= -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \xi \int_{-\infty}^{+\infty} (c_4^* c_9 + c_2^* c_7) \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s} &= -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_1 c_4^* \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1, \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \xi \int_{-\infty}^{+\infty} (c_2^* c_5 + c_4^* c_7) \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1, \\ \frac{\partial c_1}{\partial w} &= -i(f_1 c_2 - g_1 c_4), \\ \frac{\partial c_2}{\partial w} + i\varepsilon_1 c_2 &= -\frac{i}{4}(f_1^* c_1 + g_2^* c_5 - f_2^* c_7) - \gamma c_2, \\ \frac{\partial c_4}{\partial w} + i\varepsilon_1 c_4 &= \frac{i}{4}(g_1^* c_1 - g_2^* c_7 + f_2^* c_9) - \gamma c_4, \\ \frac{\partial c_5}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c_5 &= -ig_2 c_2, \\ \frac{\partial c_7}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c_7 &= \frac{i}{6}(f_2 c_2 - g_2 c_4), \\ \frac{\partial c_9}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c_9 &= if_2 c_4, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varepsilon_1 = (\omega'_1 - \omega_1)/\Delta_1$; $\varepsilon_2 = \beta \varepsilon_1$; $\xi = 0.6\beta |D_2/D_1|^2$; $\beta = \omega_2/\omega_1$.

Система уравнений (3) не содержит амплитуд \bar{c}_3, \bar{c}_6 и \bar{c}_8 , что согласуется с правилами отбора ($\Delta M = \pm 1$) для переходов под действием круговых компонент поля (1). В уравнения для c_2 и c_4 феноменологически введены слагаемые $-\gamma c_2$ и $-\gamma c_4$ для учета спонтанного распада состояний верхнего уровня рассматриваемой Λ -схемы. Здесь $\gamma = T_1/(2\tau)$; τ – радиационное время жизни уровня ${}^3P_1^0$.

Ниже используются параметры a_l, α_l, γ_l эллипса поляризации (ЭП) пробного ($l = 1$) и управляющего ($l = 2$) излучений. Здесь a_l – большая полуось ЭП, измеренная в единицах μ_i ; α_l – угол ее наклона к оси x в радианах; γ_l – параметр сжатия ($0 \leq \alpha_l < \pi, -1 \leq \gamma_l \leq +1$) [26]. Величина $|\gamma_l|$ определяет отношение малой оси ЭП к его большой оси. Отрицательные значения γ_l соответствуют правой

эллиптической поляризации излучения, положительные – левой [25]. Следует отметить, что задание величин a_l, α_l, γ_l , а также δ_{xl} эквивалентно заданию поля формулой (1), поскольку нетрудно доказать наличие следующих соотношений:

$$\begin{aligned} E_{xl} &= a_l \sqrt{[1 + \gamma_l^2 + (1 - \gamma_l^2) \cos 2\alpha_l]/2}, \\ E_{yl} &= a_l \sqrt{[1 + \gamma_l^2 - (1 - \gamma_l^2) \cos 2\alpha_l]/2}, \\ \exp[i(\delta_{yl} - \delta_{xl})] &= \frac{(1 - \gamma_l^2) \sin 2\alpha_l + 2i\gamma_l}{\sqrt{(1 + \gamma_l^2)^2 - (1 - \gamma_l^2)^2 \cos^2 2\alpha_l}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем полагать, что пробное поле настолько слабо по сравнению с управляющим, что его влияние может быть учтено в рамках метода последовательных приближений по степеням малого параметра $\tilde{v} = \sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2} / \sqrt{E_{x2}^2 + E_{y2}^2}$. В нулевом приближении этого метода предполагается, что $\tilde{v} = 0$, т. е. пробное поле отсутствует. Поскольку энергетические уровни квантовых переходов, резонансных управляющему полю, первоначально не заселены, то это поле не взаимодействует со средой в нулевом приближении. Это означает, что в нулевом приближении выполняются следующие соотношения:

$$f_2(w, s) = f_{20}(w), \quad g_2(w, s) = g_{20}(w), \quad (5)$$

где $f_{20}(w)$ и $g_{20}(w)$ – круговые компоненты управляющего поля на входе в среду. Кроме того, в этом приближении $|c_1| = 2|\bar{c}_1| = 2$ и $c_i = 0$ ($i = 2, 4, 5, 7, 9$), поскольку предполагается, что в отсутствие пробного поля заселен только нижний энергетический уровень. Отметим, что значения круговых компонент управляющего излучения, а также величины c_1 одинаковы в нулевом и в первом порядках метода последовательных приближений.

Везде ниже полагается, что $\alpha_2 = 0$, т. е. что большая ось ЭП управляющего поля совпадает с осью x . Тогда из формул (2) и (4) вытекает, что

$$f_{20}(w) = \kappa_2 g_{20}(w), \quad \kappa_2 = (1 + \gamma_2)/(1 - \gamma_2). \quad (6)$$

Учитывая эти выражения и полагая $c_1 = 2$, получаем из (3) уравнения эволюции пробного поля в первом порядке метода последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial s} &= \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_2^* \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s} &= -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_4^* \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1, \\ \frac{\partial c_2}{\partial w} + i\varepsilon_1 c_2 &= -\frac{i}{2} f_1^* - \frac{i}{4} g_{20}^*(w) (c_5 - \kappa_2 c_7) - \gamma c_2, \\ \frac{\partial c_4}{\partial w} + i\varepsilon_1 c_4 &= \frac{i}{2} g_1^* - \frac{i}{4} g_{20}^*(w) (c_7 - \kappa_2 c_9) - \gamma c_4, \\ \frac{\partial c_5}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c_5 &= -i g_{20}(w) c_2, \\ \frac{\partial c_7}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c_7 &= \frac{i}{6} g_{20}(w) (\kappa_2 c_2 - c_4), \\ \frac{\partial c_9}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) c_9 &= \frac{i}{6} \kappa_2 g_{20}(w) c_2. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Нормальные моды

