

## НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

# Управление эффективностью генерации излучения на утроенной частоте при взаимодействии волн с малым числом колебаний в нелинейных средах

М.А.Князев, С.А.Козлов

*Показано, что взаимодействие волн, состоящих из малого числа колебаний и распространяющихся под углом друг к другу, может приводить в средах с безынерционной кубической нелинейностью к значительному увеличению эффективности генерации излучения на утроенной частоте, при этом перераспределения энергии между пересекающимися пучками с широким спектром не происходит.*

**Ключевые слова:** нелинейная оптика, волны с малым числом колебаний, генерация излучения на утроенной частоте, оптический транзистор.

### 1. Введение

Анализ взаимодействия интенсивных световых волн, распространяющихся в оптической среде под углом друг к другу, – это классическая задача нелинейной оптики [1]. Для квазимонохроматических волн она всесторонне изучена ещё в прошлом веке. Дифракция световых пучков на динамической решётке показателя преломления, индуцированной в области их перекрытия в нелинейной среде, может приводить к перераспределению энергии излучения по направлениям, в том числе к её перераспределению между пучками [2]. Это явление представляет интерес в различных приложениях, например для улучшения временного контраста мощных фемтосекундных лазерных импульсов [3] или для создания сверхбыстрых полностью оптических переключателей и транзисторов [4, 5]. Однако важно отметить, что в средах с безынерционной нелинейностью показателя преломления обмена энергией между пересекающимися квазимонохроматическими световыми пучками не происходит [6].

В последние десятилетия создание эффективных источников высокоинтенсивных оптических волн, состоящих из малого числа колебаний [7–9], потребовало нового взгляда на традиционные задачи нелинейной оптики [10–12]. Это связано с тем, что, во-первых, спектр таких пакетов с предельно малым числом колебаний становится очень широким, а во-вторых, их распространение без разрушения вещества возможно при гораздо больших интенсивностях, чем в случае квазимонохроматического излучения. Нелинейные эффекты, являющиеся слабыми в поле квазимонохроматического излучения при интенсивностях вплоть до интенсивности пробоя, в поле импульсов предельно коротких длительностей из-за повышения порога пробоя могут стать очень сильными. Так, с умень-

шением числа колебаний в импульсе до трёх и менее может происходить заметное уменьшение эффективности самофокусировки при заданном превышении мощности излучения над критическим значением [13] при существенном увеличении эффективности генерации излучения на утроенной частоте [14, 15] с коэффициентом преобразования по энергии в него волны накачки вплоть до нескольких процентов.

Отражение сонаправленных и встречных импульсов от неоднородности показателя преломления среды, индуцированной высокоинтенсивным сверхкоротким импульсом и распространяющейся с его скоростью, было рассмотрено в работах [16, 17]. Теоретически продемонстрировано существенное повышение частоты излучения за счёт доплеровского сдвига на быстро движущейся индуцированной неоднородности среды. В работах [18, 19] показано, что взаимодействие коллинеарных встречных волн с малым числом колебаний может изменить эффективность генерации в нелинейной среде излучения на утроенной частоте. Особенности отражения и преломления сверхкоротких сигнальных импульсов, распространяющихся под углом к высокоинтенсивному импульсу, на индуцированной им неоднородности показателя преломления рассматривались в работах [20–22]. Было показано, что неколлинеарное взаимодействие может приводить к сдвигу частоты, изменению скорости и отклонению сигнального светового пучка от исходной траектории.

Подчёркнём, что в работах [16, 17, 20–22] анализ сильных изменений в характере распространения одного из пересекающихся сверхкоротких световых пакетов проводился в приближении заданной неоднородности показателя преломления, которая индуцировалась в нелинейной среде другой волной. При этом в приведённых там оценках использовались характерные параметры фемтосекундного излучения и характеристики прозрачных диэлектрических сред, т.е. рассматривались условия, когда доминирующая нелинейность поляризованного отклика имеет электронную природу, и этот отклик с хорошим приближением может полагаться безынерционным.

