

# Методы анализа качества элементной базы квантовых информационных технологий

Ю.И.Богданов, Д.В.Фастовец, Б.И.Бантыш, А.Ю.Чернявский, И.А.Семенихин, Н.А.Богданова, К.Г.Катамадзе, Ю.А.Кузнецов, А.А.Кокин, В.Ф.Лукичев

*Рассмотрены методы анализа качества элементной базы квантовых информационных технологий. Описаны методы моделирования квантовых операций с учётом квантовых шумов, основанные на формализме квантовых операций: метод операторной суммы и изоморфизм Чоя–Ямилковского. Представлены результаты моделирования некоторых одно- и двухкубитных квантовых преобразований с учётом процессов амплитудной и фазовой релаксации, а также деполаризирующего шума. Рассмотрена томография квантовых состояний, основанная на корневом подходе и методе максимального правдоподобия. Описан метод гарантированной оценки точности квантовой томографии, опирающийся на количественную оценку информации, получаемой при измерениях. Проведена томография однокубитного преобразования на сверхпроводниковом квантовом процессоре компании IBM. Практическое значение выполненных исследований связано с обеспечением качества и эффективности квантовых информационных технологий. Полученные результаты могут быть использованы для повышения качества реализации логических элементов квантовых компьютеров и отладки процедур управления квантовыми состояниями в задачах квантовой криптографии.*

**Ключевые слова:** квантовая информатика, кубит, алгоритм, квантовая томография, измерения, декогерентизация, моделирование.

## 1. Введение

Квантовые информационные технологии являются бурно развивающейся областью науки. Известно, что квантовые вычисления способны обеспечить значительное увеличение скорости решения ряда практически важных физических и математических задач [1–3]. Многие крупные IT-компании уже вовлечены в разработку многокубитных квантовых процессоров [4–6]. Однако точность работы создаваемых прототипов квантовых вычислителей пока ещё остаётся невысокой в связи с наличием квантовых шумов различной природы и отсутствием должной методологии управления квантовыми состояниями и процессами. Для решения этой проблемы необходимо, с од-

ной стороны, совершенствовать технологическое оборудование и методы борьбы с шумами, а с другой – разрабатывать эффективные методы мониторинга квантовых процессов и квантовых состояний.

Моделирование идеальных квантовых систем осуществляется на языке чистых векторов-состояний и унитарных преобразований. Взаимодействие изучаемой системы с окружением приводит к необходимости описания на языке матриц плотности [3]. При этом эволюция состояния не является унитарной и может описываться решением уравнения Линдблада [7] либо с использованием более общего формализма квантовых операций [8]. В настоящей работе изложен подход к анализу зашумлённых квантовых преобразований, основанный на использовании изоморфизма Чоя–Ямилковского [9–11]. Такой подход позволяет анализировать характеристики квантовых вентилях в целом, вне зависимости от того, на какие состояния они действуют.

Наряду с математическим моделированием квантовых преобразований необходимо осуществлять их контроль в условиях реального эксперимента. Основным инструментом для этих целей служит томография квантовых состояний и процессов [3, 12–19], которая призвана обеспечить интерфейс между разработкой элементной базы квантовых компьютеров и ее практическим воплощением. Методы численного анализа и статистического моделирования с учётом влияния квантовых шумов, а также результатов технологических и экспериментальных исследований позволяют дать исчерпывающую оценку качеству и эффективности проектируемых квантовых регистров, сформулировать требования к экспериментальному оборудованию и технологии. Посредством обратной связи развитый подход даёт возможность наилучшим образом распорядиться имеющимися ресурсами для оптимизации процесса разработки квантовых информационных технологий.

**Ю.И.Богданов.** Физико-технологический институт РАН, Россия, 117218 Москва, Нахимовский просп., 36, корп. 1; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Россия, 124498 Москва, Зеленоград, пл. Шокина, 1; e-mail: bogdanov\_yurii@inbox.ru

**Д.В.Фастовец, Б.И.Бантыш, Н.А.Богданова, Ю.А.Кузнецов.** Физико-технологический институт РАН, Россия, 117218 Москва, Нахимовский просп., 36, корп. 1; Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Россия, 124498 Москва, Зеленоград, пл. Шокина, 1; e-mail: fast93@mail.ru

**А.Ю.Чернявский, И.А.Семенихин, А.А.Кокин, В.Ф.Лукичев.** Физико-технологический институт РАН, Россия, 117218 Москва, Нахимовский просп., 36, корп. 1

**К.Г.Катамадзе.** Физико-технологический институт РАН, Россия, 117218 Москва, Нахимовский просп., 36, корп. 1; Центр квантовых технологий МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31

Поступила в редакцию 11 июня 2018 г., после доработки – 8 октября 2018 г.