Везде ниже полагается, что $|\gamma_2| \neq 1$, т. е. что поляризация управляющего излучения не является круговой, и что

$$f_{20}(w) = f_{20}, \quad g_{20}(w) = g_{20}, \quad (8)$$

где f_{20} и g_{20} – постоянные величины. Условия (8) соответствуют схеме контринтуитивного наложения полей [3], которая наиболее часто используется при экспериментальном изучении ЭМИП. Введем в рассмотрение два пробных поля с напряженностями $E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$. Поле $E_1^{(1)}$ описывает эллиптически поляризованный пробный импульс со следующими характеристиками:

$$a_1 = a_1^{(1)}, \quad \alpha_1 = \alpha_1^{(1)} = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_1^{(1)}, \quad \delta_{x1} = \delta_{x1}^{(1)}, \quad (9)$$

где $a_1^{(1)}$ зависит от w и s , тогда как $\gamma_1^{(1)}, \delta_{x1}^{(1)}$ являются постоянными величинами. Этот импульс будем называть параллельной модой, т. к. главная ось его ЭП параллельна главной оси ЭП управляющего поля. Поле с $E_1^{(2)}$ описывает эллиптически поляризованный пробный импульс, для которого

$$a_1 = a_1^{(2)}, \quad \alpha_1 = \alpha_1^{(2)} = \pi/2, \quad \gamma_1 = \gamma_1^{(2)} = -\gamma_1^{(1)}, \quad \delta_{x1} = \delta_{x1}^{(2)}, \quad (10)$$

причем $a_1^{(2)}$ зависит от w и s , тогда как $\gamma_1^{(2)}, \delta_{x1}^{(2)}$ постоянны. Этот импульс будем называть перпендикулярной модой, поскольку главная ось его ЭП перпендикулярна главной оси ЭП управляющего излучения. Если $f_1^{(i)}, g_1^{(i)}$ являются комплексными амплитудами левополяризованной (σ_-) и правополяризованной (σ_+) круговых компонент параллельной ($i = 1$) и перпендикулярной ($i = 2$) мод, то, используя (2) и (4), находим

$$f_1^{(1)} = \kappa g_1^{(1)}, \quad f_1^{(2)} = -\frac{1}{\kappa} g_1^{(2)}, \quad \kappa = \frac{1 + \gamma_1^{(1)}}{1 - \gamma_1^{(1)}}. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что векторы Джонса [25] параллельной и перпендикулярной мод взаимно ортогональны, и, следовательно, напряженность E_1 пробного поля может быть представлена в виде $E_1 = E_1^{(1)} + E_1^{(2)}$. Учитывая это обстоятельство и равенства (11), получаем

$$f_1 = \kappa g_1^{(1)} - (1/\kappa) g_1^{(2)}, \quad g_1 = g_1^{(1)} + g_1^{(2)}.$$

Положим, что величина κ (третье из равенств (11)) определяется соотношением

$$\kappa = -p + \sqrt{p^2 + 1}, \quad (12)$$

где $p = 10\gamma_2/(1 - \gamma_2^2)$.

Комбинируя затем уравнения (7), находим, что эволюция величины $g_1^{(1)}$ описывается системой уравнений (см. Приложение 1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1^{(1)}}{\partial s} &= \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\kappa^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1^* \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1, \\ \frac{\partial U_1}{\partial w} + i\varepsilon_1 U_1 &= -\frac{i}{2} (1 + \kappa^2) g_1^{(1)*} - \frac{i}{4} g_2^* V_1 - \gamma U_1, \\ \frac{\partial V_1}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) V_1 &= -i g_2 q_1 U_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Входящие в (13) величины U_1, V_1 и q_1 определяются формулами

$$U_1 = \kappa c_2 - c_4, \quad V_1 = \kappa c_5 - (\kappa_2 \kappa + 1)c_7 + \kappa_2 c_9, \quad (14)$$

$$q_1 = 1 + \kappa_2 [\kappa_2 + (1/\kappa)]/6.$$

Подобным образом находим, что эволюция величины $g_1^{(2)}$ определяется системой уравнений

$$\frac{\partial g_1^{(2)}}{\partial s} = -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} U_2^* \exp(-\varepsilon_1^2) d\varepsilon_1,$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial w} + i\varepsilon_1 U_2 = \frac{i}{2} \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa^2} g_1^{(2)*} - \frac{i}{4} g_2^* V_2 - \gamma U_2, \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) V_2 = -ig_2 q_2 U_2,$$

где

$$U_2 = (1/\kappa)c_2 + c_4; \quad V_2 = (1/\kappa)c_5 - (\kappa_2/\kappa - 1)c_7 - \kappa_2 c_9; \quad (16)$$

$$q_2 = 1 + \kappa_2(\kappa_2 - \kappa)/6.$$

Системы уравнений (13) и (15) не содержат общих независимых переменных и, следовательно, могут решаться независимо друг от друга. Это означает, что при выполнении условия (12) параллельная и перпендикулярная моды пробного поля распространяются в среде также независимо друг от друга. При этом согласно (9) и (10) поляризационные характеристики этих мод остаются неизменными. Сказанное позволяет прийти к выводу, что перпендикулярная и параллельная моды представляют собой эллиптически поляризованные нормальные моды пробного излучения.

