

## ОБЗОР

# Моделирование частотных сдвигов мод шепчущей галереи, индуцированных вращением

В.Ю.Венедиктов, А.С.Кукаев, Ю.В.Филатов, Е.В.Шалымов

*Исследованы датчики угловой скорости на основе резонаторов мод шепчущей галереи. При вращении таких резонаторов проявляются различные эффекты, которые могут вызывать спектральный сдвиг их мод. Оптические методы позволяют определять этот сдвиг с высокой точностью, что может использоваться на практике для измерения угловой скорости в инерциальных системах ориентации и навигации. Рассмотрены основные принципы построения датчиков угловой скорости на основе этих эффектов, отмечены их достоинства и недостатки. Также исследуется взаимосвязь эффектов и возможность их влияния друг на друга. Опираясь на аналитические исследования эффектов, рассматривается возможность их комбинированного использования для измерения угловой скорости.*

**Ключевые слова:** эффект Саньяка, моды шепчущей галереи, морфологически зависимый резонатор, датчик угловой скорости.

## 1. Введение

Феномен шепчущей галереи известен уже несколько веков и связан в первую очередь с историческими памятниками архитектуры, находящимися в различных странах (Китай, Италия и т.д.), например с так называемой Стеной Эха, которая окружает двор Храма Императорского Небосвода в Пекине (рис.1) [1]. Стена сделана из особых кирпичей из города Линьцин провинции Шаньдун. Эти кирпичи хорошо обработаны, имеют одинаковую структуру и отличаются от силикатных кирпичей, обычно используемых при строительстве. В них почти нет пор. Такие кирпичи хорошо отражают акустическую волну и практически не поглощают ее энергию. Феномен заключается в том, что звук (шепот) распространяется вдоль вогнутой поверхности стены, а не по кратчайшему пути.

Аналогичные явления встречаются и под куполами некоторых соборов, например собора Святого Павла в Лондоне (рис.1), где это явление было исследовано и описано с научной точки зрения лордом Рэлеем в 19-м веке. Он обнаружил, что акустическое излучение концентрируется в узком слое у вогнутой поверхности и скользит вдоль нее. Таким образом, произнесенные вблизи замкнутой вогнутой поверхности слова, обойдя контур, через некоторое время возвращаются. В этом случае кажется, что поверхность (галерея) шепчет. Для описания данного феномена ученым был введен термин – мода шепчущей галереи (МШГ).

**В.Ю.Венедиктов.** Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Россия, 197022 С.-Петербург, ул. Профессора Попова, 5; Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет, Россия, 199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7/9; e-mail: vlad.venediktov@mail.ru

**А.С.Кукаев, Ю.В.Филатов, Е.В.Шалымов.** Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), Россия, 197022 С.-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Поступила в редакцию 28 сентября 2017 г., после доработки – 8 ноября 2017 г.



Рис.1. Стена Эха вокруг Храма Императорского Небосвода в Пекине (слева) и шепчущая галерея собора Святого Павла в Лондоне (справа).

Позже, в начале 20-го века, было доказано, что существуют электромагнитные МШГ. Долгое время (до последнего десятилетия 20-го века) эти типы волн не привлекали большого внимания [2]. Тем не менее сейчас интерес ученых к оптическим резонаторам МШГ растет [3, 4].

Эти резонаторы представляют собой диэлектрические аксиально-симметричные резонаторы с гладкими краями, поддерживающие существование МШГ за счет полного внутреннего отражения на поверхности резонатора. На сегодняшний день разработаны различные типы таких резонаторов: шарообразные, дискообразные, торообразные, бутылкообразные и т.д. [3]. Повышенный интерес к ним связан с их уникальными характеристиками. Они обладают сверхвысокой добротностью (превышающей в некоторых случаях  $10^9$ ) при малых габаритах (от нескольких сантиметров до нескольких микрон) и ограниченном числе собственных частот. Эти свойства позволяют использовать такие резонаторы в качестве чувствительных элементов компактных высокоточных прибо-

ров. При вращении резонаторов МШГ проявляются различные эффекты, которые могут быть использованы для измерения угловой скорости [5–8]. Наиболее перспективными для создания датчиков угловой скорости представляются эффекты, приводящие к спектральному сдвигу МШГ (эффект Саньяка и влияние центробежных сил на морфологию резонатора). При этом для полноты исследования необходимо не только проанализировать применимость данных эффектов для измерения угловой скорости, но и рассмотреть их взаимное влияние.

## 2. Датчики угловой скорости на основе эффекта Саньяка

Предположим, что оптическое излучение с постоянной в определенном спектральном диапазоне интенсивностью  $I_0$  с помощью вспомогательного волновода вводится в резонатор МШГ (рис.2) во взаимно противоположных направлениях – по часовой стрелке (ЧС) и против нее (ПЧС) (CW и CCW соответственно). Если резонатор неподвижен относительно инерциального пространства, то частоты встречных волн в резонаторе МШГ равны. В этом случае интенсивности ЧС-волны ( $I_1$ ) и ПЧС-волны ( $I_2$ ) соответствуют кривой 1 на рис.3. Предположим, что резонатор начал вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью  $\Omega$ . Хорошо известно, что при вращении эффект Саньяка вызывает сдвиг собственных частот кольцевых резонаторов [9]. Это справедливо и для резонаторов МШГ. Если резонатор вращается, то в соответствии с эффектом Саньяка частоты МШГ для противоположных направлений обхода резонатора расщепляются и их

разность (частотный саньяковский сдвиг) определяется по следующей формуле:

$$\Delta f_s = f_{mCCW} - f_{mCW} = \frac{4Af_m}{cL} \Omega = \frac{2Rf_m}{c} \Omega, \quad (1)$$

где  $f_{mCW}$  и  $f_{mCCW}$  – частоты МШГ для волн, обходящих резонатор по и против часовой стрелки соответственно;  $f_m = c/(\lambda_{m0}n)$  – частота МШГ неподвижного резонатора;  $n$  – показатель преломления материала резонатора;  $\lambda_{m0}$  – длина волны  $m$ -й моды в вакууме;  $A$  – площадь рабочего сечения резонатора;  $c$  – скорость света в вакууме;  $L$  – путь, проходимый модой при однократном обходе резонатора (приблизительно равен периметру рабочего сечения резонатора);  $\Omega$  – угловая скорость вращения относительно оси, перпендикулярной рабочему сечению резонатора;  $R$  – радиус резонатора. В этом случае интенсивность  $I_1$  соответствует кривой 2 на рис.3, а интенсивность  $I_2$  – кривой 3. Из формулы (1) видно, что эффект является невязанным и линейным относительно радиуса резонатора и угловой скорости. Знак частотного сдвига определяется направлением вращения резонатора. Для нахождения угловой скорости резонатор сканируется по частоте в двух взаимно противоположных направлениях (ЧС и ПЧС), определяется невязанный частотный сдвиг  $\Delta f_s$  и вычисляется пропорциональная ему угловая скорость [10].