Настоящее исследование отражает опыт работ Физико-технологического института РАН в области создания методов обеспечения качества и эффективности квантовых информационных технологий. Эти работы осуществляются в тесном сотрудничестве с физиками Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

## 2. Моделирование зашумлённых квантовых преобразований

Идеальный квантовый вентиль, как известно, обеспечивает унитарное преобразование квантового состояния. Однако реальная эволюция состояния никогда не бывает унитарной. В более реалистичных моделях необходимо учитывать неизбежное взаимодействие квантовой системы с окружением. В рамках теории открытых квантовых систем с учётом марковского приближения, когда окружение характеризуется достаточно малым «временем памяти» по сравнению с временем квантовой операции, эволюция состояния, определяемого матрицей плотности  $\rho_{in}$ , задается операторной формулой [3, 8, 9]

$$\rho_{out} = \mathcal{E}(\rho_{in}) = \sum_k E_k \rho_{in} E_k^\dagger, \tag{1}$$

где  $E_k$  – так называемые операторы Крауса, удовлетворяющие условию нормировки (сохранение следа)

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = I.$$

Можно показать, что произвольная квантовая операция описывается в виде матрицы плотности в пространстве с большей размерностью (по сравнению с пространством матриц  $\rho_{in}$ ). Такое изоморфное представление операций посредством матриц плотности называется изоморфизмом Чоя–Ямилковского. Чтобы построить состояние соответствия Чоя–Ямилковского для квантовой операции, действующей в  $s$ -мерном гильбертовом пространстве ( $s = 2^n$ , где  $n$  – число кубитов в системе), необходимо взять максимально запутанное состояние

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s |i\rangle \otimes |i\rangle \tag{2}$$

и применить ко второй подсистеме рассматриваемую квантовую операцию:

$$\rho_\chi = \frac{1}{s} \sum_{i_1, i_2=1}^s |i_1\rangle \langle i_2| \otimes \mathcal{E}(|i_1\rangle \langle i_2|). \tag{3}$$

Состояние соответствия Чоя–Ямилковского содержит полную информацию о соответствующем квантовом преобразовании. Благодаря рассмотренному изоморфизму можно анализировать квантовые схемы без их привязки к входному состоянию. При этом в качестве меры точности операции рассматривается вероятность совпадения состояний соответствия зашумленной и идеальной схем. Моделирование состояний Чоя–Ямилковского вычислительно сложнее, чем моделирование эволюции отдельных квантовых состояний, поскольку они задаются в пространстве размерностью  $s^2$ , однако такое моделирование позволяет исключить рассмотрение всевозможных входных

состояний квантовой операции вместе с последующим решением задачи оптимизации.

Матрица соответствия может быть задана в различных представлениях, которые определяются различными наборами базисных матриц. Часто удобно представлять матрицу соответствия в базисе матриц Паули (далее мы будем пользоваться именно этим представлением), т.к. этот базис является наиболее фундаментальным и позволяет получить очень наглядную визуализацию матрицы соответствия.

Принципы моделирования зашумленных квантовых вентилях и схем подробно описаны в наших работах [11, 19].

Важным с практической точки зрения является изучение влияния на рассматриваемую систему процессов амплитудной и фазовой релаксации, характеризующихся параметрами  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, поскольку они естественным образом возникают во многих физических реализациях квантовых вычислений. На рис.1 приведены результаты моделирования преобразования Адамара в идеальном случае и с учётом данных процессов. Представлена так называемая хи-матрица  $\chi$ , совпадающая с точностью до нормировки с состоянием Чоя–Ямилковского.

Аналогичный анализ можно провести для более сложных систем. На рис.2 отражено влияние амплитудно-фазовой релаксации на двухкубитное преобразование контролируемое НЕ (CNOT). Кроме того, рассмотрено влияние так называемого деполаризирующего шума, также характерного для многих физических систем.

## 3. Томография квантовых состояний

Согласно принципу дополнительности Бора для получения полной информации о квантовом состоянии необходимо провести серию взаимно дополняющих квантовых измерений над ансамблем одинаково приготовленных представителей данного состояния. В основе предлагаемого подхода лежит концепция адекватности, полноты и точности квантовых измерений, подробно рассмотренная в работах [17–21].

Совокупность  $m$  проекционных измерений чистого состояния, описываемого вектор-столбцом с длиной  $s$ , может быть представлена в следующей матричной форме:

$$M = Xc. \tag{4}$$

Здесь  $M$  – вектор-столбец длиной  $m$ , описывающий амплитуды вероятностей получения различных результатов измерений, а  $X$  – так называемая аппаратная матрица размером  $m \times s$ , каждая строка которой представляет собой бра-вектор состояния, на которое осуществляется проецирование. Вероятности (в единицу времени) получения соответствующих результатов измерений задаются квадратами модулей амплитуд:

$$\lambda_i = |M_i|^2, i = 1, 2, \dots, m. \tag{5}$$

Если каждая  $j$ -я строка протокола измеряется независимо от других строк в течение времени экспозиции  $t_j$ , то результаты измерений будут описываться статистикой Пуассона со средним значением  $\lambda_j t_j$ .