Учитывая (12) и определение величины κ (см. (11)), можно найти зависимость величины параметра сжатия $\gamma_1^{(1)}$ ЭП параллельной нормальной моды от параметра сжатия γ_2 ЭП управляющего поля (рис.2). Видно, что знак $\gamma_1^{(1)}$ противоположен знаку γ_2 и что зависимость $\gamma_1^{(1)}$ от γ_2 описывается нечетной функцией. При $\gamma_2 = 0$ имеем $\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = 0$, т. е. в случае линейной поляризации управляющего поля обе нормальные моды линейно поляризованы. Если величина $|\gamma_2|$ приближается к единице, то $|\gamma_1^{(1)}|$ также приближается к этому значению. Следовательно, при

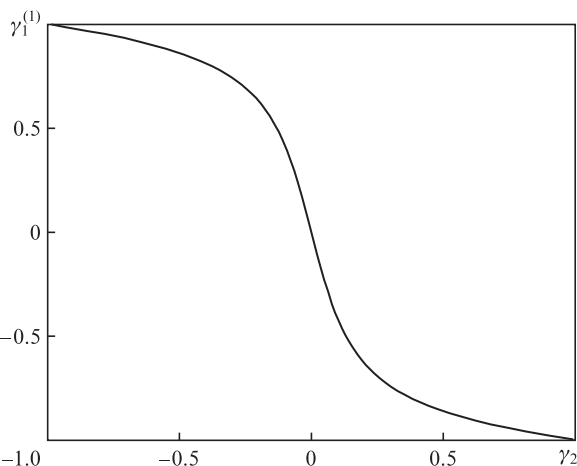


Рис.2. Зависимость $\gamma_1^{(1)}$ от γ_2 .

круговой поляризации пробного поля обе нормальные моды также будут поляризованы по кругу.

Предположим, что на входной поверхности среды ($s = 0$) пробное поле представляет собой эллиптически поляризованный импульс с постоянным во времени состоянием поляризации. Первоначально рассмотрим случай $\gamma_2 \neq 0$. Обозначим через $a_{10}, \alpha_{10}, \gamma_{10}, \delta_{x10}$ значения $a_1, \alpha_1, \gamma_1, \delta_{x1}$ на входной поверхности. Из всех этих величин только a_{10} предполагается зависимой от времени w . Ввиду отсутствия фазовой модуляции входного пробного поля, без ограничения общности теории можно положить $\delta_{x10} = 0$. Пусть $a_{10}^{(i)}, \alpha_{10}^{(i)}, \gamma_{10}^{(i)}, \delta_{x10}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) – значения $a_1^{(i)}, \alpha_{10}^{(i)}, \gamma_{10}^{(i)}, \delta_{x10}^{(i)}$ на входной поверхности. Согласно (9) и (10) $\alpha_{10}^{(1)} = 0$, а $\alpha_{10}^{(2)} = \pi/2$, тогда как $\gamma_{10}^{(1)}$ и $\gamma_{10}^{(2)}$ находятся изложенным способом. Величины $a_{10}^{(i)}$ и $\delta_{x10}^{(i)}$ подлежат определению.

Введем в рассмотрение не зависящие от w и s величины A, B, C :

$$A = \varepsilon_+(\alpha_{10}, \gamma_{10}), \quad B = \text{sign}(\gamma_2) \varepsilon_-(\alpha_{10}, \gamma_{10}) \cos \delta_{y10}, \quad (17)$$

$$C = -\text{sign}(\gamma_2) \varepsilon_-(\alpha_{10}, \gamma_{10}) \sin \delta_{y10},$$

где

$$\varepsilon_{\pm}(\alpha_{10}, \gamma_{10}) = \sqrt{[1 + \gamma_{10}^2 \pm (1 - \gamma_{10}^2) \cos 2\alpha_{10}]/2};$$

$$\exp(i\delta_{y10}) = \frac{(1 - \gamma_{10}^2) \sin 2\alpha_{10} + 2i\gamma_{10}}{\sqrt{(1 + \gamma_{10}^2)^2 - (1 - \gamma_{10}^2)^2 \cos^2 2\alpha_{10}}};$$

$\text{sign}(x)$ – знаковая функция. Пусть X, Y, Z и T задаются формулами

$$X = \frac{A + |\gamma_1^{(1)}|C}{1 + (\gamma_1^{(1)})^2}, \quad Y = \frac{|\gamma_1^{(1)}|B}{1 + (\gamma_1^{(1)})^2}, \quad Z = \frac{|\gamma_1^{(1)}|A - C}{1 + (\gamma_1^{(1)})^2}, \quad (18)$$

$$T = -\frac{B}{1 + (\gamma_1^{(1)})^2}.$$

Тогда недостающие характеристики $a_{10}^{(i)}, \delta_{x1}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) нормальных мод на входной поверхности среды представляются формулами (см. Приложение 2)

$$a_{10}^{(1)} = a_{10} \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad a_{10}^{(2)} = a_{10} \sqrt{Z^2 + T^2},$$

$$\cos \delta_{x1}^{(1)} = X/\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \sin \delta_{x1}^{(1)} = Y/\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (19)$$

$$\cos \delta_{x1}^{(2)} = Z/\sqrt{Z^2 + T^2}, \quad \sin \delta_{x1}^{(2)} = T/\sqrt{Z^2 + T^2}.$$

Согласно (19) функции $a_{10}^{(i)}(w)$, $i = 1, 2$, пропорциональны функции $a_{10}(w)$. Другими словами, зависимость от времени w больших осей ЭП нормальных мод на входной поверхности подобна зависимости от времени большой оси ЭП входного пробного импульса. При круговой поляризации входного пробного излучения угол α_{10} не определен, но выражения (19) остаются справедливыми при любом выборе α_{10} .

