НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Угловой момент эллиптически поляризованных кноидальных волн и бризеров в нелинейной гиротропной среде с частотной дисперсией

В.А.Макаров, В.М.Петникова

Проанализированы выражения для спиновой части вектора плотности углового момента (момента импульса) эллиптически поляризованных кноидальных волн и бризеров, распространяющихся в изотропной гиротропной среде с частотной дисперсией второго порядка и пространственной дисперсией кубической нелинейности. Показано, что вследствие нелинейной гирации плотность углового момента зависит от времени и координаты распространения.

Ключевые слова: *угловой момент электромагнитного поля, кубическая нелинейность, гиротропия, оптически активная среда, кноидальные волны, бризеры.*

1. Введение

До сих пор продолжается активное обсуждение таких фундаментальных понятий электродинамики, как тензор энергии-импульса и угловой момент (УМ) электромагнитной волны [1–6]. В параксиальном приближении последний традиционно представляют в виде суммы орбитальной и спиновой частей. Для распространяющейся вдоль оси z плоской электромагнитной монохроматической волны орбитальная часть УМ тождественно равна нулю, а непосредственно связанный с ее поляризацией вектор $\boldsymbol{J}$ плотности спиновой части УМ направлен вдоль оси z. Его проекция J на эту ось связана с медленно меняющимися амплитудами $\mathcal{E}_{\pm} = \mathcal{E}_x \pm \mathrm{i}\mathcal{E}_y$ циркулярно поляризованных компонент электрического поля [7–10]:

$$J = (|\mathcal{E}_-|^2 - |\mathcal{E}_+|^2)/(16\pi k). \tag{1}$$

Аналогичный результат был получен при квантовании электромагнитного поля, спиновая часть его УМ равна $\hbar\sum_{\boldsymbol{k}}(n_{\boldsymbol{k},-} - n_{\boldsymbol{k},+})$ [7–10]. Здесь $\hbar$ – постоянная Планка, а $n_{\boldsymbol{k},\pm}$ – число право- и левополяризованных фотонов в моде, определяемой волновым вектором $\boldsymbol{k}$. В обоих случаях речь идет о реальных экспериментах, когда абстрактная плоская волна ограничена сколь угодно большими, но конечными апертурой и длительностью воздействия; при квантовании поля это обусловлено конечностью объема при нормировке волновых функций [3]. Величина J пропорциональна одному из параметров Стокса [11, 12] и связана с такими фундаментальными характеристиками фотона, как спиральность и спин [8, 10, 12]. Физический смысл орбитальной и спиновой частей углового момента, соотношение между ними и аналогичными слагаемыми при квантово-механическом рассмотрении распространения света трактуются неоднозначно и вот уже более сорока лет являются предметом далеких от завершения многочисленных обсуждений, которые поддерживаются большим количеством работ, выполненных в последнее время. В них анализируются способы получения лазерных пучков с различными моментами импульса и исследуются преобразования их орбитальных и спиновых частей в процессе распространения света и его взаимодействия с разными объектами.

Пучки с различными моментами импульса широко применяются для изменения ориентации и вращения захваченных светом микрочастиц (оптические «пинцеты»), для управления механическими микромашинами [13], а также в оптических вычислениях, при передаче информации и т. д. В настоящее время известно достаточно много способов получения таких пучков. Среди них использование спиральной фазовой пластины [14], специального дифракционного элемента (голографического рисунка) [15], системы цилиндрических линз [16]. Разработаны оптические элементы, с помощью которых осуществляется взаимное преобразование орбитальной и спиновой частей момента импульса распространяющейся волны [17].