Недавно было опубликовано экспериментальное исследование датчиков угловой скорости, работающих на основе обусловленного эффектом Саньяка невязанного сдвига МШГ [11, 12]. Сначала был продемонстрирован и испытан макет датчика угловой скорости на основе резонатора МШГ [11]. В макете использовался дискообразный кристаллический резонатор из фторида кальция с добротностью  $\sim 10^9$ , диаметром диска  $\sim 1$  см и толщиной 0.2 мм. Излучение с длиной волны 1.5 мкм и мощностью 0.075 мВт вводилось в резонатор в каждом из встречных направлений. При этом для снижения влияния внешних факторов резонатор МШГ был изолирован от окружающей среды герметичным корпусом. Была измерена предельная чувствительность датчика к угловой скорости, которая составила 2.3 °/ч. Затем был изготовлен и исследован экспериментальный образец этого датчика [12], в котором использовался аналогичный резонатор МШГ диаметром 7 мм. Объем всего экспериментального образца, включая резонатор, полупроводниковый лазер, фотодиоды и т.д., составил 15 см<sup>3</sup>. Его предельная чувствительность была равна около 3 °/ч. Помимо описанных выше пассивных оптических датчиков угловой скорости, эффект Саньяка может быть использован и при построении активных датчиков угловой скорости (лазерных гироскопов). Однако пока предельная чувствительность лазерных гироскопов на основе резонаторов МШГ ниже, а размеры больше. На сегодняшний день достигнутая предельная чувствительность к угловой скорости датчика на основе резонатора МШГ диаметром 18 мм составляет 22 °/ч [13].

Ясно, что в датчиках угловой скорости, работающих на основе эффекта Саньяка, вместо резонаторов МШГ могут использоваться кольцевые волноводные резонаторы различных типов [9]. Однако применение резонаторов МШГ дает некоторые преимущества. Известно, что чем больше добротность кольцевого резонатора, тем выше предельная чувствительность датчика угловой скорости

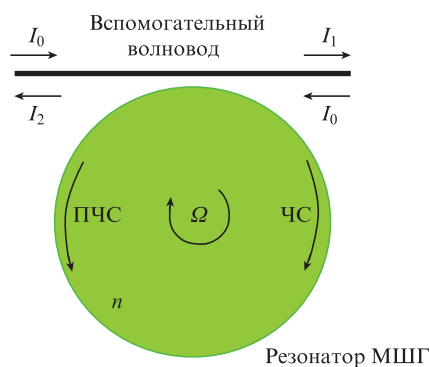


Рис.2. Резонатор МШГ, оптически связанный со вспомогательным волноводом.

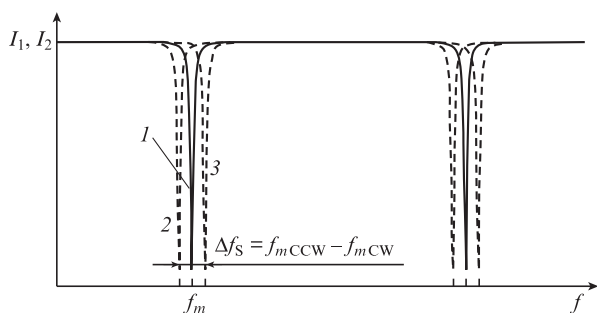


Рис.3. Интенсивности ЧС- ( $I_1$ ) и ПЧС- ( $I_2$ ) волн на выходах неподвижного (1) и вращающегося (2,3) резонаторов; кривые 2 ( $I_1$ ) и 3 ( $I_2$ ) – результат расщепления кривой 1, обусловленного эффектом Саньяка.

на его основе [14]. На сегодняшний день достигнутая в резонаторах МШГ добротность значительно превышает добротность эквивалентных им по размеру волноводных резонаторов. Максимальная добротность, реализованная в резонаторе МШГ из фторида кальция, составила  $10^{11}$  [15]. Типичной для резонаторов МШГ является добротность  $\sim 10^9$ . В то же время добротность лишь лучших волноводных резонаторов превышает  $10^6$  [9]. Кроме того, применение резонаторов МШГ вместо волноводных резонаторов позволяет снизить погрешности, вызываемые поляризационными шумами и эффектом Фарадея [12].

Несмотря на перечисленные достоинства, применение резонаторов МШГ имеет и серьезные недостатки. В отличие от одноمودовых волноводных резонаторов, спектр обычного резонатора МШГ слабо вырожден и, как правило, имеет несколько мод с частотами, близкими к частоте используемой моды. Взаимодействие между этими модами является источником погрешности [11]. Как правило, специфическая форма резонаторов МШГ затрудняет их интегрирование с остальными элементами датчика угловой скорости. Для некоторых типов резонаторов МШГ (например, шарообразных) сложно обеспечить устойчивый ввод и вывод излучения в условиях их движения при измерении угловой скорости. Чтобы не допустить смещения элемента ввода/вывода относительно резонатора, его вместе с резонатором покрывают оптическим полимером с низким показателем преломления. Это, как правило, приводит к снижению добротности резонатора и, как следствие, к уменьшению чувствительности датчика на его основе [16]. Известно, что чем больше мощность входного излучения, тем выше предельная чувствительность датчика угловой скорости, работающего на основе эффекта Саньяка [14]. Однако из-за сверхвысокой добротности резонаторов МШГ и того, что излучение в них локализовано в очень ограниченном объеме, увеличение мощности при их использовании приводит к проявлению различных нелинейных эффектов, способствующих возникновению дополнительной погрешности при измерениях. Это накладывает ограничение сверху на входную мощность излучения и делает непродуктивным снижение диаметра применяемых в описанных датчиках угловой скорости резонаторов МШГ до нескольких миллиметров и менее [12].

### 3. Датчики угловой скорости на основе морфологически зависимых резонаторов

Центробежные силы, вызванные вращением материальных объектов, могут приводить к механической деформации последних и к росту механических напряжений в их материале. Это справедливо и для резонаторов МШГ. Вращение может вызвать изменения радиуса  $R$  рабочего сечения (из-за механической деформации) и показателя преломления  $n$  (из-за механических напряжений) резонаторов МШГ. Как известно, частоты МШГ обратно пропорциональны произведению радиуса рабочего сечения на показатель преломления материала резонатора [2]. Таким образом, под действием центробежных сил возникает взаимный (одинаковый для противоположных направлений обхода контура резонатора) сдвиг собственных частот резонатора  $\Delta f_c$  (рис.4). Стоит отметить, что обычно относительное изменение показателя преломления пренебрежимо мало по сравнению с относительным

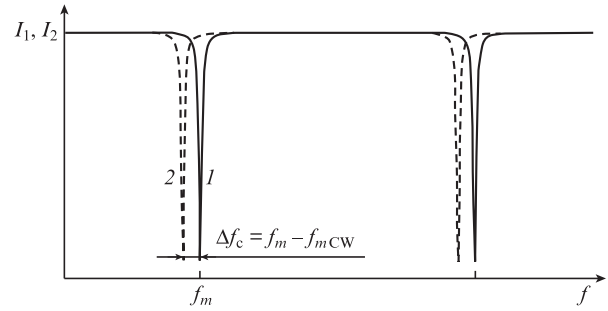


Рис.4. Интенсивности ЧС- ( $I_1$ ) и ПЧС- ( $I_2$ ) волн на выходах неподвижного (1) и вращающегося (2) резонаторов; кривая 2 – результат сдвига кривой 1, обусловленного действием центробежных сил.

изменением радиуса, и его вкладом в сдвиг частот МШГ можно пренебречь [8].