В случае $\gamma_2 = 0$ выражения для $a_{10}^{(i)}, \delta_{x1}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) через параметры входного пробного импульса имеют следующий вид:

$$a_{10}^{(1)} = a_{10} |\cos \alpha_{10}|, \quad \delta_{x1}^{(1)} = 0, \quad a_{10}^{(2)} = a_{10} \sin \alpha_{10},$$

$$\delta_{x1}^{(2)} = 0 \text{ при } 0 \leq \alpha_{10} \leq \pi/2, \quad (20)$$

$$a_{10}^{(1)} = a_{10} |\cos \alpha_{10}|, \quad \delta_{x1}^{(1)} = 0, \quad a_{10}^{(2)} = a_{10} \sin \alpha_{10},$$

$$\delta_{x1}^{(2)} = \pi \text{ при } \pi/2 < \alpha_{10} < \pi.$$

Распространение пробного излучения в среде можно представить как распространение двух независимых друг от друга нормальных мод. При этом на входной поверхности характеристики этих мод определяются формулами (19) или (20) по известным характеристикам входного пробного излучения. Если входное пробное поле имеет вид достаточно короткого импульса, величина a_{10} существенно отличается от нуля лишь в некотором интервале времени w . Согласно (19) и (20) такими же свойствами будут обладать величины $a_{10}^{(1)}$ и $a_{10}^{(2)}$, и, следовательно, в среде каждая нормальная мода будет представлять собой импульс. По мере распространения импульс, соответствующий каждой нормальной моде, деформируется и затухает. Однако в присутствии ЭМИП указанные факторы достаточно медленно проявляются с ростом расстояния, пройденного импульсом в среде. Это позволяет приближенно оценить энергетические характеристики и групповые скорости распространения импульсов нормальных мод.

Обозначим через $I_{10}^{(1)}$ и $I_{10}^{(2)}$ интенсивности перпендикулярной и параллельной нормальных мод на входной поверхности соответственно. Тогда

$$I_{10}^{(2)}/I_{10}^{(1)} = (a_{10}^{(2)}/a_{10}^{(1)})^2. \tag{21}$$

Величины $a_{10}^{(1)}$ и $a_{10}^{(2)}$ в свою очередь могут быть выражены через поляризационные характеристики α_{10} и γ_{10} входного пробного импульса с помощью формул (19) или (20). Формула (21) может быть использована для приближенной оценки отношения интенсивностей нормальных мод внутри среды.

Отношение энергий импульсов нормальных мод в среде определяется двумя факторами. Первый из них – отношение энергий импульсов на входной поверхности среды. Это отношение совпадает с отношением их интенсивностей ввиду независимости от времени величины $a_{10}^{(2)}/a_{10}^{(1)}$ и, согласно (19), (20), зависит только от $\gamma_2, \alpha_{10}, \gamma_{10}$. На рис.3 представлены линии уровня функции $R(\alpha_{10}, \gamma_{10}, \gamma_1)$ – доли энергии входного пробного импульса, заключенной в параллельной моде на входной поверхности при $\alpha_{10} = \pi/6$. Согласно рис.3 эта доля больше 0.5 в случае разных по знаку γ_{10}, γ_1 .

Второй фактор заключается в различии скоростей поглощения энергий нормальных мод средой. Согласно общей теории ЭМИП [1] можно ожидать, что энергия медленнее распространяющегося импульса перпендикулярной моды (см. ниже) затухает быстрее, чем энергия импульса параллельной моды.

Обозначим через $V_1^{(i)}$ групповую скорость импульса параллельной ($i = 1$) и перпендикулярной ($i = 2$) нормальных мод в системе отсчета s, w . Можно показать (Приложение 3), что

$$V_1^{(i)} = (1/4) |g_2|^2 q_i \quad (i = 1, 2), \tag{22}$$

где q_i определяются последними равенствами в (14) и (16).

Формулы (22) можно переписать в виде

$$V_1^{(i)} = \left(\frac{1}{8}\right) I_2 \frac{(1 - \gamma_2)^2}{1 + \gamma_2^2} q_i \quad (i = 1, 2),$$

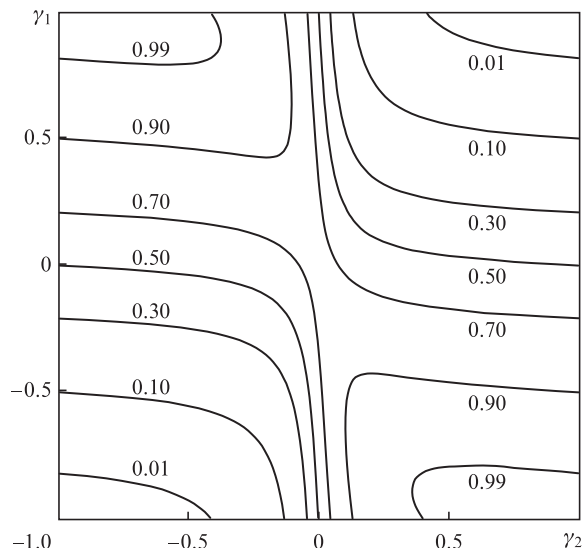


Рис.3. Линии уровня функции $R(\alpha_{10}, \gamma_{10}, \gamma_1)$ при $\alpha_{10} = \pi/6$.

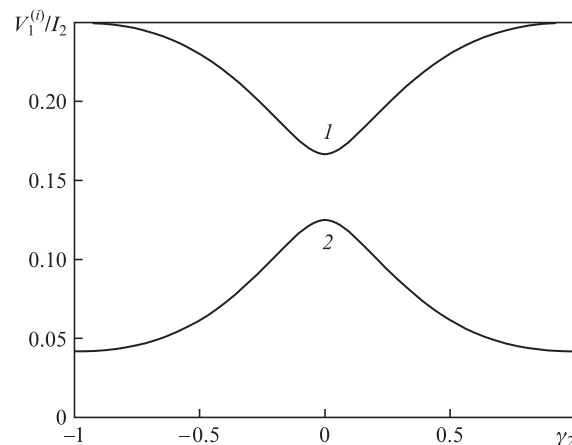


Рис.4. Зависимости $V_1^{(1)}/I_2$ (1) и $V_1^{(2)}/I_2$ (2) от γ_2 .