Однако при численном и аналитическом решении большинства задач нелинейной оптики практически всегда контролируется выполнение закона сохранения энергии, реже – закона сохранения импульса и практически никогда – закона сохранения момента импульса. Исследование преобразований «орбитальной» и «спиновой» частей моментов импульсов лазерных пучков в процессе их взаимодействия в нелинейных средах в рамках классической электродинамики не только вносит вклад в развитие нелинейной оптики, но и способствует более глубокому пониманию фундаментальных законов природы. Напомним, что постоянная Планка была измерена в классическом эксперименте Бета [4, 18], который сейчас фактически повторен в [18] для поляризованных волн, распространяющихся в двулучепреломляющем кристалле. В этой работе был измерен спиновый УМ и продемонстрирована возможность использования полученных результатов в интегральной оптике и в оптомеханических приборах. Этим объясняется наш интерес к анализу спи-

В.А.Макаров, В.М.Петникова. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет; Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы, 1;
e-mail: vamakarov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 23 августа 2018 г., после доработки – 29 сентября 2018 г.

новой части УМ эллиптически поляризованных плоских волн, распространяющихся в изотропной гиротропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности и частотной дисперсией групповых скоростей второго порядка. В ней возможно распространение эллиптически поляризованных кноидальных волн [19–21] и векторных бризеров [22]. Ниже будет показано, что плотность потока спиновой части УМ таких волн может зависеть явно и от бегущего времени, и от координаты распространения. Это может дать новый материал для обсуждения вопросов, связанных с УМ распространяющихся волн.

2. Спиновый угловой момент эллиптически поляризованных кноидальных волн и бризеров

Изменение медленно меняющихся амплитуд циркулярно поляризованных компонент эллиптически поляризованных кноидальных волн и бризеров, распространяющихся в нелинейной изотропной гиротропной среде с дисперсией групповых скоростей второго порядка ($\partial^2 k/\partial\omega^2 = k_2 \neq 0$), описывается неинтегрируемой системой дифференциальных уравнений в частных производных [19–22]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}_\pm - \mathrm{i}\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{E}_\pm + \mathrm{i}\Big[\mp\rho_0 + \Big(\frac{\sigma_1}{2}\mp\rho_1\Big)\Big]|\mathcal{E}_\pm|^2 + \Big(\frac{\sigma_1}{2}+\sigma_2\Big)|\mathcal{E}_\mp|^2\Big]\mathcal{E}_\pm = 0. \quad (2)$$

Здесь ω – частота распространяющейся волны; k – модуль ее волнового вектора, направленного вдоль оси z; t – бегущее время (в собственной, бегущей с групповой скоростью системе координат); $\sigma_1 = 4\pi\omega^2\chi^{(3)}_{xyxy}/(kc^2)$ и $\sigma_2 = 2\pi\omega^2\times\chi^{(3)}_{xxyy}/(kc^2)$ связаны с независимыми компонентами тензора локальной кубической нелинейности $\hat{\chi}^{(3)}(\omega;-\omega,\omega,\omega)$, а $\rho_{0,1} = 2\pi\omega^2\gamma_{0,1}/c^2$ определены через псевдоскалярные константы $\gamma_{0,1}$ линейной и нелинейной гирации.

Частные периодические решения системы (2) в виде кноидальных волн, удовлетворяющие условию линейной связи интенсивностей право- (плюс) и левополяризованных (минус) компонент,

$$\delta_+|\mathcal{E}_+|^2 + \delta_-|\mathcal{E}_-|^2 = \delta_0, \quad (3)$$

($\delta_{0,\pm}$ – константы), можно разделить на две группы [19–21]. Первая включает в себя девять решений $\mathcal{E}_\pm$, фазы которых зависят только от z, а амплитуды $\mathcal{E}_\pm(t)$ выражаются через все возможные парные комбинации эллиптических функций Якоби, $\mathrm{sn}(\nu t,\mu)$, $\mathrm{cn}(\nu t,\mu)$ и $\mathrm{dn}(\nu t,\mu)$ [23]. Модуль эллиптических функций μ и масштабный коэффициент ν удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $\nu > 0$ и являются свободными параметрами. Области существования этих решений определяются из условия $|\mathcal{E}_\pm|^2 \geqslant 0$.