Целью настоящей работы было выявление ключевых закономерностей взаимодействия интенсивных волн с

М.А.Князев, С.А.Козлов. Санкт-Петербургский национальный университет информационных технологий, механики и оптики, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; e-mail: knyazev.michael@gmail.com, kozlov@mail.ifmo.ru

Поступила в редакцию 13 мая 2017 г., после доработки – 15 декабря 2017 г.

малым числом колебаний, которые распространяются под углом друг к другу в прозрачных диэлектрических средах с безынерционной нелинейностью. Такое взаимодействие проанализировано нами строго как единая волновая задача с граничными условиями вхождения в нелинейную среду двух оптических пучков фемтосекундного излучения без введения искусственного для такого случая понятия индуцированного нелинейного показателя преломления среды. Результаты анализа показали, что, как и для квазимонохроматического излучения, для сверхкоротких пакетов, т. е. пакетов, имеющих очень широкий спектр, в изотропных диэлектрических средах с безынерционной кубической по полю нелинейностью перераспределения энергии излучения между сталкивающимися волновыми пакетами не происходит. При этом взаимодействие между ними может приводить к значительному (в несколько раз) увеличению эффективности генерации излучения на утроенной частоте. Под эффективностью генерации излучения на утроенной частоте мы понимаем отношение энергии появившегося в среде излучения на утроенной частоте к энергии исходного излучения на входе в нелинейную среду.

То, что волновой пакет, пересекающий другой интенсивный волновой пакет, повышает за счёт их взаимодействия в нелинейной среде эффективность генерации в первой волне излучения на новых частотах, соответствует важнейшему свойству «оптического транзистора» – усилению света другим светом [23]. Таким образом, при интенсивностях излучения, не приводящих к необратимым изменениям вещества, рассматриваемая схема управления света светом позволяет реализовать эффект «оптического транзистора» с быстродействием в несколько периодов колебаний оптического поля.

## 2. Математическая модель взаимодействия волн из малого числа колебаний в среде с безынерционной нелинейностью

Динамика спектральной плотности  $g$  линейно поляризованного (ТЕ) двумерного непараксиального излучения, в том числе представляющего собой две распространяющиеся под углом друг к другу волны, в однородной изотропной диэлектрической среде с безынерционной кубической нелинейностью может быть описана уравнением [24]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = [k^2(\omega) - k_x^2]g = -\frac{\omega^2 \varepsilon_{nl}}{c^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \\ \times \iiint_{-\infty}^{\infty} g(\omega - \omega', k_x - k'_x, z) g(\omega' - \omega'', k'_x - k''_x, z) \\ \times g(\omega'', k''_x, z) d\omega' dk'_x d\omega'' dk''_x, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$g(\omega, k_x, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} E(t, x, z) \exp[-i(\omega t + k_x x)] dt dx; \quad (2)$$

$\omega$  и  $k_x$  – временная и пространственная частоты излучения;  $k(\omega) = \omega n(\omega)/c$  – волновое число;  $n(\omega)$  – частотная зависимость показателя преломления среды;  $\varepsilon_{nl}$  – коэффициент её нелинейной диэлектрической проницаемости;

$c$  – скорость света в вакууме;  $t$  – время;  $x$  и  $z$  – декартовы пространственные координаты;  $E(t, x, z)$  – напряжённость электрического поля излучения, поляризованного перпендикулярно плоскости  $xz$ . При этом в (1) под осью  $z$  понимаются направление, вдоль которого на любом конечном расстоянии  $z$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  поле непараксиального излучения  $E \rightarrow 0$  [24]; т. е., например, для пересекающихся под углом друг к другу волновых пакетов оно может совпадать с осью одного из пучков, который будем называть основным.