где I_2 – интенсивность управляющего излучения в единицах μ_2^2 . Это означает, что групповые скорости мод уменьшаются с уменьшением интенсивности управляющего излучения. Данное обстоятельство согласуется с выводами теории ЭМИП [1] о зависимости скорости импульсов пробного поля от интенсивности управляющего излучения. На рис.4 представлены зависимости $V_1^{(i)}/I_2$ от γ_2 . Видно, что параллельная мода всегда имеет большую групповую скорость, чем перпендикулярная. При этом различие между скоростями нормальных мод при фиксированном значении I_2 минимально в случае линейной поляризации управляющего излучения и монотонно возрастает с приближением поляризации управляющего поля к круговой. Кроме того, из рис.4 следует, что величины $V_1^{(i)}$, $i = 1, 2$, являются четными функциями γ^2 .

4. Нормальные моды: сравнение аналитических и численных результатов

В работе [22] описаны результаты численного исследования решения системы уравнений (3) при краевых условиях, соответствующих возможности возникновения нормальных мод пробного поля. Сравним эти результаты с предсказаниями аналитической теории. Граничные условия первого расчета работы [22], описывающие поля

пробного и управляющего излучения на входной поверхности ($s = 0$), выбирались в виде

$$\alpha_{10} = \pi/6, \quad a_{10} = 0.2\text{sech}[(w - 20)/5], \quad (23)$$

$$\gamma_{10} = -0.5, \quad \delta_{x10} = 0,$$

$$\alpha_{20} = 0, \quad \alpha_{20} = 6.6516, \quad \gamma_{20} = -0.3, \quad \delta_{x20} = 0. \quad (24)$$

Начальные условия ($w = 0$) соответствовали нахождению всех атомов ^{208}Pb на нижнем энергетическом уровне.

Условия (23) описывают входной импульс пробного излучения с длительностью 1.5 нс и пиковой интенсивностью 65 Вт/см². Постоянная интенсивность управляющего излучения согласно (24) составляет приблизительно 20 кВт/см². Поскольку пиковая интенсивность входного пробного импульса более чем в 300 раз меньше интенсивности управляющего поля, описываемая формулами (23), (24) ситуация относится к случаю слабого пробного излучения. (Обоснование выбора значений параметров резонансной среды и входных излучений приведено в [22].)

Результаты расчета представлены на рис.5,а-в. Зависимости интенсивности пробного излучения I_1 в единицах μ_1^2 от w при различных фиксированных расстояниях s представлены на рис.5,а-в толстыми линиями. Видно, что на достаточно малых расстояниях внутри среды импульс пробного излучения начинает разделяться на два отдельных импульса (импульсы 1 и 2 на рис.5,б). Вид кривых, описывающих эволюцию α_1 и γ_1 , свидетельствует о том, что по мере прохождения пробным полем данной точки пространства угол α_1 плавно изменяется от нуля до $\sim \pi/2$, тогда как γ_1 плавно уменьшается от ~ 0.74 до значения, близкого к -0.74 .

На достаточно больших расстояниях энергия пробного излучения оказывается сконцентрированной в двух импульсах (импульсы 1, 2 на рис.5,в). В области локализации каждого из этих импульсов поляризационные характеристики излучения остаются неизменными как в про-

странстве, так и во времени. Для импульса 1 расчет дает $\alpha_1 = 0, \gamma_1 = 0.7415$, а для импульса 2 имеем $\alpha_1 = \pi/2, \gamma_1 = -0.7418$.

Используя формулу (12) и третью из формул (11), находим предсказанные аналитической теорией $\gamma_1^{(1)} = 0.7414, \gamma_1^{(2)} = -0.7414$. Это хорошо согласуется с полученными выше значениями γ_1 для импульсов 1 и 2 на рис.5,в соответственно.

Используя найденные значения $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_1^{(2)}$ и формулы (19), находим все характеристики параллельной и перпендикулярной нормальных мод, из которых складывается входное пробное поле [22]:

$$\alpha_1^{(1)} = 0, \quad a_{10}^{(1)} = 0.0720\text{sech}[(w - 20)/5], \quad (25)$$

$$\gamma_1^{(1)} = 0.7414, \quad \delta_{x1}^{(1)} = -0.4991,$$

$$\alpha_1^{(2)} = \pi/2, \quad a_{10}^{(2)} = 0.1646\text{sech}[(w - 20)/5], \quad (26)$$

$$\gamma_1^{(2)} = -0.7414, \quad \delta_{x1}^{(2)} = 0.2865.$$

Эволюция параллельной нормальной моды в среде изучалась путем численного решения системы уравнений (3) при граничных условиях (24), (25). Аналогичным способом, используя граничные условия (24), (26), изучалось поведение в среде перпендикулярной нормальной моды. Расчеты показали, что обе моды распространяются в среде без изменения поляризационных характеристик $\alpha_1^{(i)}, \gamma_1^{(i)}$, а также фаз $\delta_{x1}^{(i)}$ ($i = 1, 2$), которые при переходе от уравнений (3) к уравнениям (13), (15) предполагались неизменными.