Проекции вектора плотности спиновой части УМ волн с компонентами $|\mathcal{E}_\pm(t)|^2 = -(\mu\nu)^2 k_2(\sigma_2\mp\rho_1)\mathrm{cn}^2(\nu t,\mu)/\beta$ и $|\mathcal{E}_\mp(t)|^2 = -\nu^2 k_2(\sigma_2\pm\rho_1)\mathrm{dn}^2(\nu t,\mu)/\beta$ легко находятся подстановкой этих решений в (1):

$$J_{\mathrm{c}_\pm\mathrm{d}_\mp} = \frac{\mp\nu^2 k_2[(\sigma_2\pm\rho_1) - \mu^2(\sigma_2\mp\rho_1)\mp 2\mu^2\rho_1\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu)]}{16\pi k\beta}. \quad (4)$$

Здесь $\beta = \rho_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$; индексы $\mathrm{c}_\pm, \mathrm{d}_\pm$ (и далее $\mathrm{s}_\pm$) отвечают первым буквам эллиптических функций и соответствующим поляризациям компонент. Такие волны существуют, если

$$\sigma_2 > 0,\ k_2\beta < 0,\ \rho_1 < |\sigma_2|$$

или (5)

$$\sigma_2 < 0,\ k_2\beta > 0,\ \rho_1 < |\sigma_2|.$$

В среде также могут распространяться, во-первых, волны с компонентами $|\mathcal{E}_\pm(t)|^2 = (\mu\nu)^2 k_2(\sigma_2\mp\rho_1)\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu)/\beta$ и $|\mathcal{E}_\mp(t)|^2 = -(\mu\nu)^2 k_2(\sigma_2\pm\rho_1)\mathrm{cn}^2(\nu t,\mu)/\beta$. Проекции векторов плотности спиновой части УМ $J_{\mathrm{s}_\pm\mathrm{c}_\mp}$ таких волн задаются выражениями

$$J_{\mathrm{s}_\pm\mathrm{c}_\mp}(t) = \frac{\mp\mu^2\nu^2 k_2[(\sigma_2\pm\rho_1)\mp 2\rho_1\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu)]}{16\pi k\beta}. \quad (6)$$

Во-вторых, могут распространяться волны с $|\mathcal{E}_\pm(t)|^2 = (\mu\nu)^2 \times k_2(\sigma_2\mp\rho_1)\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu)/\beta$ и $|\mathcal{E}_\mp(t)|^2 = -\nu^2 k_2(\sigma_2\pm\rho_1)\mathrm{dn}^2(\nu t,\mu) \times\beta^{-1}$. Проекции вектора плотности спиновой части УМ $J_{\mathrm{s}_\pm\mathrm{d}_\mp}$ имеют следующий вид:

$$J_{\mathrm{s}_\pm\mathrm{d}_\mp}(t) = \frac{\mp\nu^2 k_2[(\sigma_2\pm\rho_1)\mp 2\mu^2\rho_1\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu)]}{16\pi k\beta}. \quad (7)$$

Область существования таких решений определяется разными неравенствами. Для верхнего знака

$$\rho_1 > 0,\ k_2\beta < 0,\ \sigma_2 < |\rho_1|, \quad (8)$$

для нижнего знака

$$\rho_1 < 0,\ k_2\beta > 0,\ \sigma_2 < |\rho_1|. \quad (9)$$

В первую группу входят также три вырожденные волны, амплитуды которых содержат одинаковые эллиптические функции:

$$|\mathcal{E}_\pm(t)|^2 = (\mu\nu)^2 k_2(\sigma_2\mp\rho_1)\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu)/\beta, \quad (10)$$

$$|\mathcal{E}_\pm(t)|^2 = -(\mu\nu)^2 k_2(\sigma_2\mp\rho_1)\mathrm{cn}^2(\nu t,\mu)/\beta, \quad (11)$$

$$|\mathcal{E}_\pm(t)|^2 = -\nu^2 k_2(\sigma_2\mp\rho_1)\mathrm{dn}^2(\nu t,\mu)/\beta. \quad (12)$$