Относительно недавно было предложено использовать данный эффект для создания датчика угловой скорости на основе морфологически зависимого резонатора. При этом было аналитически получено и экспериментально проверено выражение, связывающее взаимный частотный сдвиг, вызываемый вращением шарообразного резонатора МШГ вокруг перпендикулярной рабочему сечению и проходящей через его центр оси (вокруг главной оси чувствительности) [8]:

$$\begin{aligned} \Delta f_c &= f_m - f_{mCW} = f_m - f_{mCCW} = \frac{f_m \Delta R}{R_0} \\ &= \frac{R_0^2 f_m \rho (17 + (6 - 5\nu)\nu)}{30G(1 + \nu)(7 + 5\nu)} \Omega^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R_0$  – радиус рабочего сечения неподвижного резонатора;  $\rho$ ,  $\nu$  и  $G$  – плотность, коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала резонатора соответственно. Фиксируя величину взаимного сдвига частот МШГ, можно определить угловую скорость резонатора. При этом на практике на примере мягких полимерных шарообразных резонаторов МШГ с радиусами 0.5 мм было продемонстрировано, что взаимный сдвиг, вызываемый центробежными силами, имеет достаточную для регистрации величину [8]. Тем не менее ясно, что пока существует множество проблем, связанных с реализацией измерения угловой скорости по взаимному сдвигу частот МШГ. Прежде всего они обусловлены влиянием на него различных внешних факторов (изменения температуры окружающей среды, давления, влажности и т.д.). В связи с этим в датчиках угловой скорости на основе морфологически зависимых резонаторов необходимо либо исключить влияние этих факторов, либо оценить их и компенсировать при вычислениях.

Как отмечалось выше, выражение (2) справедливо только для шарообразного резонатора МШГ, вращающегося вокруг главной оси чувствительности. Рассмотрим, как крепление резонатора к вращающемуся основанию влияет на его реакцию и каким образом резонатор реагирует на центробежные силы при вращении вокруг оси, перпендикулярной главной оси. Для этого используем данные, полученные в результате моделирования в программном пакете OOFELIE::Multiphysics.

Внешний вид модели шарообразного резонатора МШГ, построенной с помощью геометрического пакета

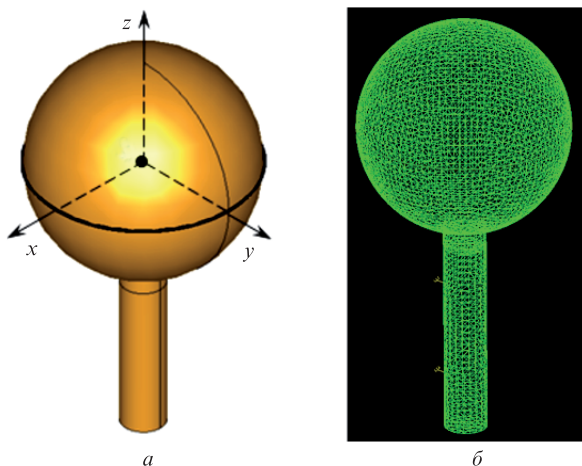


Рис.5. Внешний вид модели шарообразного резонатора МШГ (а) и сетка его конечных элементов (б).

ООFELIE::Multiphysics, представлен на рис.5,а. При моделировании считалось, что свет вводится в резонатор через оптический элемент, жестко закрепленный на поверхности шара, и обходит его по контуру (отмечен толстой линией). Модель резонатора состояла из шара радиусом 5 мм, закрепленного на цилиндрической ножке с радиусом, изменяемым в процессе моделирования в интервале  $r = [0.1; 4]$  мм. В качестве материала резонатора использовался либо мягкий оптический полимер полидиметилсилоксан (ПДМС) с отвердителем (в соотношении 60:1), либо плавленый кварц. Материалом ножки был плавленый кварц. При моделировании использовались параметры материалов, приведенные в табл.1.

Табл.1. Параметры материалов резонаторов МШГ.

Материал	Плотность (кг/м <sup>3</sup> )	Коэффициент Пуассона	Модуль сдвига (Па)
Плавленый кварц	2200	0.17	$31 \times 10^9$
Фторид кальция	3180	0.28	$34 \times 10^9$
ПДМС с отвердителем (60:1)	960	0.46	$1 \times 10^3$

Было задано жесткое крепление модели к цилиндрической поверхности ножки. Модель была разбита сеткой конечных элементов, как показано на рис.5,б. Была введена декартова система координат, так, чтобы ее центр совпадал с геометрическим центром резонатора, а ось  $z$  – с осью симметрии ножки резонатора.

Вначале была выполнена верификация построенной модели. Моделировалось вращение шарообразных резонаторов МШГ вокруг их главной оси чувствительности (ось  $z$ ) с различными угловыми скоростями, принадлежащими интервалу  $\Omega = [-50; 50]$  рад/с. При этом, как показано на рис.6, резонатор растягивался в горизонтальной плоскости (плоскость  $xu$ ) и сжимался в направлении оси вращения. Контур, по которому свет распространяется в резонаторе, для наглядности изображен выпукло. Моделирование показало, что при вращении вокруг главной оси чувствительности увеличивается длина контура, по которому свет обходит резонатор, а частота МШГ уменьшается (сдвигается в сторону низких частот). Таким образом, качественно результаты моделирования соответствуют ожиданиям.

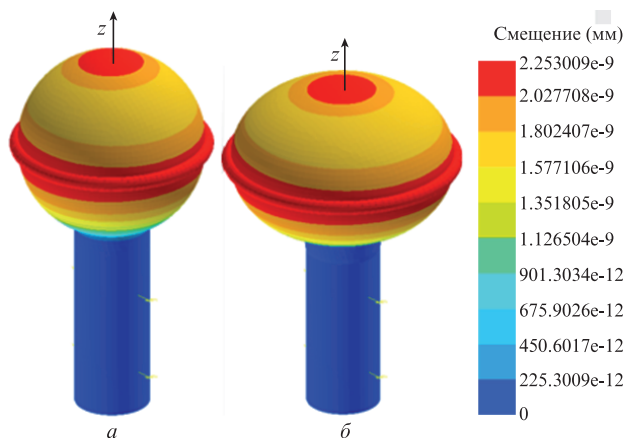


Рис.6. Деформация резонатора из плавленого кварца с радиусом ножки 2 мм при вращении вокруг оси  $z$  со скоростью 50 рад/с (а) и тот же резонатор, но для наглядности существенно больше деформированный (сжат вдоль оси  $z$  и растянут в горизонтальных плоскостях) (б). Цветные варианты рис.6, 9, 11 и 13 даны на сайте «Квантовой электроники» <http://www.quantum-electron.ru>.

На втором этапе верификации модели было выполнено сравнение сдвигов частот МШГ, полученных по результатам моделирования, со сдвигами, полученными из аналитического выражения (2). В результате моделирования определялось изменение длины контура, по которому свет обходит резонатор. Используя тот факт, что относительное изменение длины контура вызывает равное ему относительное изменение частоты МШГ, был вычислен взаимный сдвиг частоты МШГ. Как видно из рис.7, сдвиг частот, полученный по результатам моделирования, зависит от угловой скорости аналогично аналитическому выражению (2). Стоит отметить, что при получении выражения (2) крепление резонатора к основанию не учитывалось. Поэтому чем меньше радиус ножки резонатора, тем спектральный сдвиг моделируемого резонатора ближе к сдвигу, полученному из выражения (2).