На рис.5,г-е представлены зависимости от времени w интенсивностей параллельной (сплошные кривые) и перпендикулярной (штриховые кривые) нормальных мод на тех же расстояниях s , что и на рис.5,а,б. Для каждого расстояния и каждого времени сумма интенсивностей нормальных мод (рис.5,г-е) совпадает с интенсивностью пол-

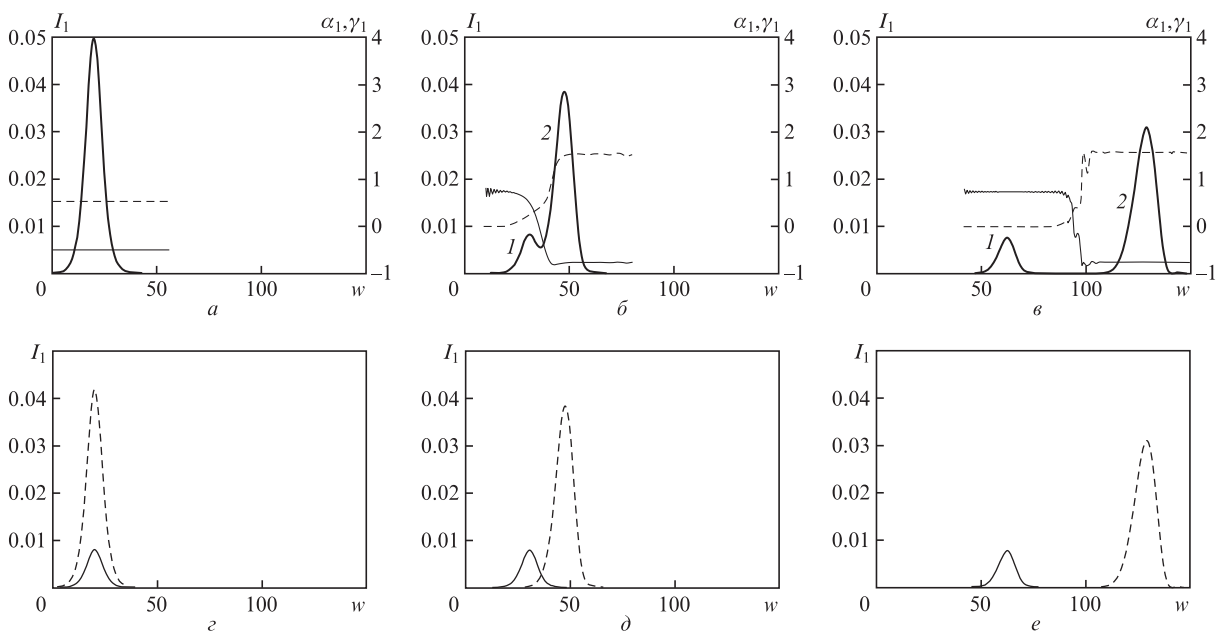


Рис.5. Эволюция характеристик пробного поля в среде при $s = 0$ (а), 100 (б) и 400 (в) (I_1 – толстые кривые, α_1 – штриховые кривые, γ_1 – тонкие кривые), а также интенсивности продольной (сплошные кривые) и перпендикулярной (штриховые кривые) нормальных мод при $s = 0$ (г), 100 (д) и 400 (е).

ного поля пробного излучения в среде с расхождением менее 0.3% (рис.5,а-в). Таким образом, численный анализ на основе решения исходного уравнения (3) подтверждает вывод о возможности представления пробного поля в среде в виде суммы нормальных мод.

Численное решение системы (3) показало, что на расстоянии $s = 400$ отношение интенсивностей перпендикулярной и параллельной мод равно 4, тогда как в соответствии с оценкой по формуле (21) это отношение составляет 5.2. Кроме того, из численного решения системы (3) получено $V_1^{(1)} = 9.4$ и $V_1^{(2)} = 3.7$ для групповых скоростей параллельной и перпендикулярной мод соответственно. Оценки по формулам (22) дают $V_1^{(1)} = 9.9$ и $V_1^{(2)} = 4.1$. Расхождение между интенсивностями и скоростями нормальных мод, полученными по формулам (21), (22) аналитической теории и в результате численного решения системы (3), объясняется тем, что при выводе данных формул не учитывались деформация и затухание в среде импульсов пробного поля. Отметим, что данные факторы в большей степени проявляются в эволюции перпендикулярной нормальной моды. Поэтому отклонения полученных по формулам (21), (22) величин для перпендикулярной нормальной моды от значений, следующих из численного решения уравнения (3), превышают соответствующие отклонения для параллельной нормальной моды.

Дополнительные численные результаты, полученные при разных значениях параметров входного пробного и управляющего излучений, и соответствующие размерные оценки содержатся в работе [22].

5. Заключение

Аналитическое рассмотрение подтвердило выводы численного анализа работы [22] о том, что в случае ЭМИП в Λ -схеме вырожденных квантовых переходов при эллиптической поляризации управляющего поля изотропная среда может приобрести свойство двойного лучепреломления с эллиптически поляризованными нормальными модами пробного поля. Отметим, что двойное лучепреломление с нормальными модами такого типа возникает при распространении радиоволн в замагниченной космической плазме [27]. Большая ось ЭП одной из нормальных мод параллельна большой оси ЭП управляющего излучения, тогда как большая ось ЭП другой нормальной моды перпендикулярна ей. Направления вращения векторов электрических полей нормальных мод противоположны, причем у моды первого типа оно противоположно аналогичному направлению для управляющего поля. Экцентриситеты ЭП обеих мод совпадают.

Аналитически показано, что достаточно слабое пробное поле может быть представлено как сумма нормальных мод, которые внутри среды распространяются независимо друг от друга. Показано, что мода первого типа (параллельная мода) имеет большую групповую скорость, чем мода второго типа (перпендикулярная мода). В связи с этим на достаточно большом расстоянии от входной поверхности энергия пробного поля сосредотачивается в двух отдельных импульсах. На начальном этапе распада пробного импульса импульс нормальной моды первого типа имеет большую интенсивность, чем импульс моды второго типа, если направления вращения векторов напряженности электрического поля входного пробного импульса и управляющего излучения противоположны. При одинаковых направлениях вращения более интенсив-

ным является импульс нормальной моды второго типа. Во всех случаях нормальные моды первого типа распространяются в среде с меньшим затуханием, чем нормальные моды второго типа.