Отметим, что полевой аналог уравнения (1), описывающий «щелевую» дифракцию волны в нелинейной среде, имеет вид [25]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \varepsilon(t') E(t - t') dt' = \frac{\varepsilon_{nl}}{c^2} \frac{\partial^2 E^3}{\partial t^2}, \quad (3)$$

а дисперсионные характеристики среды связаны соотношением

$$n^2(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon(t) \exp(i\omega t) dt.$$

Спектральную плотность двух волн, распространяющихся по отношению друг к другу под углом  $\alpha$  на границе нелинейной среды (при  $z = 0$ ) запишем как

$$\begin{aligned} g(\omega, k_x, 0) = g_1(\omega, k_x) + g_2(\omega, k_x), \\ g_1(\omega, k_x) = ig_{01} \exp\left[-\left(\frac{k_x}{\Delta k_x}\right)^2\right] \\ \times \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right] \right\}, \quad (4) \\ g_2(\omega, k_x) = \frac{ig_{02}}{\cos\alpha} \exp\left\{-\left[\frac{(k_x + \omega \sin\alpha/V)^2}{\Delta k_x^2 \cos^2\alpha}\right]\right\} \\ \times \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right] \right\} \exp[-i(\omega\tau + k_x h)], \end{aligned}$$

где  $g_1(\omega, k_x)$  – спектр основного волнового пакета;  $g_2(\omega, k_x)$  – спектр воздействующей на него волны;  $g_{01}$  и  $g_{02}$  – максимумы их спектральных плотностей;  $\Delta k_x$  и  $\Delta\omega$  – ширина пространственного и временного спектров волновых пакетов на входе в среду соответственно;  $\omega_0$  – центральная частота излучения;  $V = c/n(\omega_0)$  – фазовая скорость воздействующей волны (различием её фазовой и групповой скоростей и их дисперсией на входе в среду пренебрегаем);  $\alpha$  – угол между осью  $z$  (совпадает с направлением распространения основной волны) и осью светового пучка, воздействующего на основную волну;  $\tau$  – временная задержка воздействия пучка;  $h$  – его поперечное смещение вдоль оси  $x$ .

Полевые аналоги граничных условий (4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} E(t, x, 0) = E_1(t, x) + E_2(t, x), \\ E_1(t, x) = E_0 \exp\left[-\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2\right] \sin(\omega_0 t), \quad (5) \\ E_2(t, x) = E_{02} \exp\left\{-\left[\frac{(x - h) \cos\alpha}{\Delta x}\right]^2\right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ - \left[ \frac{t - \tau - (x - h) \sin \alpha / V}{\Delta t} \right]^2 \right\} \\ \times \sin \left\{ \omega_0 \left[ t - \tau - \frac{(x - h) \sin \alpha}{V} \right] \right\},$$

где амплитуды поля  $E_{01} = \Delta \omega \Delta k_x g_{01} / 2\pi$  и  $E_{02} = \Delta \omega \Delta k_x g_{02} / 2\pi$ ;  $\Delta x = 2 / \Delta k_x$  – поперечный размер волновых пакетов на входе в среду;  $\Delta t = 2 / \Delta \omega$  – их начальная длительность.

Ещё одно граничное условие, определяющее направление распространения волн, будем рассматривать в линеаризованном виде [25]:

$$\left. \frac{\partial g(\omega, k_x, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -ig(\omega, k_x, 0) \sqrt{k^2(\omega) - k_x^2}. \quad (6)$$

Для удобства анализа и упрощения вычислений нормируем уравнение (1) и граничные условия (4) и (6), введя безразмерные переменные

$$\tilde{g} = \frac{g}{g_{01}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tilde{k}_x = \frac{k_x}{\Delta k_x}, \quad \tilde{z} = zk_0, \quad (7)$$

где  $k_0 = \omega_0 n(\omega_0) / c$ .

Тогда, в переменных (7) уравнение (1) и граничные условия (4) и (6) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial \tilde{z}^2} + [(1 + \mu_{\text{dsp}} \Delta \tilde{n}(\tilde{\omega}) \tilde{\omega}^2 - \mu_{\text{dif}} \tilde{k}_x^2) \tilde{g} = -\mu_{\text{nl}} \frac{\tilde{\omega}^2}{\Delta \tilde{\omega}^2} \\ \times \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}', \tilde{k}_x - \tilde{k}_x', \tilde{z}) \tilde{g}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'', \tilde{k}_x'', \tilde{z}) \\ \times \tilde{g}(\tilde{\omega}'', \tilde{k}_x'', \tilde{z}) d\tilde{\omega}' d\tilde{k}_x' d\tilde{\omega}'' d\tilde{k}_x'' \quad (8)$$

$$\tilde{g}_1(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x) = i \exp(-\tilde{k}_x^2)$$