На рис.8 приведены полученные по результатам моделирования значения сдвигов собственных частот шарообразных резонаторов при различных радиусах их ножек. С увеличением радиуса ножки шарообразного резонатора уменьшается его реакция на вращение, а следовательно, и чувствительность к угловой скорости приборов на его основе. Причем зависимость чувствительности от радиуса ножки тем выше, чем ближе радиус ножки к радиусу резонатора. Из рис.8 также видно, что при равных условиях частотный сдвиг, вызываемый центробежными силами в резонаторах из плавленого кварца, почти на семь порядков меньше, чем в резонаторах из ПДМС. Однако

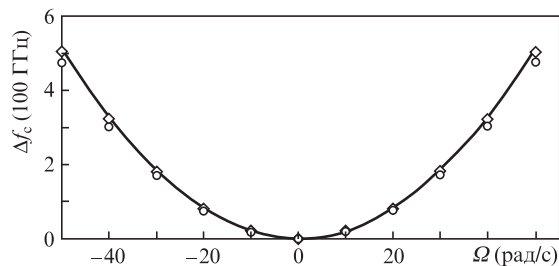


Рис.7. Сдвиги собственных частот шарообразного резонатора из ПДМС при вращении вокруг оси  $z$ , полученные с использованием выражения (2) (сплошная кривая) и по результатам моделирования при радиусах ножек 0.1 (◇) и 4 мм (○).

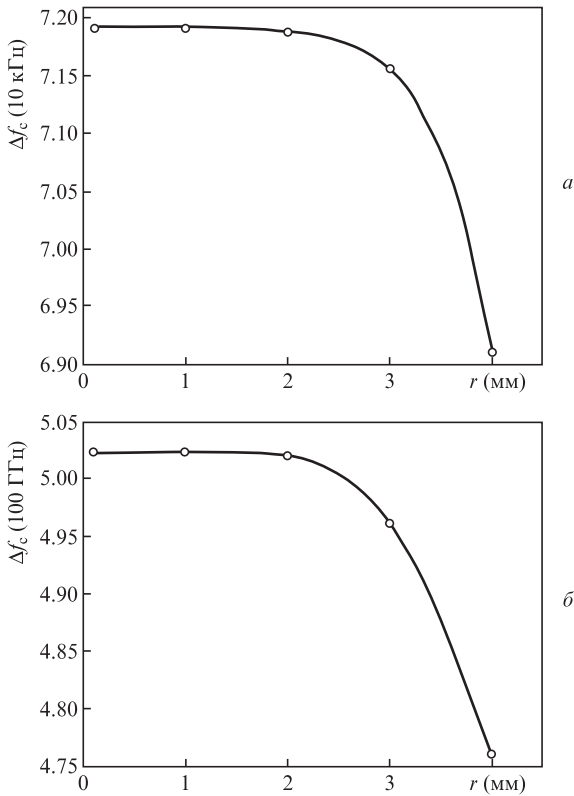


Рис.8. Сдвиг собственных частот шарообразных резонаторов из плавленого кварца (а) и из ПДМС (60:1) (б) при вращении вокруг оси  $z$  с угловой скоростью 50 рад/с и при различных радиусах их ножек. Радиус шара 5 мм.

пока размер полученных на практике высокочастотных резонаторов из ПДМС не превышает 0.5 мм [8], а точность определения частотного сдвига в резонаторах пропорциональна их добротности и радиусу [14]. На сегодняшний день в шарообразных резонаторах из плавленого кварца достижимая добротность более чем на три порядка выше добротности резонаторов из ПДМС (60:1) [17].

Далее моделировалось воздействие центробежных сил на шарообразный резонатор при его вращении вокруг оси  $x$ . При таком вращении контур, по которому свет обходит моделируемый резонатор, из окружности превращается в эллипс (рис.9). Его меньшая ось соответствует оси вращения  $x$ , а большая – перпендикулярна ей (совпадает с осью  $y$ ). Чем выше угловая скорость, тем больше эксцентриситет эллипса. При этом моделирование показало, что путь, проходимый волнами за один оборот резонатора, уменьшается. Частота МШГ шарообразного резонатора сдвигается в направлении, противоположном направлению сдвига, которое соответствует вращению вокруг главной оси чувствительности (ось  $z$ ). Поскольку в общем случае при измерении угловой скорости ориентация оси вращения неизвестна, чувствительность к составляющей угловой скорости, перпендикулярной оси  $z$ , приводит к неопределенности результатов измерения угловой скорости по взаимному сдвигу частот МШГ. Предположительно, использование триады резонаторов МШГ, рабочие сечения которых взаимно ортогональны, должно позволить устранить этот недостаток.

Теперь рассмотрим влияние центробежных сил на «плоские» (торообразные и дискообразные) резонаторы МШГ при различных высотах резонаторов и радиусах ножек. Модели «плоских» резонаторов МШГ, построенные

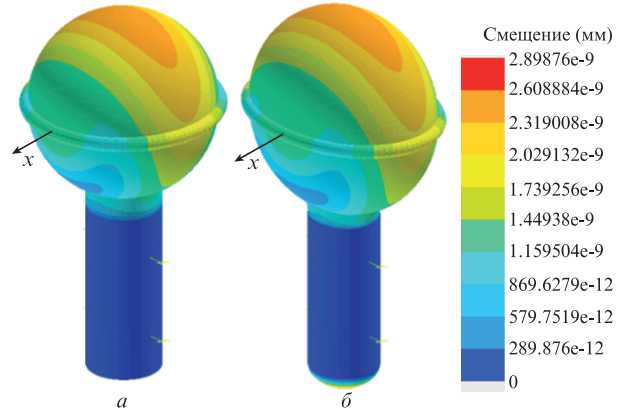


Рис.9. Деформация резонатора из плавленого кварца с радиусом ножки 2 мм при вращении вокруг оси  $x$  со скоростью 50 рад/с (а) и тот же резонатор, но для наглядности существенно больше деформированный (б).

с помощью встроенного редактора геометрии OOFELIE:: Multiphysics, представлены на рис.10,а. Край резонатора радиусом 5 мм оканчивается либо тором с радиусом образующей его окружности 10 мкм, либо клином с углом  $\sim 23^\circ$ . Высота резонатора (его мембраны) при моделировании варьировалась в интервале  $h = [2; 9]$  мкм, а радиус его ножки – в интервале  $r = [0.5; 4]$  мм. Материалом резонатора был плавленый кварц. Мягкий оптический полимер ПДМС (60:1) в качестве материала резонатора не рассматривался, т.к. на сегодня еще не доказана возможность

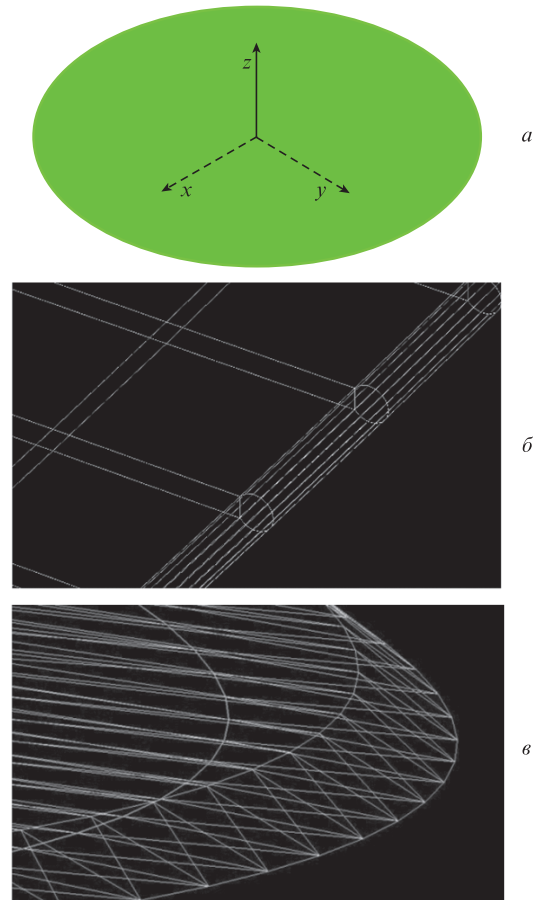


Рис.10. Модель «плоских» (торообразного и дискообразного) резонаторов МШГ (а), а также сетки конечных элементов торообразного (б) и дискообразного (в) резонаторов.