После накопления статистики измерений осуществляется процедура реконструкции квантового состояния с использованием корневого подхода и метода максималь-

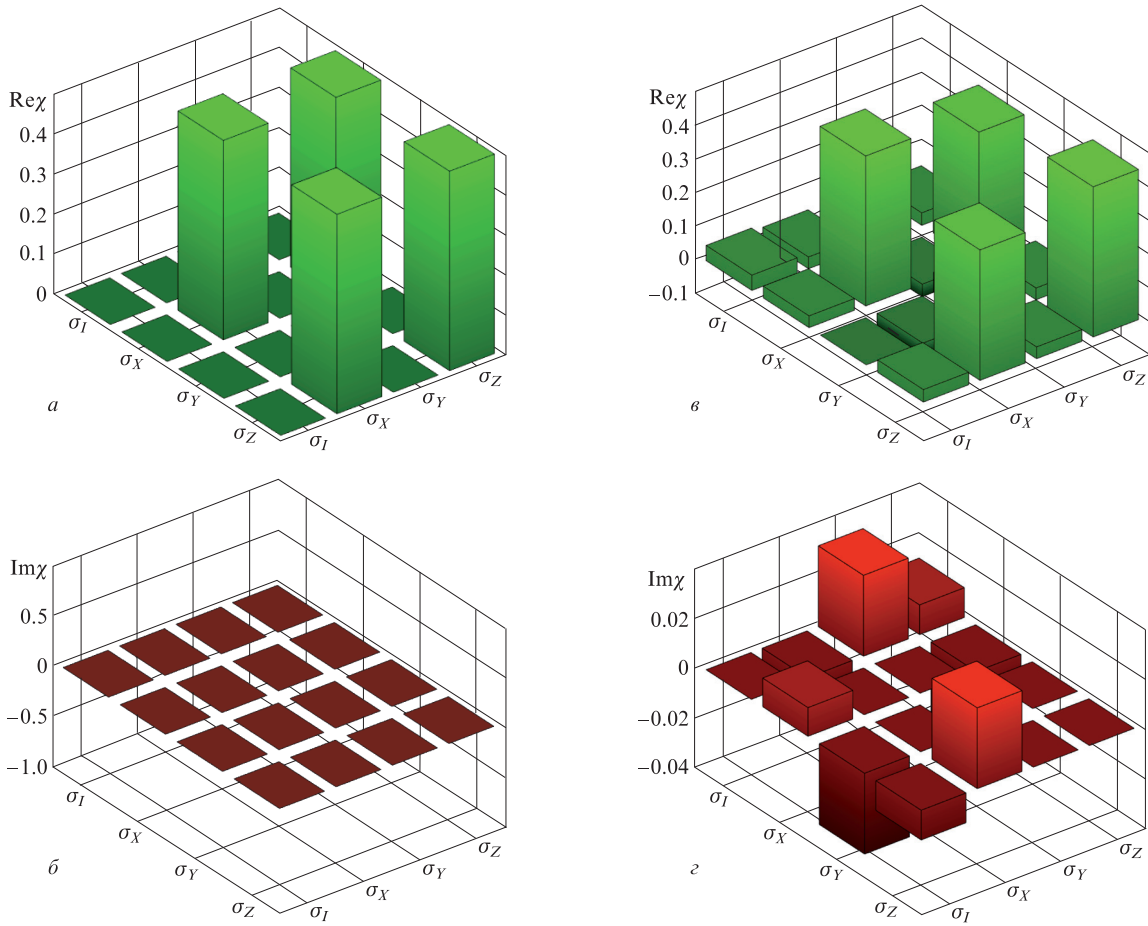


Рис.1. Действительные (а, в) и мнимые (б, г) части хи-матрицы для вентиля Адамара. Диаграммы на рис.1,а и б соответствуют идеальному случаю, а диаграммы на рис.1,в и г отражают действие амплитудно-фазовой релаксации с параметрами  $T_1 = 3$ ,  $T_2 = 5$  (время операции выбрано за единицу);  $\sigma_I$  – единичная матрица размером  $2 \times 2$ .

ного правдоподобия [15, 22, 23], которые дают следующее квазилинейное уравнение для вектор-столбца  $c$  (уравнение правдоподобия):

$$\tilde{I}c = J(c)c, \quad \tilde{I} = \sum_{j=1}^m t_j X_j^\dagger X_j, \quad J(c) = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{\lambda_j(c)} X_j^\dagger X_j, \quad (6)$$

где  $X_j$  –  $j$ -я строка аппаратной матрицы  $X$ , а  $k_j$  – число зарегистрированных для строки событий.

При томографии неизвестных квантовых состояний встаёт вопрос о выборе оптимального протокола квантовых измерений. К наиболее распространённым относятся протоколы, образующие разложение единицы:

$$\sum_{j=1}^m t_j X_j^\dagger X_j = \text{const} \cdot I_s,$$

где  $I_s$  – единичная матрица размером  $s \times s$ . В случае однокубитных состояний естественным является выбор протоколов, основанных на симметрии правильных многогранников: концы векторов Блоха протокола лежат в центрах граней правильных многогранников, описанных вокруг сферы Блоха [18]. Наиболее простой протокол, состоящий из четырёх элементов, – это протокол, основанный на симметрии тетраэдра [16, 18] (рис.3,а). При этом различные состояния восстанавливаются с разной точностью, что отражено на рис.3,б. В работе [18] были рассмотрены также характеристики других протоколов, а в

[24] проведена разработка оптимальных протоколов, полученных путём решения задач минимизации.