$$\times \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\tilde{\omega} + 1}{\Delta \tilde{\omega}} \right)^2 \right] - \exp \left[ - \left( \frac{\tilde{\omega} - 1}{\Delta \tilde{\omega}} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\tilde{g}_2(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x) = i \frac{\eta}{\cos \alpha} \exp \left[ - \left( \tilde{k}_x + \frac{\tilde{\omega} \sin \alpha}{\sqrt{\mu_{\text{dif}}}} \right)^2 \right] \\ \times \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\tilde{\omega} + 1}{\Delta \tilde{\omega}} \right)^2 \right] - \exp \left[ - \left( \frac{\tilde{\omega} - 1}{\Delta \tilde{\omega}} \right)^2 \right] \right\} \quad (9)$$

$$\times \exp \{ -2\pi i [\tilde{\omega} \tilde{\tau} + n(\omega_0) \tilde{k}_x \tilde{h}] \},$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=0} = -i \tilde{g}(\tilde{\omega}, \tilde{k}_x, 0) \sqrt{[1 + \mu_{\text{dsp}} \Delta \tilde{n}(\tilde{\omega})] \tilde{\omega}^2 - \mu_{\text{dif}} \tilde{k}_x^2}, \quad (10)$$

где

$$\Delta \tilde{\omega} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}; \quad \Delta \tilde{n}(\tilde{\omega}) = \frac{n(\tilde{\omega}) - n(\omega_0)}{\Delta n_{\text{dsp}}}; \quad \Delta n_{\text{dsp}} = n \left( \omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2} \right) - n \left( \omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2} \right); \quad \eta = \frac{g_{02}}{g_{01}}; \quad \tilde{h} = \frac{h}{\lambda_0}; \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{T_0};$$

$\lambda_0 = 2\pi c / \omega_0$  – центральная длина волны;  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  – период колебаний излучения.

В уравнении (8) все произведения нормированных переменных, функций и функционалов являются величина-

ми порядка единицы, по крайней мере на начальном этапе динамики спектральной плотности излучения в нелинейной среде. Поэтому значения безразмерных параметров

$$\mu_{\text{dif}} = \left( \frac{\Delta k_x}{k_0} \right)^2, \quad \mu_{\text{dsp}} = 2 \frac{\Delta n_{\text{dsp}}}{n(\omega_0)}, \quad \mu_{\text{nl}} = \frac{8}{3} \pi^2 \frac{\Delta n_{\text{nl}}}{n(\omega_0)},$$

где

$$\Delta n_{\text{nl}} = \frac{3}{8} \frac{\varepsilon_{\text{nl}}}{n(\omega_0)} E_{01}^2 = n_2 I_{01},$$

$n_2$  – коэффициент нелинейного показателя преломления среды и  $I_{01}$  – интенсивность основной волны на входе в среду, позволяют оценить относительное влияние на характер распространения излучения соответственно дифракции, дисперсии и нелинейного отклика среды.

Оценим эти параметры, например, для фемтосекундных импульсов, распространяющихся в кварцевом стекле. Полагая, что на входе в нелинейную среду в поперечном размере щелевого пучка (по уровню  $e^{-1}$ ) укладывается 20 длин волн ( $L = 2\Delta x / \lambda_0 = 20$ ), число полных колебаний в импульсе (по уровню  $e^{-1}$ ) равно семи ( $N = 2\Delta t / T_0 = 7$ ), центральная длина волны излучения  $\lambda_0 = 800$  нм, а его интенсивность  $I = 1.3 \times 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup>, в кварцевом стекле ( $n_2 = 2.9 \times 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт) получаем  $\mu_{\text{dif}} = 4 \times 10^{-4}$ ,  $\mu_{\text{dsp}} = 1.7 \times 10^{-3}$ ,  $\mu_{\text{nl}} = 7.2 \times 10^{-3}$  ( $\Delta n_{\text{dsp}}$  и  $n(\omega_0)$  рассчитывались по данным дисперсии кварцевого стекла [26]). Как видно из оценок, в указанных условиях при распространении излучения в среде динамика его спектра определяется нелинейностью среды, поэтому дисперсией далее пренебрегаем. Хотя, разумеется, понятно, что с уменьшением числа колебаний поля в импульсе (по сравнению с рассмотренным случаем) явление дисперсии может стать наиболее сильным. Дифракционное слагаемое, несмотря на его малость, далее будем учитывать, поскольку нам предстоит рассматривать не распространение одиночного импульса, а взаимодействие двух пучков, распространяющихся под углом друг к другу. Дифракционное уширение пучков при указанных параметрах ожидаем несущественным.