Проекции вектора плотности спиновой части УМ этих волн задаются формулами

$$J_{\mathrm{s,c,d}}(t) = \frac{\rho_1\nu^2 k_2}{8\pi k\beta} f_{\mathrm{s,c,d}}. \quad (13)$$

В (13) $f_{\mathrm{s}} = \mu^2\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu)$, $f_{\mathrm{c}} = \mu^2[\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu) - 1]$, $f_{\mathrm{d}} = \mu^2\times\mathrm{sn}^2(\nu t,\mu) - 1$. Область существования решения (10) определяется неравенствами

$$\sigma_2 > 0,\ k_2\beta > 0,\ \rho_1 < |\sigma_2|$$

или (14)

$$\sigma_2 < 0,\ k_2\beta < 0,\ \rho_1 < |\sigma_2|,$$

а решения (11) и (12) совпадают с (5). Отметим, что при $\rho_1 = 0$ правая часть (13) обращается в нуль.

Из (4), (6), (7) и (13) видно, что зависимость от бегущего времени всех проекций вектора плотности спиновой части УМ связана с нелокальностью нелинейного оптического отклика гиротропной среды и имеет разные знаки для разных решений (при $\rho_1 = 0$ зависимость от бегущего времени исчезает). Однако частота осцилляций эллиптических функций для нелинейных оптически активных сред оказывается достаточно высокой, чтобы вызвать реальные колебания образца. Усредненный по бегущему времени вклад этих осцилляций пропорционален

$$\langle \mathrm{sn}^2(vt,\mu)\rangle_t = \lim_{T\to\infty}(T)^{-1}\int_0^T \mathrm{sn}^2(vt,\mu)\,\mathrm{d}t$$

$$= \mu^{-2}[1 - \mathrm{E}(\mu)/\mathrm{K}(\mu)]. \quad (15)$$

Здесь $\mathrm{K}(\mu)$ и $\mathrm{E}(\mu)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Отметим, что при $\mu = 1$ имеем $\mathrm{sn}(vt, 1) = \mathrm{th}(vt)$, а $\langle \mathrm{sn}^2(vt, 1)\rangle_t = 1$.

У второй группы решений системы (2) амплитуды $|\mathcal{E}_\pm(t)|$ циркулярно поляризованных компонент выражаются через эллиптический синус Якоби, а их фазы $\varphi_\pm(z,t) = \mathrm{Arg}\{\mathcal{E}_\pm(t)\}$ явно зависят и от координаты, и от бегущего времени. При этом производная фазы определяет сдвиг частоты компонент, т. е. их чирп [21]. Квадраты модулей амплитуд таких решений

$$|\mathcal{E}_\pm(t)|^2 = |\mathcal{E}_\pm(0)|^2[1 + m_\pm \mathrm{sn}^2(\tilde{v}t,\tilde{\mu})], \quad (16)$$

где $m_\pm = \tilde{\mu}^2\tilde{v}^2k_2(\sigma_2 \mp \rho_1)/[|\mathcal{E}_\pm(0)|^2\beta]$; $\tilde{v}$ и $\tilde{\mu}$ определяются начальными значениями чирпа

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_\pm}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \pm\tilde{v}\sqrt{\frac{(\tilde{\mu}^2 + m_\pm)(1 + m_\pm)}{m_\pm}}. \quad (17)$$

Требования положительности правой части (16) и подкоренного выражения в правой части (17) накладывают определенные ограничения на значения $\tilde{v}$ и $\tilde{\mu}$ [21]. Те из решений этой группы, у которых интенсивности обеих циркулярно поляризованных компонент поля в точке $t = 0$ начинают уменьшаться, существуют при выполнении условий (5). Если одна компонента в начальный момент $t = 0$ нарастает, а вторая убывает, то их область существования совпадает с (8), (9). Компоненты, синхронно нарастающие при $t = 0$, существуют, если параметры среды удовлетворяют неравенствам (14).