Среди протоколов квантовых измерений, которые не сводятся к разложению единицы, отметим лоренцевские протоколы [25]. Лоренцевские квантовые измерения смешанных состояний кубитов основаны на рассмотрении четырёхмерных псевдovращений, аналогичных преобразованиям специальной теории относительности. Такие неунитарные преобразования кубитов являются обобщением хорошо известных унитарных вращений на сфере Блоха. Заметим, что лоренцевские измерения допускают также обобщение и на случай многокубитных состояний. Важно подчеркнуть, что лоренцевские протоколы квантовых измерений могут обеспечивать более высокую точность томографии, чем любые традиционные протоколы, сводящиеся к разложению единицы.

В случае томографии  $N$ -кубитных состояний каждый кубит измеряется отдельно с использованием аппаратной матрицы  $X$ , а общая аппаратная матрица для квантового состояния задаётся соответствующим тензорным произведением  $X^{\otimes N}$ . Точность томографии для произвольных заданных протоколов измерений и квантовых состояний может быть теоретически оценена на основе квантового обобщения матрицы информации Фишера. В рассматриваемом случае томографии чистых состояний это даёт следующую действительную симметричную, положительно определённую матрицу полной информации размером  $2s \times 2s$  [17]:

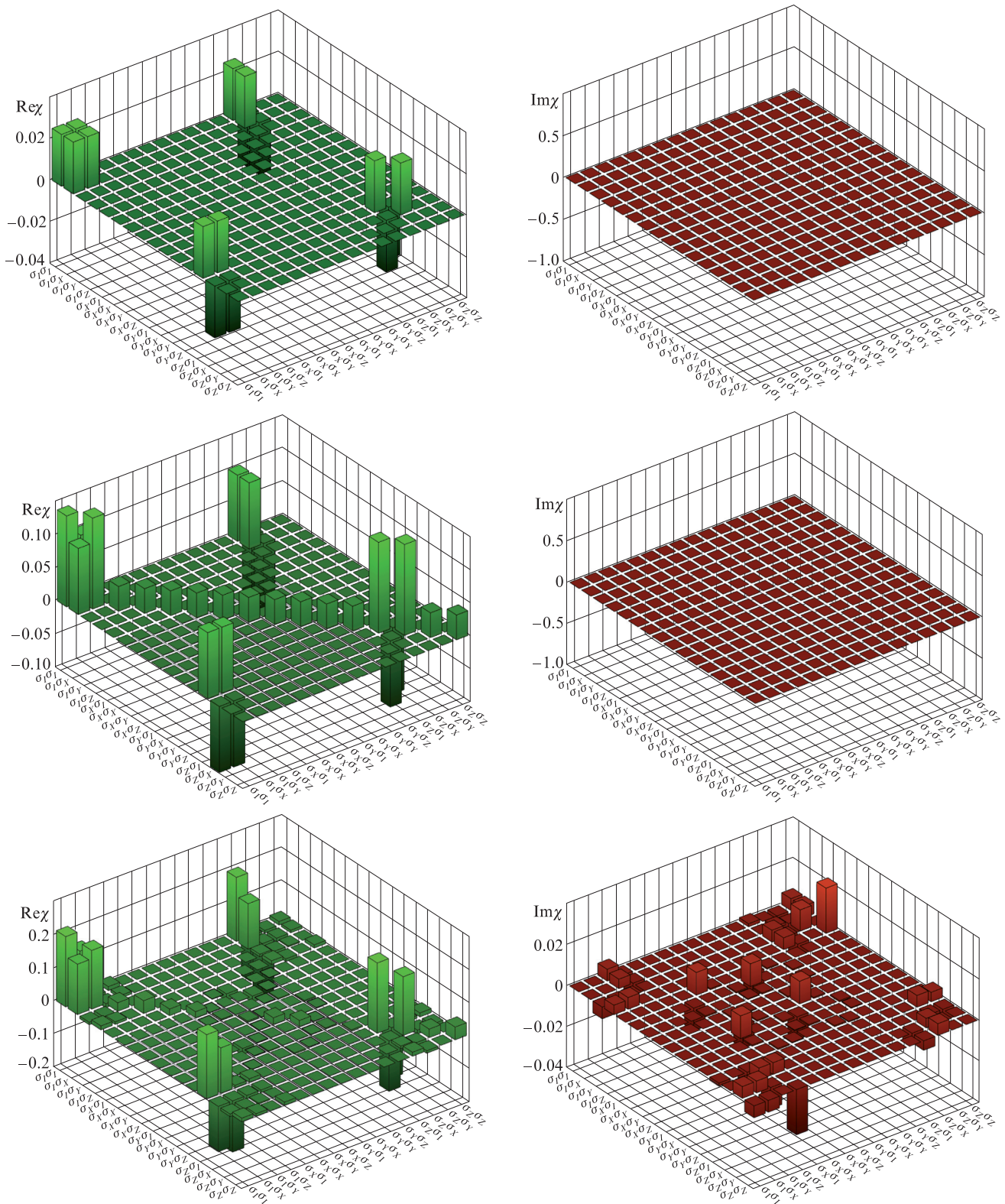


