Плотность энергии в схлопывающейся электромагнитной волне

И.А.Артюков, А.В.Виноградов, Н.В.Дьячков, Р.М.Фещенко

Найдено соотношение между энергией и шириной спектра схлопывающейся электромагнитной волны и максимальной плотностью энергии в точке фокусировки. Метод решения может применяться для моделирования распространения ультракоротких импульсов без использования приближения медленно меняющихся амплитуд.

Ключевые слова: *схлопывающаяся электромагнитная волна, плотность энергии, ультракороткие импульсы.*

1. Введение

Наряду с численными методами решения уравнений Максвелла в пустоте [1, 2] для моделирования световых пучков продолжают широко применяться аналитические методы. При этом речь идет либо о приближенных методах (метод медленно меняющихся амплитуд, метод Кирхгофа и др.), либо о точных решениях приближенных уравнений для электромагнитных волн*. К таким решениям относятся интеграл Френеля и его обобщение [3, 4], гауссовы [5], бесселевы [6], спиральные и другие пучки [7].

В настоящей работе мы рассмотрим класс точных решений уравнений Максвелла и с их помощью исследуем схлопывающиеся электромагнитные пучки. Важное свойство этих решений – конечность полной энергии поля. Из предыдущих работ на эту тему отметим [8, 9] и особенно [10–12].

2. Решение уравнений Максвелла в виде бегущих сферических волн

Уравнения Максвелла в пустоте допускают калибровку потенциалов в виде [13]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0, \quad \phi = 0 \tag{1}$$

и сводятся в этом случае к волновому уравнению для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$, через который выражаются электрическое ($\boldsymbol{E}$) и магнитное ($\boldsymbol{H}$) поля:

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{2}$$

*Наиболее известны скалярное волновое уравнение (уравнение Гельмгольца) и параболическое волновое уравнение.

И.А.Артюков, А.В.Виноградов, Р.М.Фещенко. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: vinograd@sci.lebedev.ru
Н.В.Дьячков. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141701 Долгопрудный, Институтский пер., 9

Поступила в редакцию 29 июня 2018 г., после доработки – 24 сентября 2018 г.

Нетрудно убедиться в том, что уравнению (2) с калибровкой (1) удовлетворяет потенциал вида

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{l} \times \operatorname{grad} u \tag{3}$$

(где $\boldsymbol{l}$ – единичный, не зависящий от времени и координат аксиальный вектор) при условии, что функция $u(\boldsymbol{r}, t)$ также удовлетворяет волновому уравнению (2). Его сферически симметричное решение $u(r, t)$ складывается из двух встречных волн, описываемых произвольными функциями f_+ и f_-:

$$u = \frac{f_+(r - ct) + f_-(r + ct)}{r}, \tag{4}$$

а решение без особенности в нуле имеет вид [14]

$$u = \frac{f(ct + r) - f(ct - r)}{r}, \tag{5}$$

где $f(s)$ – также произвольная функция. Если она убывает при больших $|s|$ достаточно быстро, то электромагнитный импульс (или пучок) обладает конечной энергией.

Используя (2) и векторный потенциал (3), (5), легко получить выражения для полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{n}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \left(\Delta u - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\boldsymbol{l} - \left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)(\boldsymbol{l}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \tag{7}$$

где

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right);$$

$\boldsymbol{n}$ – единичный вектор вдоль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$. Формулы (5)–(7), содержащие произвольную функцию f, описывают определенный тип световых пучков с конечной энергией, удовлетворяющих уравнениям Максвелла в пустоте.

3. Полная энергия импульса, спектр и плотность энергии

Сначала выразим указанные величины через функцию $f(s)$, определяющую поля (6) и (7).

3.1. Энергия импульса

Полную энергию $\mathcal{E}$ импульса (5)–(7) найдем по формуле

$$\mathcal{E} = \lim_{r\to\infty}\int_0^\infty \Phi(r,t)\,\mathrm{d}t, \tag{8}$$

где

$$\Phi(r,t) = r^2\iint I(\boldsymbol{r},t)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{9а}$$

– поток энергии через сферу радиусом r; θ и φ – углы в сферической системе координат;

$$I(\boldsymbol{r},t) = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{n}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}] \tag{9б}$$

– радиальная интенсивность. Подставляя в (9б), а затем в (9а) напряженности полей (6) и (7), определяем сначала поток энергии:

$$\Phi(r,t) = -r^2\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial t}\Big(\frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}\Big),\quad v = \frac{\partial u}{\partial r}, \tag{10}$$

а затем, следуя (8), полную энергию импульса:

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s)\,\mathrm{d}s,\quad g(s) = f''(s). \tag{11}$$

3.2. Спектр импульса в дальней зоне

Вернемся к формуле (9б) для радиальной интенсивности, направив ось z вдоль вектора $\boldsymbol{l}$. Подставляя в нее поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ из (5)–(7), получаем

$$I(\boldsymbol{r},t) = \frac{\sin^2\theta}{4\pi}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\Delta u\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial r}. \tag{12}$$