Для решения уравнения (8) в работе использовалась численная схема Кранка–Николсона с адаптивным шагом [27]. Свёртка в правой части уравнения (8) рассчитывалась с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Расчёт был реализован в виде программного модуля на языке Фортран с применением средств параллелизации OpenMP [28].

### 3. Закономерности взаимодействия волн с малым числом колебаний в среде с безынерционной нелинейностью

На рис.1 приведены результаты расчёта взаимодействия волнового пакета, распространяющегося вдоль оси  $z$ , шириной  $\Delta x = 14\lambda_0$  и длительностью  $\Delta t = 3.5T_0$  с интенсивностью, обеспечивающей  $\mu_{\text{nl}} = 7.2 \times 10^{-3}$ , и направленного под углом  $\alpha = 0.2$  рад к нему волнового пакета также шириной  $\Delta x = 14\lambda_0$  и длительностью  $\Delta t = 3.5T_0$  с относительной интенсивностью  $\eta^2 = 0.75$ , поперечным смещением  $\tilde{h} = 57$  и временной задержкой  $\tilde{\tau} = -7$ . Представлены плоскостные изображения пространственно-временного распределения напряжённости электрического поля волновых пакетов. Светло-серые полосы соответствуют положительным значениям напряжённости поля, а

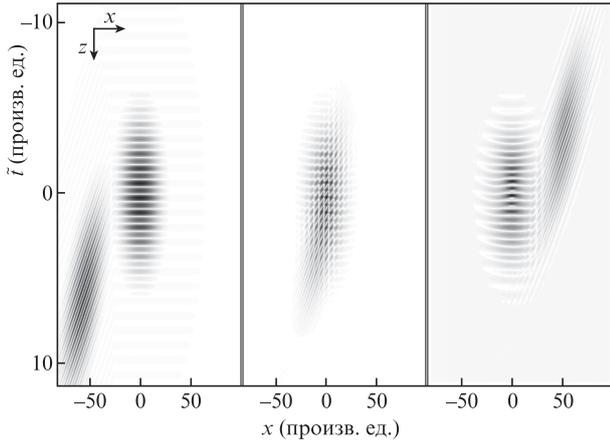


Рис.1. Пространственно-временное распределение электрического поля волн до их взаимодействия (при  $\tilde{z} = 0$ ) (а), во время взаимодействия (при  $\tilde{z} = 2.5 \times 10^3$ ) (б) и после взаимодействия (при  $\tilde{z} = 5.0 \times 10^3$ ) (в).

тёмные – отрицательным (использованы нормированные пространственная координата  $\tilde{x} = x/\lambda_0$  и время  $\tilde{t} = t/T_0$ ).

Из рисунка видно, что на входе в нелинейную среду (при  $\tilde{z} = 0$ ) волны пространственно разделены и их можно считать невзаимодействующими (рис.1,а). На расстоянии  $\tilde{z} = 2.5 \times 10^3$  волновые пакеты пересекаются (рис.1,б), затем проходят друг через друга и опять становятся пространственно разделёнными, распространяясь в дальнейшем независимо (рис.1,в). На расстоянии  $\tilde{z} = 5.0 \times 10^3$  становится заметной фазовая самомодуляция волновых