Рис.2. Действительные (левый столбец) и мнимые (правый столбец) части хи-матрицы для вентиля CNOT. Диаграммы в верхнем ряду соответствуют идеальному случаю, диаграммы в среднем ряду отражают действие деполаризующего шума с уровнем зашумлённости  $p = 0.6$ . а в нижнем ряду – действие амплитудно-фазовой релаксации с параметрами  $T_1 = 5$ ,  $T_2 = 3$  (время операции выбрано за единицу).

$$H = 2 \sum_{j=1}^m \frac{t_j}{\lambda_j} (\tilde{X}_j^\dagger \tilde{M}_j) (\tilde{X}_j \tilde{M}_j)^\dagger, \quad \tilde{M}_j = \begin{pmatrix} \text{Re } M_j \\ \text{Im } M_j \end{pmatrix},$$

$$\tilde{X}_j = \begin{pmatrix} \text{Re } X_j & -\text{Im } X_j \\ \text{Im } X_j & \text{Re } X_j \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Анализ матрицы информации позволяет количественно оценить флуктуации параметров квантового состояния и, следовательно, точность восстановления неизвестного состояния [17, 18]. На рис.4 приведены результаты численных экспериментов по томографии двухкубитного квантового состояния и теоретическое распределение, по-

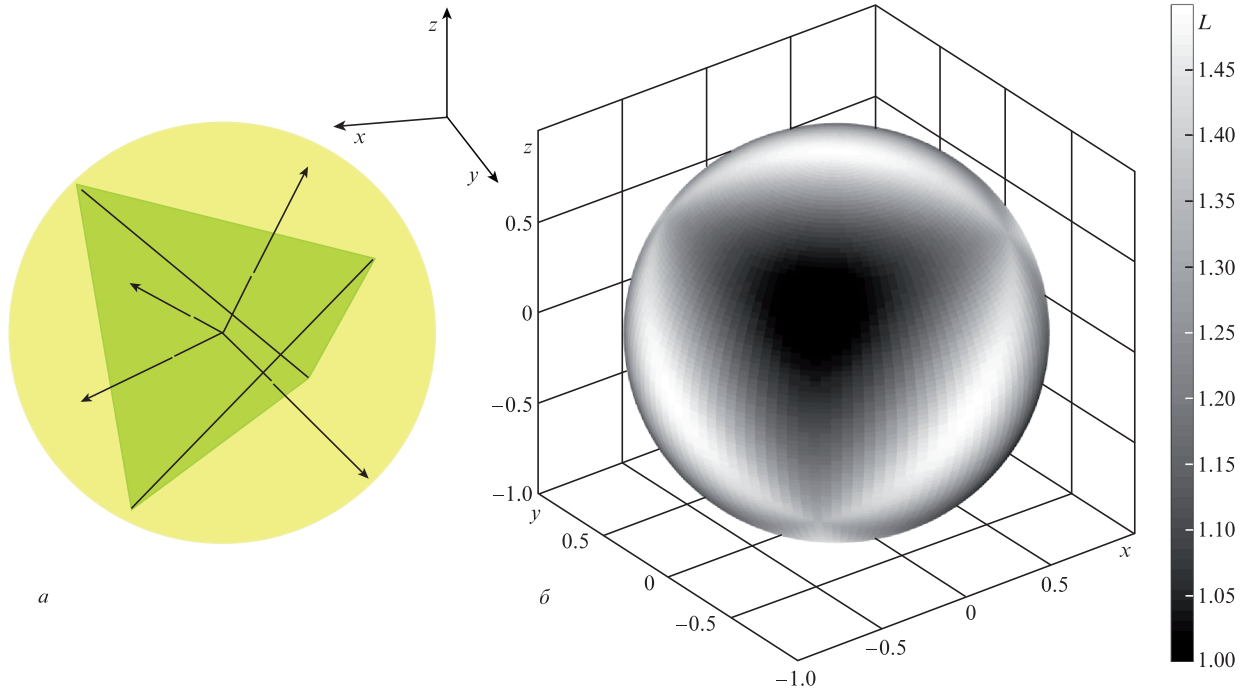


Рис.3. Протокол, основанный на симметрии тетраэдра (а), и теоретическое распределение функции потерь  $L = l\langle 1 - F \rangle$  ( $l$  – объём выборки) для чистого квантового состояния на сфере Блоха (протокол тетраэдра), полученное на основе анализа матрицы информации (7) (б).