Отметим, что стационарный режим ЭМИП в отсутствие неоднородного уширения при таком же выборе энергетических уровней, как и в нашем случае, исследовался в теоретической работе [21]. Однако в [21] в качестве сильного управляющего поля рассматривалось поле с большей частотой. В [21] показано, что в этом случае также возможно существование нормальных мод, но только одна из них участвует в переносе энергии пробного излучения, тогда как другая испытывает сильное затухание.

Приложение 1

Уравнения (13) вытекают из системы уравнений (7) при выполнении условия

$$1 + \kappa_2[\kappa_2 + (1/\kappa)]/6 = \kappa^2 + \kappa[\kappa_2 + (1/\kappa)]/6. \quad (\text{П1.1})$$

Уравнения (15) следуют из системы уравнений (7) при выполнении условия

$$1 + \kappa_2(\kappa_2 - \kappa)/6 = \kappa^2 - (\kappa_2 - \kappa)/(6\kappa). \quad (\text{П1.2})$$

Используя определения (6), (11) величин κ и κ_2 , можно заключить, что уравнения (П1.1) и (П1.2) равносильны одному уравнению

$$\kappa^2 + 2p\kappa - 1 = 0, \quad (\text{П1.3})$$

где p задается второй формулой из (12). Согласно (11) величина κ неотрицательна. Неотрицательный корень уравнения (П1.3) задается первой из формул (12). Поэтому при выполнении условий (12) система уравнений распадается на две независимые системы, (13) и (15).

Приложение 2

Компоненты J_{x0} и J_{y0} вектора Джонса [26] пробного излучения на входной поверхности $s = 0$ при $\delta_{x10} = 0$ определяются формулами

$$J_{x0} = \mu_1 a_{10} \varepsilon_+(\alpha_{10}, \gamma_{10}), \quad J_{y0} = \mu_1 a_{10} \varepsilon_-(\alpha_{10}, \gamma_{10}) \exp(i\delta_{y10}).$$

Компоненты $J_{x0}^{(i)}$ и $J_{y0}^{(i)}$ вектора Джонса параллельной ($i = 1$) и перпендикулярной ($i = 2$) нормальных мод на входной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} J_{x0}^{(1)} &= \mu_1 a_{10}^{(1)} \exp(i\delta_{x1}^{(1)}), \\ J_{y0}^{(1)} &= \mu_1 |\gamma_1^{(1)}| a_{10}^{(1)} \exp[i(\delta_{x1}^{(1)} - \text{sign}\gamma_2 \pi/2)], \\ J_{x0}^{(2)} &= \mu_1 |\gamma_1^{(1)}| a_{10}^{(2)} \exp(i\delta_{x1}^{(2)}), \\ J_{y0}^{(2)} &= \mu_1 a_{10}^{(2)} \exp[i(\delta_{x1}^{(2)} + \text{sign}\gamma_2 \pi/2)]. \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

Используем равенства

$$J_{x0} = J_{x0}^{(1)} + J_{x0}^{(2)}, \quad J_{y0} = J_{y0}^{(1)} + J_{y0}^{(2)} \quad (\text{П2.2})$$

и подставим в них выражения (П2.1). Предполагая, что $\gamma_2 \neq 0$, умножим обе части второго равенства на (П2.2)

isign $\gamma_2 \neq 0$, выделим действительные и мнимые части полученных уравнений и введем неизвестные величины X, Y, Z и T :

$$\begin{aligned} X &= (a_{10}^{(1)}/a_{10}) \cos \delta_{x1}^{(1)}, & Y &= (a_{10}^{(1)}/a_{10}) \sin \delta_{x1}^{(1)}, \\ Z &= (a_{10}^{(2)}/a_{10}) \cos \delta_{x1}^{(2)}, & T &= (a_{10}^{(2)}/a_{10}) \sin \delta_{x1}^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} X + |\gamma_1^{(1)}|Z &= A, & Y + |\gamma_1^{(1)}|T &= 0, \\ |\gamma_1^{(1)}|Y - T &= B, & |\gamma_1^{(1)}|X - Z &= C, \end{aligned}$$

где A, B и C задаются формулами (17). Решение этой системы определяется формулами (18). Сопоставляя (18) и (П2.3), получаем равенства (19). В случае $\gamma_2 = 0$, при котором $\gamma_1^{(1)} = 0$, формулы (20) непосредственно следуют из уравнений (П2.2).

Приложение 3

Из формул (2) и (4) вытекает, что в случае параллельной нормальной моды выполняется условие

$$g_1^{(1)} = (1/\sqrt{2})a_1^{(1)}(1 - \gamma_1^{(1)})\exp(i\delta_{x1}^{(1)}).$$

Введем новые зависимые переменные

$$P_1 = i \frac{\exp(-i\delta_{x1}^{(1)})}{(\kappa^2 + 1)} U_1^*, \quad Q_1 = i \frac{\exp(-i\delta_{x1}^{(1)})}{(\kappa^2 + 1)} V_1^*$$

и пренебрежем наличием неоднородного уширения линий квантовых переходов и релаксационными процессами. Система (13) преобразуется при этом в систему уравнений, описывающую пространственно-временную эволюцию большой оси ЭП поля параллельной нормальной моды в среде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1^{(1)}}{\partial s} &= \frac{2\sqrt{2}}{1 - \gamma_1^{(1)}} P_1, & \frac{\partial P_1}{\partial w} &= \frac{\gamma_1^{(1)} - 1}{2\sqrt{2}} a_1^{(1)} + \frac{i}{4} g_2 Q_1, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial w} &= i g_2^* q_1 P_1. \end{aligned} \quad (\text{П3.1})$$