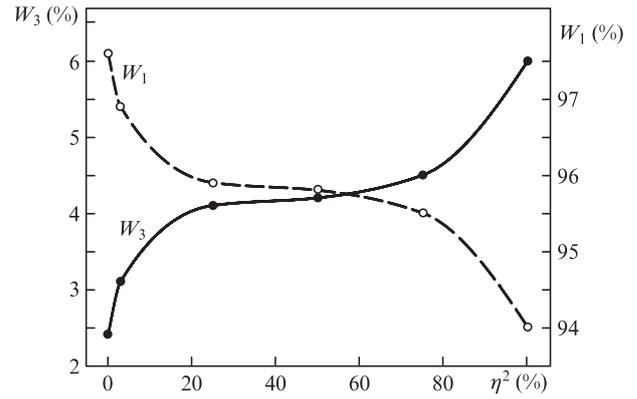


Рис.2. Зависимости доли энергии излучения на утроенной частоте ( $W_3$ ) и доли энергии излучения на основной частоте ( $W_1$ ) для основной волны от относительной интенсивности воздействующей на неё волны  $\eta^2$ . Точки на кривых соответствуют проведенным в работе численным экспериментам.

пакетов. Нелинейный набег фазы в интенсивной части волны достигает  $\pi/4$ .

При уменьшении длительности оптических импульсов всего до нескольких периодов колебаний электромагнитного поля происходит смена доминирующих нелинейных эффектов. Важной становится генерация излучения на утроенной частоте. Её эффективность может достигать несколько процентов [14, 15]. Изменение эффективности при воздействии на сверхкороткий оптический импульс другого импульса показано на рис.2, где приве-