получения полимерных резонаторов МШГ такой формы. Построенные модели, как показано на рис.10,б,в, были разбиты сеткой конечных элементов. Была введена декартова система координат, так, чтобы ее центр совпадал с геометрическим центром резонатора, а ось  $z$  – с осью симметрии ножки резонатора.

С использованием описанной выше модели исследовалось влияние центробежных сил на торообразный и дискообразный резонаторы при их вращении вокруг главной оси чувствительности (ось  $z$ ) с угловой скоростью  $\Omega = 50$  рад/с. При этом, как и у шарообразных резонаторов, у «плоских» резонаторов (рис.11) при вращении вокруг главной оси чувствительности увеличивается длина контура, по которому свет обходит резонатор, а частота МШГ уменьшается (сдвигается в сторону низких частот). Причем реакции на вращение эквивалентных по размеру дискообразных и торообразных резонаторов МШГ практически совпадают и лишь немного различаются количественно. Качественное несоответствие между этими двумя резонаторами наблюдается только при уменьшении их габаритов (радиусов) до нескольких десятков микрон. Зафиксировать на практике вызванный вращением спектральный сдвиг собственных частот таких резонаторов пока не представляется возможным, поэтому в рамках данной работы резонаторы такого размера интереса не представляют. В связи с вышесказанным, далее влияние центробежных сил на «плоские» резонаторы МШГ рассматривается только на примере торообразных резонаторов.

На рис.12 приведены полученные по результатам моделирования значения сдвигов собственных частот торообразных резонаторов при их различных высотах и радиусах ножек. При увеличении радиуса ножки и высоты резонатора снижается его реакция на вращение. В отличие от шарообразного резонатора, реакция которого на вращение слабо зависит от радиуса ножки и при ее малых радиусах ( $r < 0.4R$ ) практически постоянна (см. рис.8), у торообразного резонатора эта зависимость более существенна практически при любых радиусах ножки (рис.12). При использовании торообразного и дискообразного резонаторов зависимость величины спектрального сдвига от радиуса ножки более линейна. Интересной особенностью «плоских» резонаторов является возможность повышения чувствительности приборов на их основе к центробежным силам за счет уменьшения высоты резонатора (толщины мембраны).

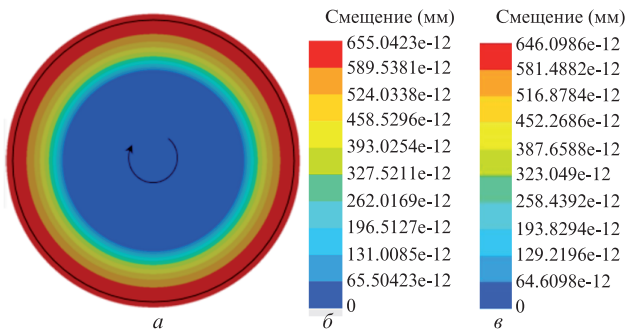


Рис.11. Увеличенные смещения (черная окружность – край неподвижного резонатора) в «плоских» (торообразном и дискообразном) резонаторах высотой 3 мкм с радиусом ножек 3 мм при вращении вокруг оси  $z$  со скоростью 50 рад/с (а), а также шкалы смещений для торообразного (б) и дискообразного (в) резонаторов.

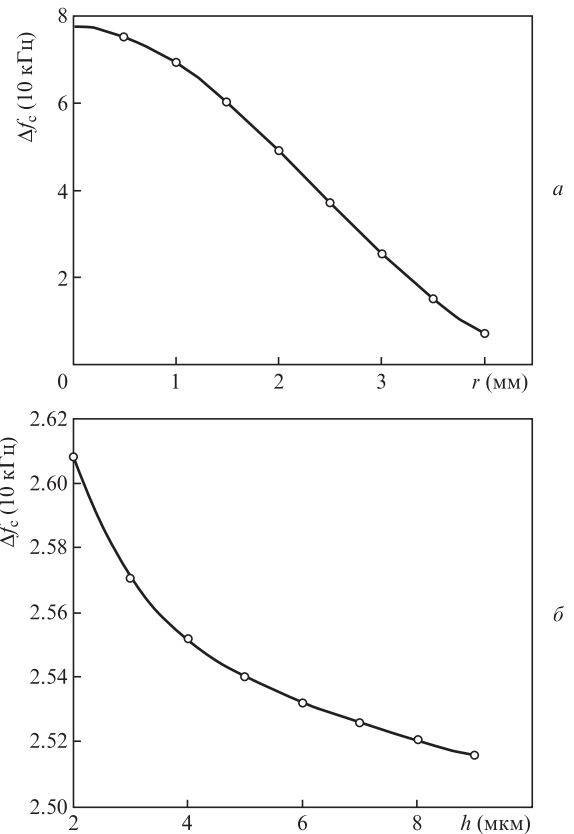


Рис.12. Сдвиг собственных частот торообразных резонаторов при их вращении вокруг оси  $z$  с угловой скоростью 50 рад/с, высоте резонатора 3 мкм и различных радиусах ножек (а), а также при радиусе ножки 3 мм и различных высотах резонаторов (б).

Далее моделировалось воздействие центробежных сил на торообразный резонатор при ее вращении вокруг оси  $x$ . При этом, как и у шарообразного резонатора, контур, по которому свет обходит резонатор, из окружности превращается в эллипс (рис.13). Его меньшая ось параллельна оси вращения (параллельна оси  $y$ ), и чем выше угловая скорость, тем больше эксцентриситет. Однако моделирование показало, что, в отличие от шарообразного резонатора, у торообразного такое вращение приводит не к уменьшению длины контура, по которому МШГ обходит резонатор, а к его увеличению. При этом частота МШГ торообразного резонатора сдвигается в направлении, совпадающем с направлением сдвига при вращении вокруг основной оси чувствительности (ось  $z$ ).

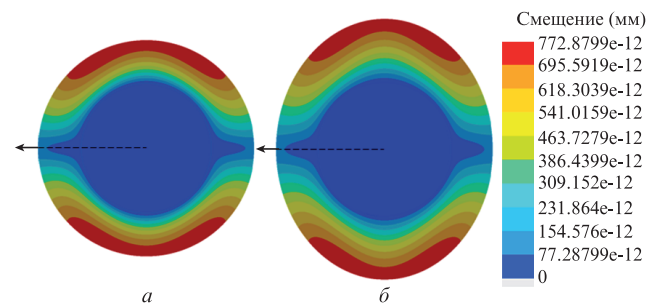


Рис.13. Деформация торообразного резонатора высотой 3 мкм с радиусом ножки 3 мм при его вращении вокруг оси  $x$  со скоростью 50 рад/с (а) и тот же резонатор, но для наглядности существенно больше деформированный (б).

### 4. Сопоставление и взаимное влияние эффектов, вызывающих при вращении резонатора частотный сдвиг МШГ

Сравним частотные сдвиги, вызываемые описанными выше эффектами. Ограничимся рассмотрением сдвигов только в шарообразных резонаторах МШГ. Сдвиг, вызываемый эффектом Саньяка, в первом приближении не зависит от механических свойств материала резонатора (см. (1)). Однако, как видно из (2), величина сдвига, вызываемого центробежными силами, напротив, во многом определяется свойствами материала. Поэтому при сопоставлении эффектов необходимо рассмотреть резонаторы МШГ, выполненные из различных материалов. Известно, что шарообразные резонаторы МШГ чаще всего изготавливаются из плавленого кварца или фторида кальция, реже – из оптических полимеров [13]. Основные характеристики материалов, необходимые для сопоставления эффектов, даны в табл. 1.