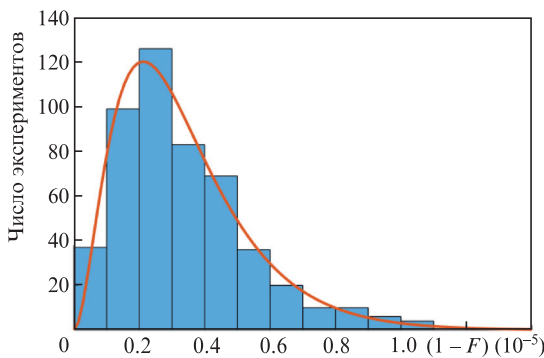


Рис.4. Результаты численных экспериментов по томографии двухкубитного запутанного состояния  $(|00\rangle + i|11\rangle)/\sqrt{2}$  с использованием протокола тетраэдра (столбцы). Сплошная кривая – теоретическое распределение потерь точности томографии, построенное с помощью матрицы информации (7). Проведено 500 экспериментов с объёмом выборки в каждом эксперименте  $l = 10^6$ .

лученное на основе матрицы (7). Критерий хи-квадрат показывает хорошее соответствие между теорией и численным экспериментом.

Приведённые выше рассуждения справедливы не только для чистых состояний, но и для смешанных состояний произвольного ранга. Соответствующее рассмотрение возможно с использованием процедуры очищения (дополнения смешанного состояния до чистого в пространстве с более высокой размерностью) [17].

#### 4. Томография квантовых процессов

Описанные выше методы могут быть использованы для определения преобразования, выполняемого каким-либо неизвестным квантовым каналом. Данная процедура называется томографией квантовых процессов [3, 26, 27]. Она играет важнейшую роль в обеспечении качества квантовых информационных технологий, поскольку позволяет

полностью характеризовать квантовые вентили (гейты), имплементированные в реальной физической системе, обнаруживать в них ошибки, а затем на основе полученных результатов вносить соответствующие корректировки в технологию и настройку управляющего оборудования.

Данный подход был применён к анализу поведения разработанного компанией IBM пятикубитного сверхпроводникового квантового процессора *ibmqx4* [4], к которому имеется открытый доступ через Интернет. В частности, была проведена томография однокубитного вентилля сдвига фазы  $Z$  на кубите Q1 процессора. В качестве томографического протокола был выбран протокол куба, т. к. его реализация на процессоре оказалась самой удобной. Для томографии квантового процесса, соответствующего гейту  $Z$ , на вход схемы подавались шесть базисных состояний:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |+i\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

$$|-i\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |0\rangle, \quad |1\rangle.$$

Преобразование исходного нулевого состояния в указанные базисные состояния осуществлялось путем добавления нужного вращающего гейта в начало схемы. На выходе схемы проводилось измерение кубита в трёх базисах, соответствующих наблюдаемым  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  (матрицы Паули). В итоге для томографии однокубитного гейта потребовалось запустить 18 различных квантовых схем. Каждая схема инициализировалась 8192 раза для накопления статистики измерений. На основе данных измерений выполнялась реконструкция двухкубитного квантового состояния Чоя–Ямилковского для вентилля  $Z$ .

Была разработана адекватная модель квантового процесса [17, 23], которая показала, что модель, отвечающая рангу преобразования  $r = 2$ , является статистически зна-