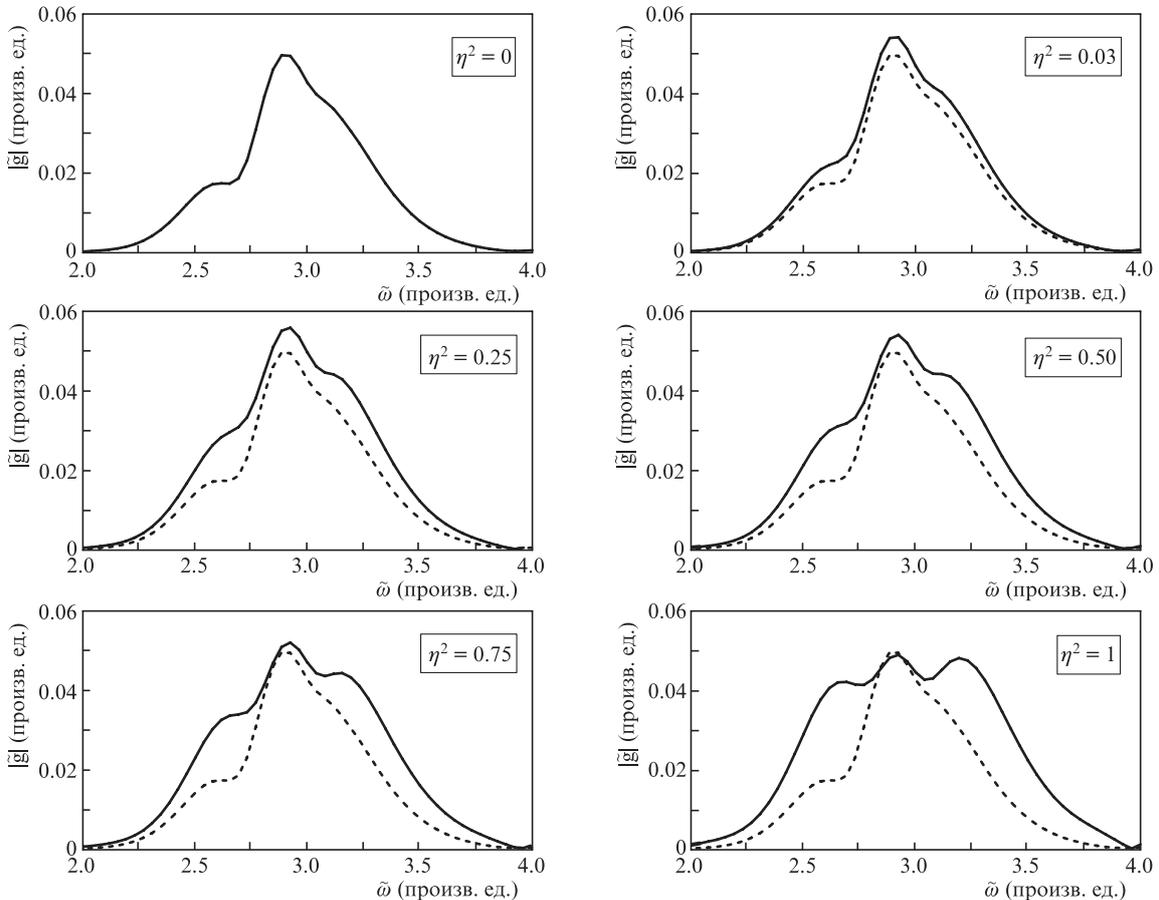


Рис.3. Временной спектр излучения на утроенной частоте, возникающего в основной волне, при различных относительных интенсивностях воздействующей на неё волны  $\eta^2$  (сплошные кривые); штриховые кривые – спектр при  $\eta^2 = 0$ .

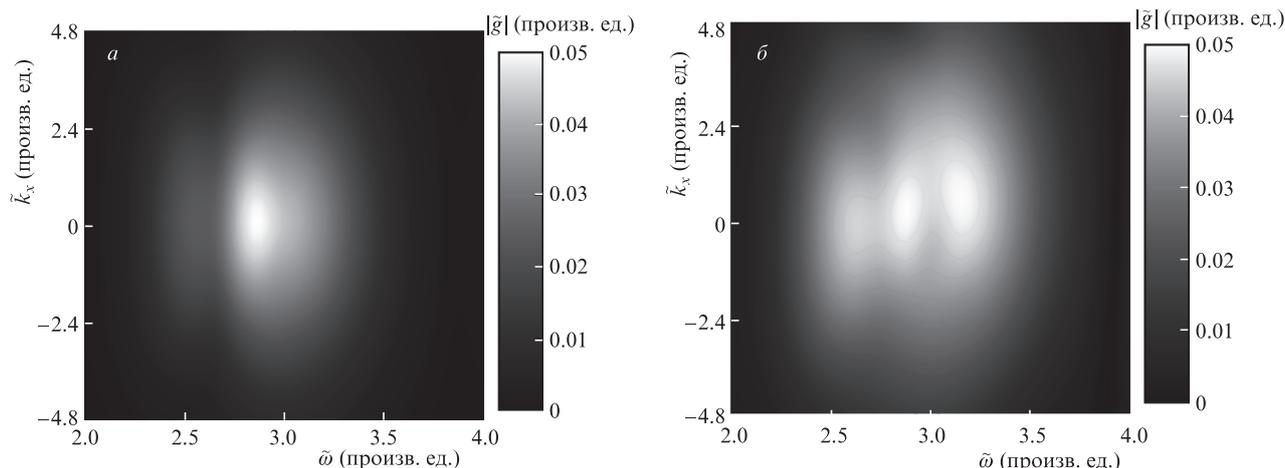


Рис.4. Пространственно-временной спектр излучения, возникающего на утроенной частоте основной волны при относительной интенсивности воздействующей волны  $\eta^2 = 0$  (а) и 1 (б).

денны зависимости энергий волнового пакета на основной и генерируемой утроенной частотах от относительной интенсивности воздействующей волны  $\eta^2$  на расстоянии  $\tilde{z} = 5.0 \times 10^3$ . Видно, что при рассматриваемой интенсивности волны с малым числом колебаний в излучение на утроенной частоте в отсутствие воздействующей волны ( $\eta = 0$ ) уходит около 2.5% энергии. Но воздействие пересекающей волны приводит к значительному увеличению энергии излучения, генерируемого на утроенной частоте основной волной. Например, при  $\eta^2 = 0.85$  эта энергия возрастает в два раза. Важно, что общая энергия основной волны при этом не изменяется. Это означает, что перекачки энергии из воздействующей волны не происходит, а увеличение доли энергии излучения на утроенной частоте обусловлено увеличением скорости генерации третьей гармоники во время взаимодействия волн.