На рис.14 приведены полученные из выражений (1) и (2) зависимости сдвигов частот МШГ от скорости вращения для резонаторов с радиусом  $R_0$ , равным в неподвижном состоянии 5 мм. Видно, что при небольших угловых скоростях влияние центробежных сил минимально. Здесь доминирует частотный сдвиг, вызываемый эффектом Саньяка. Таким образом, приборы, которые измеряют угловую скорость по частотному сдвигу, вызываемому центробежными силами, практически нечувствительны к малым скоростям вращения. Также они неспособны определить направление вращения, поскольку эффект взаимен для встречных направлений обхода резонатора (кривые

1, 2, 3 на рис.14 симметричны относительно нуля угловой скорости). Из выражения (2) и рис.14 видно, что чем мягче и тяжелее материал резонатора, тем больше влияние центробежных сил на его радиус. С использованием выражения (2) было вычислено, что при любом размере резонатора сдвиг частот МШГ, вызванный центробежными силами, для резонаторов из фторида кальция на 15% больше, чем для резонаторов из плавленого кварца. При этом сдвиг частот МШГ для резонаторов из ПДМС (60:1) больше почти на семь порядков. Таким образом, чувствительность приборов, измеряющих угловую скорость по частотному сдвигу, который вызывают центробежные силы, можно существенно повысить за счет использования мягких оптических полимеров. Однако, как отмечалось выше, размер и добротность реальных полимерных резонаторов МШГ пока ограничивают выигрыш в чувствительности при их использовании. Кроме того, при высоких угловых скоростях резонаторы из мягких материалов (например, из ПДМС (60:1)) может буквально разорвать на части. Это существенно ограничивает их рабочий диапазон. Повысить стойкость таких резонаторов к центробежным силам можно путем уменьшения их размера или увеличения жесткости (увеличения доли отвердителя в составе полимера). Однако при этом, естественно, снижается и чувствительность к угловой скорости.

Датчики угловой скорости на основе эффекта Саньяка не имеют этих недостатков. Они одинаково чувствительны во всем рабочем диапазоне угловых скоростей и позволяют устанавливать направление вращения (знак сдвига определяется направлением вращения). Тем не менее с увеличением угловой скорости вращения резонаторов МШГ величина частотного сдвига, вызываемого центробежными силами, растет быстрее саньяковского сдвига. При некотором значении угловой скорости  $\Omega'$  зависимости на рис. 14 пересекаются, частотные сдвиги становятся сравнимыми. Используя (1) и (2), можно найти это значение:

$$\Omega' = \frac{60G(1 + \nu)(7 + 5\nu)}{R_0\rho c[17 + (6 - 5\nu)\nu]} \quad (3)$$

На рис.15 представлены зависимости  $\Omega'$  от размеров резонаторов, изготовленных из различных материалов. В области под кривыми на рис.15 доминирует эффект Саньяка, а выше кривых – центробежные силы. Видно, что чем мягче и тяжелее материал резонатора и больше его размер, тем меньше угловая скорость, при которой частотные сдвиги МШГ становятся равными.

При вращении резонаторов с угловой скоростью, большей  $\Omega'$ , приборы на основе эффекта Саньяка менее чувствительны, чем те, которые основаны на частотном сдвиге, вызываемом центробежными силами. При дальнейшем увеличении угловой скорости частотный сдвиг, вызываемый центробежными силами, все больше и больше превышает саньяковский. В связи с этим идея одновременного использования двух эффектов для измерения угловой скорости представляется весьма привлекательной. Однако, прежде чем рассматривать возможные пути ее реализации, необходимо проанализировать, какое влияние могут оказывать эти эффекты друг на друга.

При определении угловой скорости по частотному сдвигу, вызываемому центробежными силами, излучение через один конец вспомогательного волновода вводится в резонатор МШГ, а со второго направляется на фотоприемник. Резонатор сканируется по частоте, и по экстре-

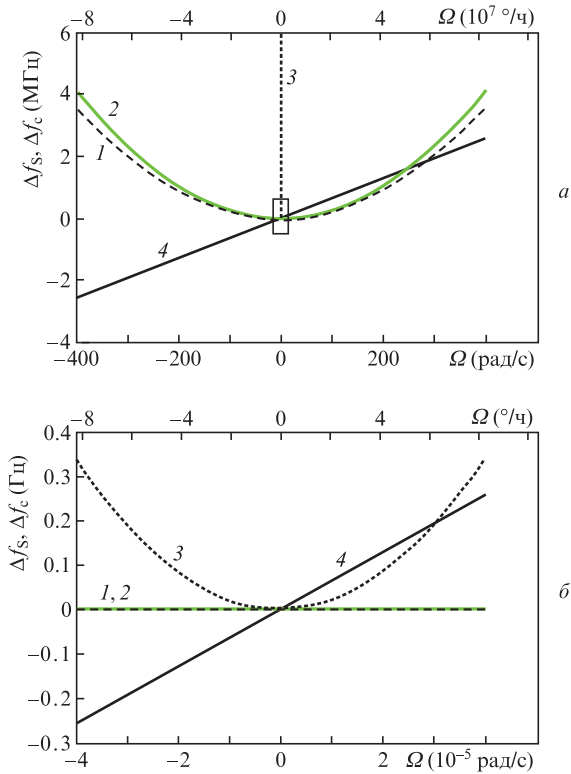


Рис.14. Зависимости частотных сдвигов  $\Delta f_c$  (1, 2, 3) и  $\Delta f_s$  (4) от скорости вращения резонаторов с  $R_0 = 5$  мм (а) и увеличенный участок этих зависимостей (здесь и на рис.16, 17 выделен прямоугольником) (б). Зависимости 1, 2 и 3 построены для резонаторов из плавленого кварца, фторида кальция и ПДМС (60:1) соответственно.

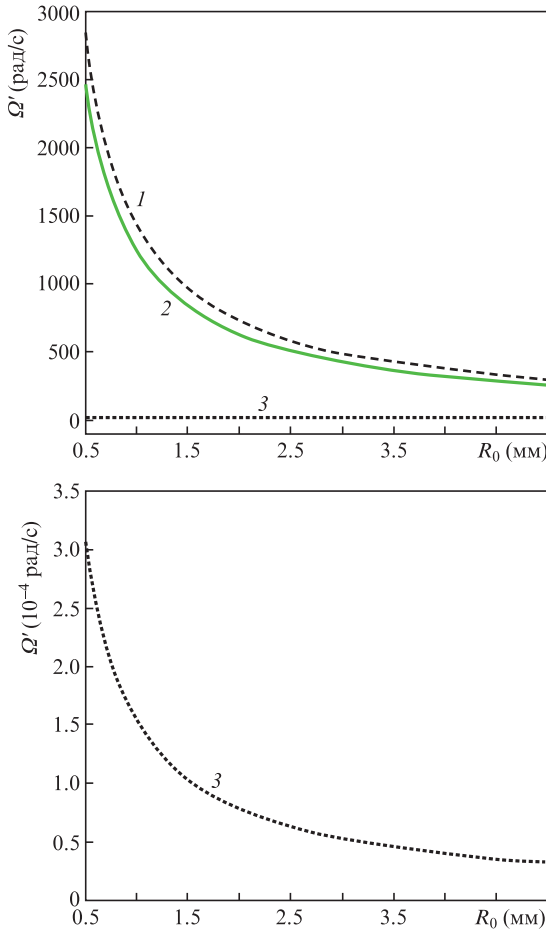


Рис.15. Зависимости от размера резонатора величины угловой скорости, при которой сдвиги, вызываемые эффектом Саньяка и влиянием центробежных сил, равны (а), а также участок зависимости в увеличенном по оси ординат масштабе (б). Зависимости 1, 2 и 3 построены для резонаторов из плавяного кварца, фторида кальция и ПДМС (60:1) соответственно.