Интеграл от интенсивности (12) по времени, аналогичный (8), при больших r дает флюенс (энергия излучения, падающего на единицу площади)

$$F(\boldsymbol{r}) = \lim_{r\to\infty}\int_0^\infty I(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Используя при больших r приближенные выражения для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, формулу (13) легко упростить, как и выражение (8) для полной энергии. Тогда подобно (11) флюенс (13) принимает вид

$$F(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\sin^2\theta}{4\pi r^2}\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s)\,\mathrm{d}s. \tag{14}$$

Полученный результат ожидаем, поскольку в числителе стоит фактически полная энергия импульса $\mathcal{E}$. Из (14) легко найти спектральную плотность мощности:

$$F_\omega(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\sin^2\theta}{c^2r^2}|g(k)|^2,\quad k = \omega/c,$$
$$g(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\exp(\mathrm{i}ks)\,\mathrm{d}s,\quad F(\boldsymbol{r}) = \int_0^\infty F_\omega(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\omega. \tag{15}$$

При этом учтено, что $g(s)$ – вещественная функция, а $|g(k)|^2$ – четная. Величину $F_\omega(\boldsymbol{r})$ естественно отождествить со спектром импульса в дальней зоне.

3.3. Плотность энергии

Плотность энергии ϵ в центре импульса определим по формуле

$$\epsilon = \frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{8\pi}\Big|_{r=0}. \tag{16}$$

Отсюда, используя общие формулы для полей (5)–(7), находим

$$\boldsymbol{E}(ct) = 0,\quad \boldsymbol{H}(ct) = \frac{4}{3}f'''(ct)\ \text{ и }\ \epsilon(ct) = \frac{2}{9\pi}[g'(ct)]^2. \tag{17}$$

Из (17) видно, что плотность электромагнитной энергии $\epsilon(t)$ в начале координат при увеличении времени от $t = -\infty$ возрастает, а затем уменьшается до нуля.

Подчеркнем, что выражение (17) для плотности энергии $\epsilon(ct)$ в центре схлопывающегося импульса, как и выражение (11) для полной энергии $\mathcal{E}$, справедливы для любой функции $f(s)$, определяющей пространственно-временную форму импульса (см. (4)). Доказательство справедливости формул (11) и (17) будет приведено в нашей следующей работе.

4. Схлопывание квазимонохроматической волны

Выберем форму импульса (5)–(7), задав вторую производную $f(s)$ в виде

$$f''(s) = g(s) = C_1\exp(-s^2/a^2)\sin(qs), \tag{18}$$

где нормировочный коэффициент C_1, в соответствии с формулой (11) для полной энергии импульса, определяется выражением

$$C_1^2 = 6\mathcal{E}\{a\sqrt{2\pi}[1-\exp(-q^2a^2/2)]\}^{-1}; \tag{19}$$

a и q – параметры, имеющие смысл длины импульса и волнового числа соответственно. Следуя разд.3, рассмотрим спектр и плотность энергии такого импульса в фокусе. Подставляя (18) в (15), находим спектральную функцию флюенса:

$$F_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{\sin^2\theta}{c^2r^2}g^2(k) = \frac{a^2C_1^2\sin^2\theta}{16\pi c^2r^2}$$
$$\times\Big\{\exp\Big[-\frac{(\omega-cq)^2a^2}{4c^2}\Big]-\exp\Big[-\frac{(\omega+cq)^2a^2}{4c^2}\Big]\Big\}^2. \tag{20}$$

С помощью этой функции легко определить центральную частоту ω_0 и ширину $\delta\omega$ спектра излучения. Как и следовало ожидать, в случае квазимонохроматической волны, когда $aq \gg 1$, имеем

$$\omega_0 = cq,\quad \delta\omega = c/a. \tag{21}$$

Плотность энергии в центре определяется формулой (17), которая показывает, что для импульса (18) максимальное значение ϵ_{m} достигается при $t = 0$:

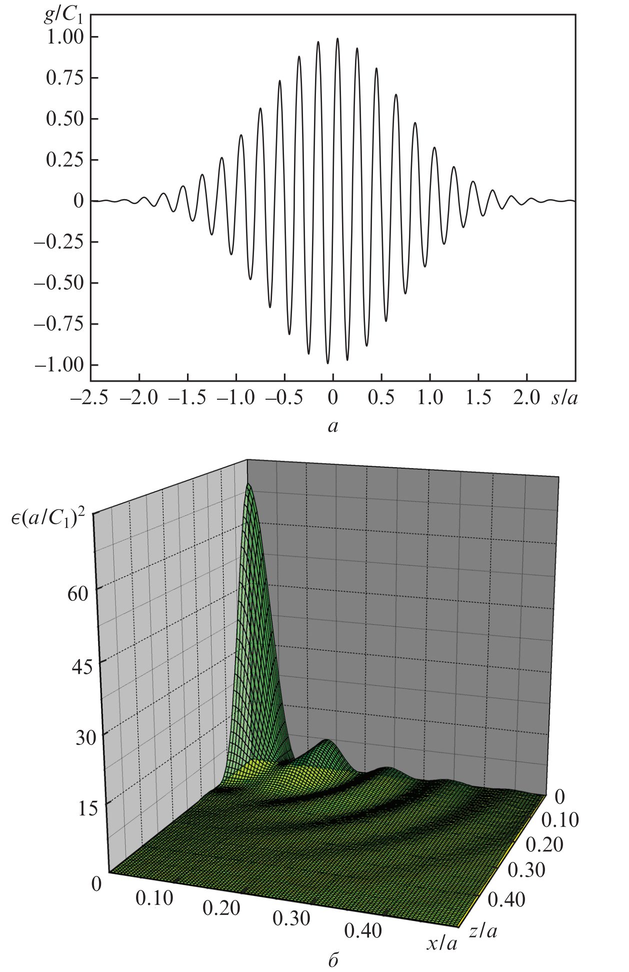

Рис.1. Форма импульса $g(s)$, заданная по формуле (18) при $qa = 10\pi$ (*а*), и распределение плотности энергии $\epsilon(x, z)$ в окрестности начала координат при $t = 0$ (*б*).

$$\epsilon_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\mathcal{E}q^2}{a[1 - \exp(-q^2a^2/2)]}. \tag{22}$$

В случае квазимонохроматического импульса, когда $aq \gg 1$ и справедливо выражение (21), из формулы (22) следует ожидаемая (с точностью до множителя) зависимость плотности энергии в центре от полной энергии импульса, длины волны и ширины спектра:

$$\epsilon_{\mathrm{m}} = \frac{8}{3}(2\pi)^{3/2}\frac{\mathcal{E}}{\lambda_0^3}\frac{\delta\omega}{\omega_0}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}, \quad aq = \frac{\omega_0}{\delta\omega} \gg 1. \tag{23}$$

Двумерное распределение плотности энергии $\epsilon(\boldsymbol{r})$ в момент схлопывания импульса, показанного на рис.1,*а*, приведено на рис.1,*б*.

5. Обсуждение

С помощью модельного импульса, являющегося точным решением уравнений для электромагнитного поля, исследовано решение, представляющее собой схлопывающуюся и вновь разлетающуюся оболочку, внутри которой содержатся быстрые осцилляции поля. Получено соотношение между плотностью энергии ϵ_{m} в точке фокусировки и полной энергией импульса $\mathcal{E}$, длиной волны λ_0 и шириной спектра $\delta\omega$. Вопрос об общности результата (22), (23) остается открытым, пока не исследованы иные более реалистичные точные решения уравнений для поля с конечной энергией. Они, в частности, могут быть построены путем сдвига поля (5) в комплексную плоскость по одной из координат [9, 11].

Несмотря на очевидные трудности реализации пространственно-временной структуры поля (5)–(7) с высокой симметрией, по-видимому, представляет интерес детальное сравнение соотношения (23) с плотностью энергии, достигаемой на существующих и проектируемых лазерных установках, обеспечивающих релятивистскую интенсивность.

Авторы благодарны О.Н.Крохину и А.М.Федотову, чьи выступления на семинарах и статьи стимулировали настоящую работу. Выражаем также благодарность С.Г.Бочкареву, замечания которого учтены в окончательной редакции статьи.

Работа поддержана Базовым финансированием в рамках темы № 0023-0002-2018, а также Программой научных исследований президиума РАН «Актуальные проблемы фотоники, зондирование неоднородных сред и материалов» (ПП РАН № 7).

1. Jin J.M. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields* (Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2015).
2. Pryor R.W. *Multiphysics Modeling Using COMSOL: a First Principle Approach* (Sudbury: Jones & Bartlett Publishers, 2009).
3. Kelly D.P. *J. Opt. Soc. Am. A*, **31** (4), 755 (2014).
4. Artyukov I.A., Feshchenko R.M., Popov N.L., Vinogradov A.V. *J. Opt.*, **16**, 035703 (2014). Doi:10.1088/2040-8978/16/3/035703.
5. Быков В.П., Силичев О.О. *Лазерные резонаторы* (М.: Физматлит, 2004).
6. Пятницкий Л.Н., *Волновые бесселевы пучки* (М.: Физматлит, 2012).
7. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. *Современная оптика гауссовых пучков* (М.: Физматлит, 2010).
8. Ziolkowski R.W., Besieris I.M., Shaarawi A.M. *Proc. IEEE*, **79** (10), 1371 (1991).
9. Lekner J. *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.*, **3** (5), 407 (2001).
10. Narozhny N.B., Fofanov M.S. *Phys. Lett. A*, **295** (2-3), 87 (2002).
11. Fedotov A.M., Korolev K.Y., Legkov M.V. arXiv:0705.2775v1.
12. April A., in *Coherence and Ultrashort Pulse Laser Emission* (New York, NY: InTech, 2010, pp 355–382).
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Том II. Теория поля* (М.: Физматлит, 2012).
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 2004).