На рис.3 и 4 представлены изменения во временном (при  $k_x = 0$ ) и пространственно-временном спектрах излучения на утроенной частоте основной волны на расстоянии  $\tilde{z} = 5.0 \times 10^3$  при различных относительных интенсивностях  $\eta^2$  воздействующей на неё волны. Сплошные кривые на рис.3 соответствуют расчётным точкам рис.2. Из рис.3 видно, что при увеличении интенсивности воздействующей волны возрастание энергии излучения на утроенной частоте сопровождается уширением временного спектра излучения в этой области частот и его профилированием. Как следует из рис.4, происходит также уширение пространственного спектра излучения на утроенной частоте.

#### 4. Заключение

В настоящей работе показано, что для волн с малым числом колебаний, имеющих широкий спектр, их кросс-взаимодействие в среде с безынерционной кубической нелинейностью, как и для случая квазимонохроматического излучения, не приводит к перераспределению энергии между пересекающимися оптическими пучками. Однако эффективное управление света светом при этом реализовать возможно, значительно (в несколько раз) изменяя эффективность генерации излучения на утроенной частоте для основной волны при воздействии на неё пересека-

ющей под углом другой интенсивной волны. Таким образом, используя простую схему, можно создать «оптический транзистор» с быстроедействием лишь в несколько периодов колебаний светового поля.

Работа поддержана грантом РФ № 074-U01.

1. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., et al. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962).
2. Винецкий В.Л., Кухтарев Н.В., Одулов С.Г. и др. *УФН*, **129**, 113 (1979).
3. Liu J., Kida Y., Kobayashi T., et al. *Opt. Express*, **18**, 22245 (2012).
4. Miller D.A.B. *Nat. Photon.*, **4**, 3 (2010).
5. Demircan A., Amiranashvili Sh., Steinmeyer G. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 163901 (2011).
6. Boyd R.W. *Nonlinear Optics* (New York: Acad. Press, 2008).
7. Zhang W. et al. *Chin. Phys. Lett.*, **27**, 054211 (2010).
8. Гарнов С.В., Щербаков И.А. *УФН*, **181**, 97 (2011) [*Phys. Usp.*, **54**, 91 (2011)].
9. Sun X, Zhang X.-C. *Appl. Phys. Lett.*, **104**, 191106 (2014).
10. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30**, 287 (2000) [*Quantum Electron.*, **30**, 287 (2000)].
11. Сазонов С.В. *Изв РАН. Сер. физич.*, **75**, 172 (2011).
12. Козлов С.А., Самарцев В.В. *Основы фемтосекундной оптики* (М: Физматлит, 2007).
13. Берковский А.Н., Козлов С.А., Шполянский Ю.А. *Оптический журн.*, **75**, 28 (2008).
14. Козлов С.А., Петрошенко П.А. *Письма в ЖЭТФ*, **76**, 241 (2002).
15. Васильев В.Н., Козлов С.А., Петрошенко П.А., Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **96**, 217 (2004).
16. Розанов Н.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **88**, 577 (2008).
17. Розанов Н.Н. *ЖЭТФ*, **135**, 154 (2009).
18. Буяновская Е.М., Козлов С.А. *Письма в ЖЭТФ*, **86**, 349 (2007).
19. Буяновская Е.М., Козлов С.А. *Оптика и спектроскопия*, **111**, 325 (2011).
20. Сухоруков А.П. и др. *Изв РАН. Сер. физич.*, **76**, 350 (2012).
21. Lobanov V.E., Sukhorukov A.P. *Phys. Rev. A*, **84**, 305 (2011).
22. Kalinovich A.A., Lobanov V.E., Sukhorukov A.P., Zverev D.M. *Phys. Wave Phenomena*, **21**, 5 (2013).
23. Jain K., Pratt G.W. *Appl. Phys. Lett.*, **28**, 719 (1976).
24. Ezerskaya A.A., Ivanov D.V., Kozlov S.A., et al. *J. Infrared Milli Terahz Waves*, **33**, 926 (2012).
25. Kniazev M.A., Kozlov S.A., Dolgaleva K. *Proc. Intern. Conf. Days on Diffraction 2016* (St. Petersburg, 2016, p. 212).
26. Malitson I.H. *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1205 (1965).
27. Crank J., Nicolson P. *Adv. Comput. Math.*, **6**, 207 (1996).
28. Кислин Д.А., Князев М.А., Звягин В.Ф., Козлов С.А. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, **79**, 91 (2012).