муму сигнала на фотоприемнике вычисляется частота МШГ, обходящей резонатор либо по часовой стрелке, либо против нее (в зависимости от того, на каком выходе установлен фотоприемник). По значению частотного сдвига из выражения (2) определяется угловая скорость [8]. Однако, вследствие влияния эффекта Саньяка, полученная суммарная величина частотного сдвига отличается от описанной выражением (2):

$$\Delta f_{\Sigma} = \Delta f_c \pm \frac{\Delta f_s}{2} = \frac{R_0^2 f_m \rho [17 + (6 - 5\nu)\nu]}{30G(1 + \nu)(7 + 5\nu)} \Omega^2 \pm \frac{R_0 f_m}{c} \Omega, \quad (4)$$

где знак «±» перед саньяковским сдвигом выбирается исходя из того, на каком выходе резонатора установлен фотоприемник. Как было показано выше, при измерении угловой скорости по сдвигу, вызываемому центробежными силами, предпочтительней использовать мягкие полимерные резонаторы. При этом саньяковский сдвиг, как правило, сравнительно мал и им можно пренебречь. Однако при небольших угловых скоростях, когда чувствительность рассмотренных приборов и так понижена, саньяковский сдвиг вызывает значительную дополнительную погрешность (рис.16). Ясно, что при уменьшении размера резонатора относительная величина вклада эффекта Саньяка в суммарный частотный сдвиг увеличивается и

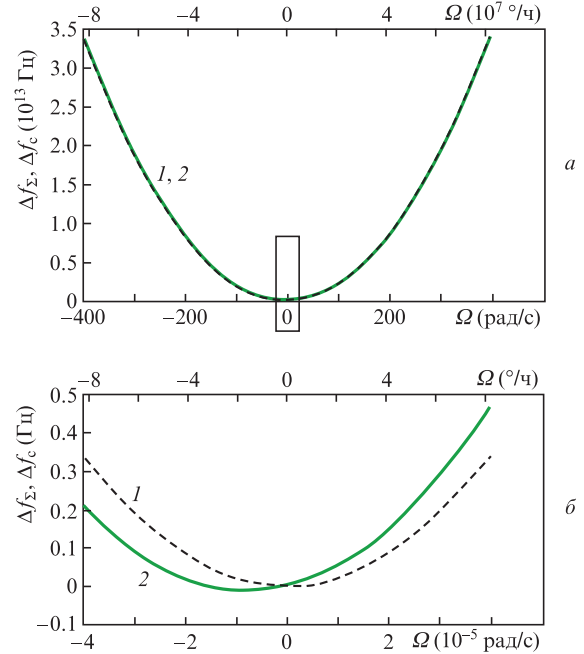


Рис.16. Зависимости сдвигов частот МШГ Δf<sub>c</sub> (1) и Δf<sub>Σ</sub> (2) от скорости вращения резонатора из ПДМС (60:1) радиусом 5 мм (а) и участок этих зависимостей в увеличенном по оси ординат масштабе (б).

обусловленная им составляющая погрешности растет. Модифицировав метод измерения угловой скорости, можно исключить дополнительную погрешность, вызванную эффектом Саньяка. Для этого требуется измерять интенсивность излучения на обоих выходах резонатора МШГ и регистрировать частоты МШГ, обходящих резонатор во взаимно противоположных направлениях,  $f_{mCW}$  и  $f_{mCCW}$ . Тогда сдвиг частот МШГ, вызванный действием центробежных сил, определяется из выражения  $2\Delta f_c = 2f_m - (f_{mCW} + f_{mCCW})$ .

При создании прибора, работающего на основе эффекта Саньяка, нужно исключить влияние центробежных сил. Интересно, что вызванный ими сдвиг МШГ как таковой не влияет на измерение угловой скорости. Это объясняется тем, что он взаимный и при определении разности частот МШГ (саньяковского сдвига) будет исключен. Тем не менее центробежные силы приводят к изменению радиуса резонатора МШГ (см. (2)), который входит в состав масштабного коэффициента эффекта Саньяка (см. (1)). В результате, с учетом влияния центробежных сил, саньяковский сдвиг определяется следующим выражением:

$$\Delta f_s = \frac{2(R_0 + \Delta R)f_m}{c} \Omega = \frac{2R_0 f_m}{c} \Omega + \frac{2R_0^3 f_m \rho [17 + (6 - 5\nu)\nu]}{30G(1 + \nu)(7 + 5\nu)c} \Omega^3.$$

Таким образом, масштабный коэффициент становится нелинейным. Если не принимать во внимание зависимость радиуса от скорости вращения (из-за действия центробежных сил), то появляется дополнительная систематическая погрешность, величина которой при использовании резонаторов из мягких оптических полимеров значительна (рис.17). Как уже говорилось выше, при измерении угловой скорости с использованием эффекта Саньяка



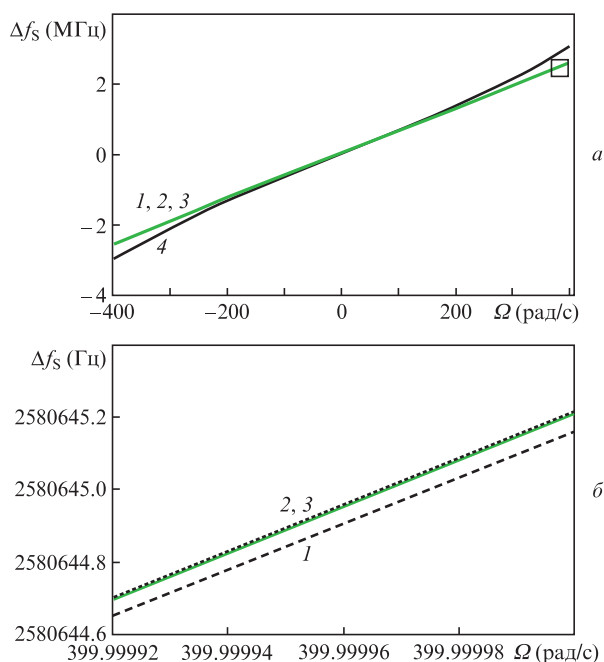


Рис. 17. Зависимости саньяковских сдвигов для резонаторов радиусом 5 мм от скорости вращения (а) и участок этих зависимостей в увеличенном масштабе (б); 1 – частотный сдвиг, вызываемый эффектом Саньяка без учета влияния центробежных сил; 2, 3 и 4 – частотные сдвиги, вызываемые эффектом Саньяка с учетом влияния центробежных сил, для резонаторов из плавяного кварца, фторида кальция и ПДМС (60:1) соответственно.

предпочтительно использовать жесткие (из плавяного кварца или фторида кальция) резонаторы. В этом случае систематическая погрешность, вызванная действием центробежной силы, мала и становится существенной лишь при очень больших угловых скоростях (свыше  $10^4$  рад/с). При необходимости ее можно исключить. Для этого по сумме частот МШГ, обходящих резонатор во встречных направлениях, рассчитывается частотный сдвиг  $\Delta f_c$ , а затем вычисляется поправка  $\Delta R$  к радиусу резонатора МШГ (с использованием выражения (2)).