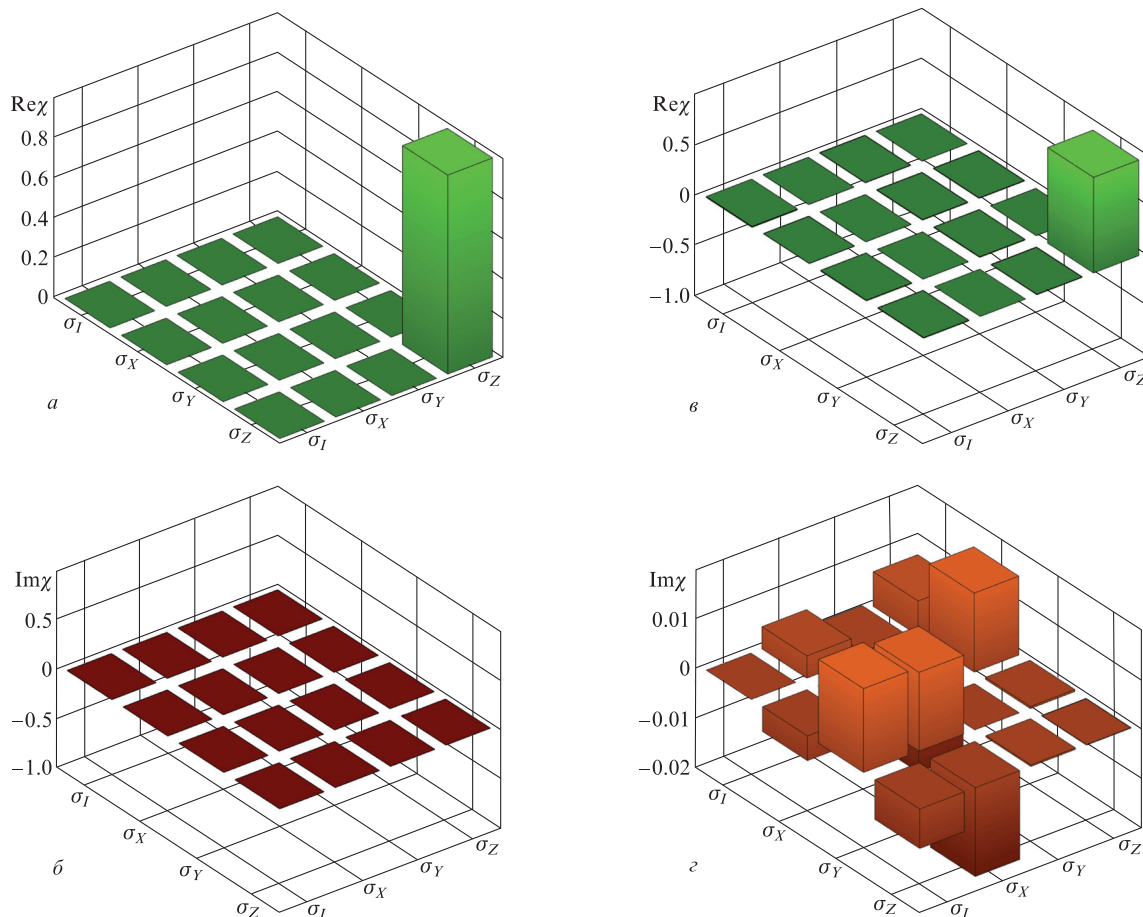


Рис.5. Действительные (а, в) и мнимые (б, г) части хи-матрицы для вентиля Z. Диаграммы на рис.5,а и б соответствуют идеальному случаю, а диаграммы на рис.5,в и г – хи-матрице, полученной в результате томографии вентиля на квантовом процессоре ibmqx4 (кубит Q1) компании IBM. Использовался протокол куба, общий объём выборки – 18432 представителя квантового статистического ансамбля.

чимой на уровне значимости 5%. Вероятность совпадения  $F$  (fidelity) полученной хи-матрицы второго ранга (рис.5) с хи-матрицей идеального преобразования  $Z$  составила  $\sim 93.29\%$ . Для рассматриваемого случая на рис.6 представлено фидуциальное распределение точности томографии, рассчитанное с использованием матрицы полной информации (7). Полученное распределение, обеспечивающее гарантированную точность статистической оценки квантовой операции, даёт ответ на вопрос о том, насколько близка реконструированная квантовая операция к неизвестной истинной квантовой операции, реализованной на процессоре ibmqx4. Из рис.6 видно, что степень соответствия действительно очень высокая. С дове-

рительной вероятностью 95% (незаштрихованная область на рис.6) можно утверждать, что вероятность совпадения  $F$  с неизвестной точной квантовой операцией составляет не менее 99.84%. Близость полученного значения к 100% означает, что существенное отличие реконструированной хи-матрицы от идеальной (см. рис.5) почти полностью обусловлено реальными процессами декогерентизации в квантовом процессоре IBM, а не ошибкой статистической реконструкции.

Отметим, что в работе [28] также рассматривалась томография различных преобразований, выполняемых процессором IBM. Однако, на наш взгляд, развитые в [28] процедуры не вполне корректны и имеют заведомо низкую точность. Так, в указанной работе не проводился учёт условия сохранения следа  $\text{Tr}_1(\chi) = I_s$  ( $\text{Tr}_1$  – частичный след по первой подсистеме), накладываемого на любую хи-матрицу. Кроме того, для реконструкции использовался метод псевдоинверсии, который не всегда даёт физически осмысленные результаты и заведомо не способен обеспечить асимптотическую эффективность и гарантированную точность статистических оценок [23].

### 5. Выводы

В настоящей работе рассмотрена методология моделирования квантовых операций для задач создания элементной базы квантовых компьютеров. Изложены различные способы описания квантовых операции, в том

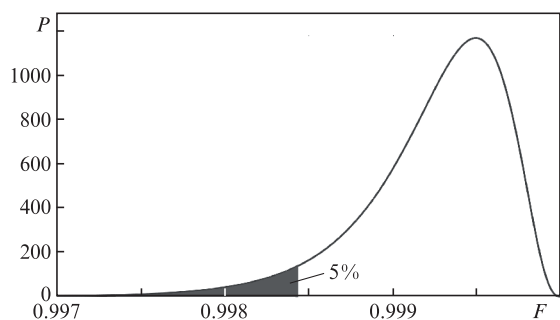


Рис.6. Фидуциальное распределение  $P$  вероятности совпадения  $F$  разработанной модели для вентиля  $Z$  квантового процессора ibmqx4 с неизвестной точной квантовой операцией.

числе метод операторной суммы, представление посредством состояния Чоя–Ямилковского и соответствующей ему хи-матрицы. Проведён учёт процессов амплитудной и фазовой релаксации состояний кубитов и их одновременной гамильтоновой динамики.