Перейдем к новым независимым переменным

$$u = s - V_1^{(1)} w, \quad v = s,$$

где $V_1^{(1)}$ – групповая скорость распространения импульса параллельной нормальной моды в системе отсчета s, w . Полагая, что деформация огибающей $a_1^{(1)}$ параллельной моды происходит достаточно медленно, положим

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= \bar{a}_1^{(1)}(u) + \tilde{a}_1^{(1)}(u, v), & P_1 &= \bar{P}_1(u) + \tilde{P}_1(u, v), \\ Q_1 &= \bar{Q}_1(u) + \tilde{Q}_1(u, v). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{a}_1^{(1)}, \bar{P}_1$ и \bar{Q}_1 имеют смысл малых поправок, влияние которых можно учесть методом последовательных приближений. Тогда в нулевом приближении этого метода система уравнений (П3.1) принимает следующий вид:

$$\frac{d\bar{a}_1^{(1)}}{du} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \gamma_1^{(1)}} \bar{P}_1, \quad V_1^{(1)} \frac{d\bar{P}_1}{du} = \frac{1 - \gamma_1^{(1)}}{2\sqrt{2}} \bar{a}_1^{(1)} - \frac{i}{4} g_2 \bar{Q}_1, \quad (\text{П3.2})$$

$$V_1^{(1)} \frac{d\bar{Q}_1}{du} - i g_2^* q_1 \bar{P}_1,$$

причем q_1 определяется последней из формул (14). Из системы уравнений (П3.2) вытекает уравнение, определяющее эволюцию $\bar{P}_1(u)$:

$$\frac{d^2 \bar{P}_1}{du^2} = \frac{1}{V_1^{(1)}} \left(1 - \frac{|g_2|^2 q_1}{4V_1^{(1)}} \right) \bar{P}_1. \quad (\text{П3.3})$$

Величина $V_1^{(1)}$ неотрицательна в силу своего определения. Обозначим через κ^2 коэффициент при \bar{P}_1 в правой части уравнения (П3.3). Если условие $\kappa^2 = 0$ не выполняется, то величина \bar{P}_1 линейно выражается через экспоненциальные функции действительного или чисто мнимого аргумента. Согласно первому из уравнений (П3.2) это в свою очередь означает, что функция $\bar{a}_1^{(1)}(u)$ не стремится к нулю при $|u|$, стремящемся к бесконечности, и описываемое ею излучение не является импульсом. Используя условие $\kappa^2 = 0$, определим групповую скорость $V_1^{(1)}$. Аналогичным образом найдем групповую скорость $V_1^{(2)}$ перпендикулярной нормальной моды. В итоге получим равенства (22).

1. Агапьев Б.Д., Горный М.Б., Матисов Б.Г., Рождественский Ю.В. *УФН*, **163**, 1 (1993).
2. Vitanov N.V., Rangelov A.A., Shore B.W., Bergmann K. *Rev. Mod. Phys.*, **89**, 015006 (2017).
3. Harris S.E. *Phys. Today*, **50**, 36 (1997).
4. Lukin M.D. *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 457 (2003).
5. Fleischhauer M., Imamoglu A., Marangos J.P. *Rev. Mod. Phys.*, **77**, 633 (2005).
6. Duan L.-M., Lukin M.D., Cirac J.I., Zoller P. *Nature (London)*, **414**, 413 (2001).
7. Sinatra A. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 253601 (2006).
8. Martinelli M., Valente P., Failache H., Felinto D., Cruz L.S., Nussenzveig P., Lezama A. *Phys. Rev. A*, **69**, 043809 (2004).
9. Godone A., Micallizio S., Levi F. *Phys. Rev. A*, **66**, 063807 (2002).
10. Lukin M.D., Imamoglu A. *Nature (London)*, **413**, 273 (2001).
11. Kocharovskaya O., Mandel P. *Phys. Rev. A*, **42**, 523 (1990).
12. Jen H.H., Daw-Wei Wang. *Phys. Rev. A*, **87**, 061802(R) (2013).
13. Basler C., Grzesiak J., Helm H. *Phys. Rev. A*, **92**, 013809 (2015).
14. Ronggang Liu, Tong Liu, Yingying Wang, Yujie Li, Bingzheng Gai. *Phys. Rev. A*, **96**, 053823 (2017).
15. Fam Le Kien, Rauschenbeutel A. *Phys. Rev. A*, **91**, 053847 (2015).
16. Wielandy S., Gaeta A.L. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3359 (1998).
17. Bo Wang, Shujing Li, Jie Ma, Hai Wang, Peng K.C., Min Xiao. *Phys. Rev. A*, **73**, 051801(R) (2006).
18. Agarwal G.S., Shubhrangshu Dosgupta. *Phys. Rev. A*, **67**, 023814 (2003).
19. Sautenkov V.A., Rostovtsev Y.V., Chen H., Hsu P., Agarwal G.S., Scully M.O. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 233601 (2005).
20. Tai Hyun Yoon, Chang Yong Park, Sung Jong Park. *Phys. Rev. A*, **70**, 061803(R) (2004).
21. Kis Z., Demeter G., Janszky J.J. *Opt. Soc. Am. B*, **30**, 829 (2013).
22. Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **47** (10), 892 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (10), 892 (2017)].
23. Maneesh Jain, Kasapi A., Yin G.Y. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4385 (1995).
24. Kasapi A., Maneesh Jain, Yin G.Y., Harris S.E. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2447 (1995).
25. Салех Б., Тейх М. *Оптика и фотоника. Принципы и применения* (Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2012, т.1).
26. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1970).
27. Лонгейр М. *Астрофизика высоких энергий* (М.: Мир, 1983).