Возможны и другие способы совместного применения эффекта Саньяка и влияния центробежных сил на морфологию резонатора. Например, можно переключаться между используемыми эффектами при достижении определенной величины угловой скорости, зависящей от материала и размера резонатора. Другими словами, проводить измерения с использованием эффекта Саньяка при небольших угловых скоростях и изменении направления вращения, а затем переключаться на измерения с использованием разных эффектов, когда угловая скорость достигает величины, при которой сдвиги частоты, вызванные этими эффектами, становятся равными ( $|\Delta f_s| = \Delta f_c$  (см. рис.15)). При больших угловых скоростях нужно проводить измерения угловой скорости по частотному сдвигу, вызываемому центробежными силами.

Также можно реализовать одновременное измерение угловой скорости с использованием обоих эффектов и того факта, что один из эффектов взаимен, а другой – нет. При этом нужно определять саньяковский частотный сдвиг по разности частот МШГ, т. е.  $\Delta f_s = f_{mCW} - f_{mCCW}$ , и одновременно вычислять частотный сдвиг, вызванный центробежными силами, по сумме частот МШГ, т. е.  $2\Delta f_c = 2f_m - (f_{mCW} + f_{mCCW})$ . В результате получаются два прибора, работающих одновременно на основе разных

физических эффектов, но на одном и том же резонаторе. Это позволит использовать достоинства обоих эффектов и повысить точность определения угловой скорости за счет комплексирования результатов измерений.

## 5. Заключение

В настоящей работе комплексно рассмотрены эффекты, вызывающие частотный сдвиг мод в резонаторах МШГ при их вращении. Они могут использоваться для определения угловой скорости по величине частотного сдвига МШГ. На сегодняшний день уже разработаны прототипы таких датчиков. Показано, что приборы, измеряющие угловую скорость по взаимному частотному сдвигу (на основе морфологически зависимых резонаторов МШГ), который вызывается центробежными силами, практически нечувствительны к низким скоростям вращения. Они также не позволяют определить направление вращения. Зато эти приборы характеризуются высокой чувствительностью при измерении больших угловых скоростей, особенно в случае использования мягких полимерных резонаторов. Кроме того, их характеристики зависят от типа используемого резонатора МШГ и его геометрических параметров. Чувствительность датчиков угловой скорости на основе морфологически зависимых резонаторов МШГ падает при увеличении радиуса ножки резонатора. При использовании шарообразных резонаторов влияние радиуса ножки на чувствительность резко растет с приближением радиуса ножки к радиусу резонатора. При использовании торообразного и дискообразного резонаторов зависимость чувствительности к вращению от радиуса ножки более линейна. В этом случае чувствительность к угловой скорости можно увеличить, уменьшая толщину резонаторов. Приборы, измеряющие угловую скорость на основе эффекта Саньяка, наоборот, одинаково чувствительны во всем рабочем диапазоне угловых скоростей и позволяют определять направление вращения. В первом приближении их точностные характеристики не зависят от формы резонаторов МШГ и их материала. Стоит отметить, что при высоких скоростях вращения их чувствительность ниже, чем у датчиков угловой скорости на основе морфологически зависимых резонаторов.

Показано, что описанные выше эффекты могут оказывать взаимное влияние. В результате при измерении угловой скорости может возникнуть дополнительная систематическая погрешность, вызванная влиянием паразитного (неучтенного) эффекта. В датчиках угловой скорости на основе морфологически зависимых резонаторов МШГ используются мягкие резонаторы. При этом саньяковский сдвиг МШГ, как правило, сравнительно мал и им можно пренебречь. Однако при измерении небольших угловых скоростей, когда чувствительность этих приборов и так понижена, саньяковский сдвиг вызывает значительную дополнительную погрешность. Кроме того, при уменьшении размера резонатора относительная величина вклада эффекта Саньяка в суммарный частотный сдвиг увеличивается и обусловленная им составляющая погрешности растет. В работе показано, что при необходимости влияние эффекта Саньяка можно алгоритмически исключить. В приборах, работающих на основе эффекта Саньяка, центробежные силы могут влиять на их масштабный коэффициент. Если использовать достаточно жесткие резонаторы, то возникающая при этом систе-

матическая погрешность мала и становится значительной только при очень высоких угловых скоростях (более  $10^4$  рад/с). В заключение отметим, что возможны различные способы совместного использования обоих эффектов для измерения угловой скорости, которые в дальнейшем предполагается развить и исследовать на практике.

Авторы признательны РФФИ за финансирование в рамках проекта 16-02-01002. В.Ю. Венедиктов является исполнителем работ по государственному заданию «Организация научных исследований». Е.В.Шалымов благодарит СПбГЭТУ «ЛЭТИ» за поддержку в рамках проекта «Организация и проведение конкурса научно-исследовательских проектов студентов, аспирантов и молодых научно-педагогических работников».

1. Гофман О.Н. Экскурсия по Храму Неба; <http://beijing.roadplanner.ru/heav/heavtour.html#metka10>.
2. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **32** (5), 377 (2002) [*Quantum Electron.*, **32** (5), 377 (2002)].
3. Vollmer F., Yang L. *Nanophotonics*, **1** (3), 267 (2012).
4. Foreman M.R., Swaim J.D., Vollmer F. *Adv. Opt. Photon.*, **7** (2), 168 (2015).
5. Dmitriyeva A.D., Filatov Yu.V., Shalymov E.V., Venediktov V.Yu. *Proc. IEEE*, **159**19563, 37 (2015).
6. Matsko A.B., Savchenkov A.A., Ilchenko V.S., Maleki L. *Opt. Commun.*, **259** (1), 393 (2006).
7. Xie C.F. et al. *Opt. Lett.*, **41** (20), 4783 (2016).
8. Ali A.R., Ioppolo T. *Sensors*, **14** (4), 7041 (2014).
9. Венедиктов В.Ю., Филатов Ю.В., Шалымов Е.В. *Квантовая электроника*, **46** (5), 437 (2016) [*Quantum Electron.*, **46** (5), 437 (2016)].
10. Венедиктов В.Ю., Филатов Ю.В., Шалымов Е.В. *Квантовая электроника*, **44** (12), 1145 (2014) [*Quantum Electron.*, **44** (12), 1145 (2014)].
11. Liang W., Ilchenko V., Eliyahu D., Dale E., Savchenkov A., Matsko A.B., Maleki L. *Proc. IEEE*, **7435552**, 89 (2016).
12. Liang W., Ilchenko V.S., Savchenkov A.A., Dale E., Eliyahu D., Matsko A.B., Maleki L. *Optica*, **4** (1), 114 (2017).
13. Li J., Suh M.-G., Vahala K. *Optica*, **4** (2), 346 (2017).
14. Боронахин А.М., Лукьянов Д.П., Филатов Ю.Ф. *Оптические и микромеханические инерциальные приборы* (СПб.: Элмор, 2008).
15. Savchenkov A.A., Matsko A.B., Ilchenko V.S., Maleki L. *Opt. Express*, **15** (11), 6768 (2007).
16. An P., Zheng Y., Yan S., Xue C., Wang W., Liu J. *Appl. Phys. Lett.*, **106** (6), 063504 (2015).
17. Городецкий М.Л. *Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью* (М.: Физматлит, 2011).