Изложена процедура томографии квантовых состояний и процессов, основанная на корневом подходе и методе максимального правдоподобия. Описанный подход обеспечивает гарантированную точность томографии, близкую к фундаментальному физико-статистическому пределу. Использование методов математической статистики позволяет осуществлять полный анализ информации, получаемой при таких измерениях, и определять достижимый уровень точности томографии.

Разработан метод гарантированной оценки точности реализации квантовых операций, опирающийся на количественную оценку информации, получаемой при измерениях. Этот метод был применен для оценки качества преобразований, выполняемых сверхпроводниковым квантовым процессором компании ИВМ.

Предложенный метод позволяет дать всестороннюю оценку качеству и эффективности проектируемых квантовых регистров, сформулировать требования к экспериментальному оборудованию и технологии. Посредством обратной связи развитый подход даёт возможность наилучшим образом распорядиться имеющимися ресурсами для оптимизации процесса разработки квантовых информационных технологий. Эффективность указанного подхода уже была продемонстрирована нами в течение последних лет при работе с оптическими и сверхпроводниковыми кубитами [17–19, 27].

1. Валиев К.А., Кокин А.А. *Квантовые компьютеры: надежда и реальность* (Ижевск: РХД, 2001).
2. Богданов Ю.И., Валиев К.А., Кокин А.А. *Микроэлектроника*, **40**, 243 (2011).
3. Нильсен М.А., Чанг И.Л. *Квантовые вычисления и квантовая информация* (М.: Мир, 2006).
4. <https://www-03.ibm.com/press/us/en/pressrelease/51740.wss>.
5. <https://newsroom.intel.com/news/intel-delivers-17-qubit-superconducting-chip-advanced-packaging-qutech/>.
6. <https://research.googleblog.com/2018/03/a-preview-of-bristlecone-googles-new.html>.
7. Lindblad G. *Commun. Math. Phys.*, **48** (2), 119 (1976).
8. Kraus K. *Lect. Notes Phys.*, **190**, 154 (1983).
9. Холево А.С. *Квантовые системы, каналы, информация* (М.: изд-во МЦНМО, 2010).
10. Прескилл Дж. *Квантовая информация и квантовые вычисления. Т. 1* (М.–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008).
11. Богданов Ю.И., Чернявский А.Ю., Холево А.С., Лукичев В.Ф., Нуязин С.А., Орликовский А.А. *Труды ФТИАН*, **22**, 39 (2012).
12. D’ariano M., Paris M.G.A., Sacchi M.F. *Adv. Imag. Elect. Phys.*, **128**, 205 (2003).
13. Lvovsky A.I., Raymer M.G. *Rev. Mod. Phys.*, **81** (1), 299 (2009).
14. Богданов Ю.И. *Оптика и спектроскопия*, **96** (5), 735 (2004).
15. Banaszek K., D’Ariano M., Paris M.G.A., Sacchi M.F. *Phys. Rev. A*, **61**, 010304 (2000).
16. Rehacek J., Englert B.-G., Kaszlikowski D. *Phys. Rev. A*, **70**, 052321 (2004).
17. Богданов Ю.И. *ЖЭТФ*, **135** (6), 1068 (2009) [*JETP*, **108** (6), 928 (2009)].
18. Bogdanov Yu.I., Brida G., Bukeev I.D., Genovese M., Kravtsov K.S., Kulik S.P., Moreva E.V., Soloviev A.A., Shurupov A.P. *Phys. Rev. A*, **84**, 042108 (2011).
19. Bogdanov Yu.I., Kalinkin A.A., Kulik S.P., Moreva E.V. *New J. Phys.*, **15**, 035012 (2013).
20. Bogdanov Yu.I., Kulik S.P. *Laser Phys. Lett.*, **10** (12), 125202 (2013).
21. Богданов Ю.И., Авосопянц Г.В., Белинский Л.В., Катамадзе К.Г., Кулик С.П., Лукичев В.Ф. *ЖЭТФ*, **150** (2), 246 (2016) [*JETP*, **150** (2), 212 (2016)].
22. Fisher R.A. *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A*, **222**, 594 (1922).
23. Боровков А.А. *Математическая статистика. Оценка параметров, проверка гипотез* (М.: Наука, 1984).
24. Богданов Ю.И., Белинский Л.В. *Труды ФТИАН*, **25**, 90 (2015).
25. Bogdanov Yu.I., Bogdanova N.A. *Proc. Int. Conf. on Laser Physics 2017* (Казань, Россия, 2017).
26. Chuang I.L., Nielsen M.A. *J. Mod. Opt.*, **44** (11-12), 2455 (1997).
27. Богданов Ю.И., Бантыш Б.И., Калинин А.А., Кулик С.П., Морева Е.В., Шершулин В.А. *ЖЭТФ*, **145** (6), 963 (2014) [*JETP*, **145** (6), 963 (2014)].
28. Shukla A., Sisodia M., Pathak A. *Complete Characterization of the Single-qubit Quantum Gates Used in the IBM Quantum Processors*; arXiv:1805.07185 (2018).