Проекция вектора плотности J_{chirp} спиновой части УМ таких волн также зависит от бегущего времени:

$$J_{\mathrm{chirp}}(t) = \frac{|\mathcal{E}_-(0)|^2 - |\mathcal{E}_+(0)|^2 + (2\tilde{\mu}^2\tilde{v}^2k_2\rho_1/\beta)\mathrm{sn}^2(\tilde{v}t,\tilde{\mu})}{16\,\pi k}. \quad (18)$$

В негиротропной среде зависимость от бегущего времени исчезает. Среднее значение $J_{\mathrm{chirp}}(t)$, как и для предыдущих решений, зависит не только от поляризации падающего излучения, но и от параметров нелинейной среды:

$$\langle J_{\mathrm{chirp}}(t)\rangle = \frac{|\mathcal{E}_-(0)|^2 - |\mathcal{E}_+(0)|^2 + (2v^2k_2\rho_1/\beta)[1 - \mathrm{E}(\mu)/\mathrm{K}(\mu)]}{16\,\pi k}. \quad (19)$$

Частные решения (2) в виде распространяющихся вдоль оси z и удовлетворяющих условию

$$\frac{|\mathcal{E}_+(z,t)|^2}{|\mathcal{E}_-(z,t)|^2} = \frac{\sigma_2 - \rho_1}{\sigma_2 + \rho_1}$$

вырожденных векторных бризеров [22] явно зависят от бегущего времени и координаты,

$$|\mathcal{E}_-(z,t)| = B\left|\frac{(\sigma_2+\rho_1)^{1/2}(1-4a)\mathrm{ch}(zbB^2\beta) + \sqrt{2a}\cos(t\Omega B\sqrt{|\beta/k_2|})}{\sqrt{2a}\cos(t\Omega B\sqrt{|\beta/k_2|}) - \mathrm{ch}(zbB^2\beta)} - \frac{\mathrm{i}b\,\mathrm{sh}(zbB^2\beta)}{\sqrt{2a}\cos(t\Omega B\sqrt{|\beta/k_2|}) - \mathrm{ch}(zbB^2\beta)}\right|, \quad (20)$$

и существуют при $\beta k_2 < 0$. Здесь $b = \sqrt{8a(1-2a)}$; $\Omega = 2\times\sqrt{1-2a}$; константа $B > 0$ задает значение постоянного пьедестала бризера и его пространственно-временной масштаб. При $a < 1/2$ выражение (20) описывает бризер Ахмедиева, при $a > 1/2$ – солитон Кузнецова–Ма, а в пределе $a \to 1/2$ – рациональный солитон [24, 25]. В (20) B и a являются свободными параметрами задачи.

Проекция J_{b} вектора плотности спиновой части УМ волны (20) на ось z также зависит от бегущего времени и координаты:

$$J_{\mathrm{b}}(z,t) = \frac{\rho_1|\mathcal{E}_-(z,t)|^2}{8\pi k(\sigma_2+\rho_1)}. \quad (21)$$

Для бризера Ахмедиева она периодична по бегущему времени и солитоноподобна по координате, для солитона Кузнецова–Ма она солитоноподобна по бегущему времени и периодична по координате. В случае рационального солитона она ведет себя как солитон и в пространстве, и по бегущему времени. Усредненное по t и z значение J_{b} легко получить, взяв сначала интеграл по той переменной, которая соответствует солитонному поведению бризера. Усредненные по t и z значения $J_{\mathrm{b}}(z, t)$ для всех бризеров одинаковы,

$$\langle J_{\mathrm{b}}(z,t)\rangle_{z,t} = \frac{\rho_1 B^2}{8\pi k}, \quad (22)$$

и отличны от нуля только в гиротропной среде при $\rho_1 \neq 0$.

3. Заключение

Особенностью полученных выражений для вектора плотности спиновой части УМ является разнообразие форм их зависимости от параметров нелинейной гиротропной среды, бегущего времени и координаты. В отсутствие нелинейной гирации зависимости от двух последних переменных исчезают. Для всех вырожденных решений, как кноидальных волн, так и бризеров, вектор плотности спиновой части УМ пропорционален параметру нелинейной гирации ρ_1 и отличен от нуля только в изотропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности ($\rho_1 \neq 0$).

Полученные результаты для вектора плотности спиновой части УМ для кноидальных волн и векторных бризеров могут способствовать изучению свойств, присущих как фотону, так и нелинейной оптически активной среде, а также использоваться в интегральной оптике и оптомеханических приборах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-02-00069).

1. Топтыгин И.Н. *УФН*, **187**, 1007 (2017).
2. Барабанов А.Л. *УФН*, **163**, 75 (1993).
3. Вульфсон К.С. *УФН*, **152**, 667 (1987).
4. Соколов И.В. *УФН*, **161**, 175 (1991).
5. Stewart A.M. *Eur. J. Phys*., **26**, 635 (2005).
6. Barnett S.M. *J. Mod. Opt*., **57**, 1339 (2010).
7. Barnett S.M. et al. *J. Opt.*, **18**, 064004 (2016).
8. Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000).
9. Bialynicki-Birula I., Bialynicka-Birula Z. *J. Opt*., **13**, 064014 (2011).
10. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1981).
11. Crichton J.H., Marston P.L. http://ejde.math.unt.edu.
12. Bliokh K. Y., Nori F. *Phys. Reports*, **592**, 1 (2015).
13. Loke V.L.Y., Asavei T., Parkin S., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H., Nieminen T.A., in *Twisted Photons, Applications of Light with Orbital Angular Momentum*. J.P.Torres, L. Torner (Eds) (Berlin: Wiley-VCH, 2011, Ch. 6, pp 93–116).
14. Beijersbergen M.W., Coerwinkel R.P.C., Kristesen M., Woerdman J.P. *Opt. Commun*., **112**, 321 (1994).
15. Баженов В.Ю., Васнецов М.В., Соскин М.С. *Письма в ЖЭТФ*, **52**, 1037 (1990) [*JETF Lett*., **52**, 429 (1990)].
16. Courtial J., Dholakia K., Allen L., Padgett M.J. *Opt. Commun.*, **144**, 210 (1997).
17. Devlin R.C., Ambrosio A., Rubin N.A., Balthasar Mueller J.P., Capasso F. *Science*, **358** (6365), 896 (2017).
18. He L., Li H., Li M. *Sci. Adv*., **2**, e1600485 (2016).
19. Макаров В.А., Пережогин И.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42**, 117 (2012) [*Quantum Electron*., **42**, 117 (2012)] .
20. Makarov V.A., Petnikova V.M., Potravkin N.N., Shuvalov V.V. *Phys. Wave Phenom*., **21**, 264 (2013).
21. Макаров В.А., Петникова В.М., Потравкин Н.Н., Шувалов В.В. *Квантовая электроника*, **42**, 1118 (2012) [*Quantum Electron*., **42**, 1118 (2012)].
22. Makarov V.A., Petnikova V.M., Ryzhikov P.S., Shuvalov V.V., Yadvichuk A.V. *Phys. Wave Phenom.*, **25**, 20 (2017).
23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Наука, 1971).
24. Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Dias F., Genty G., Akhmediev N., Dudley J.M. *Nature Phys*., **6**, 790 (2010).
25. Kibler B., Fatome J., Finot C., Millot G., Genty G., Wetzel B., Akhmediev N., Dias F., Dudley J.M. *Sci. Reports*, **2**, 463 (2012).