

# Анализ контурных изображений с помощью оптики спиральных пучков

В.Г.Волостников, С.А.Кишкин, С.П.Котова

*Изложен подход к распознаванию контурных изображений с помощью вычислительной техники, базирующийся на принципах когерентной оптики. Приводятся математическое описание алгоритма процесса распознавания и результаты численного моделирования. Описывается и обосновывается разработанный авторами подход к распознаванию контурных изображений с помощью оптики спиральных пучков.*

**Ключевые слова:** спиральные пучки света, распознавание контурных изображений.

## 1. Введение

Задача распознавания образов не нова, она возникла в середине XX века вследствие развития средств вычислительной техники (СВТ), осуществляющих обработку сигналов различной природы. Изначально это были аналоговые устройства и сопутствующие им сигналы в виде токов и напряжений, а с развитием СВТ и аппаратуры связи стало возможным передавать большие объемы информации в более естественной для человека форме: в настоящее время звук и видеоизображение передаются в цифровом формате. Рост числа сигналов и усложнение их структуры естественным образом порождают задачу их классификации для обработки на ЭВМ.

В настоящей работе область исследования сужена до задачи «машинного зрения» – раздела теории распознавания образов, затрагивающего процессы обработки графической информации, полученной от произвольных регистрирующих устройств, на СВТ. В рамках этого раздела существует ряд подходов к распознаванию изображений, каждый из которых имеет свои границы применимости. Эти границы требуется учитывать при формулировке конкретных требований технического задания к аппаратно-программным комплексам распознавания изображений. В том случае, если нужно определить, находится ли в данный момент в поле зрения конкретной видеокамеры красная машина или нет, достаточно проанализировать гистограммы распределения цветов и линейные размеры зафиксированного объекта, что решается применением довольно тривиальных математических алгоритмов [1]. Если же задача распознавания не столь тривиальна (круг распознаваемых объектов широк и имеет разнородную структуру), то приходится прибегать к более сложным процедурам.

**В.Г.Волостников, С.П.Котова.** Самарский филиал Физического института им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: kotova@fian.smr.ru

**С.А.Кишкин.** Краснодарское высшее военное училище им. генерала армии С.М.Штеменко, Россия, 350063 Краснодар, ул. Красина, 4; e-mail: kishkin.sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 24 октября 2017 г., после доработки – 17 января 2018 г.

Так возникает подраздел машинного зрения – контурный анализ, в рамках которого для осуществления процесса распознавания на изображении выделяются контуры границ объектов. Этот подраздел является достаточно разработанным; следует отметить два ключевых подхода к анализу контуров, базирующихся на идее использования корреляционных функций [2] и нейронных сетей [3]. Нами предлагается иной подход к обработке контуров, основывающийся на принципах когерентной оптики.

Данная работа продолжает наши исследования, посвященные изучению возможности применения спиральных пучков света для распознавания контурных изображений. В публикациях [4, 5] отражены полученные авторами разрозненные, но в то же время ключевые результаты. В настоящей работе приведено структурированное описание теоретической составляющей исследования, затрагивающее когерентную оптику, математическую физику, теорию функций комплексной переменной, функциональный анализ.

Спиральные пучки – объект современной когерентной оптики – впервые были рассмотрены в работах [6, 7] как решения уравнения распространения электромагнитного излучения (уравнения Леонтовича–Фока) в параксиальном приближении для лазерного источника света. Было отмечено, что такие решения являются частным случаем описанных в фундаментальной работе Берри и Ная [8] световых полей с дислокациями волнового фронта. Под дислокациями понимаются такие точки пространства, в которых комплексная амплитуда соответствующего поля обращается в нуль, или, иными словами, точки, в которых фаза не определена и имеет в окрестности этих точек винтовую структуру. Световые поля с дислокациями волнового фронта также принято называть полями с топологическим зарядом. Изучению таких объектов когерентной оптики посвящен ряд работ, среди которых можно выделить работы школы Б.Я.Зельдовича [9]. В нашей работе спиральные пучки – это поля, все дислокации которых имеют один и тот же знак (положительный или отрицательный).

## 2. Проблематика задачи распознавания

Процесс распознавания объектов начинается с предварительной обработки изображения, а именно с выде-

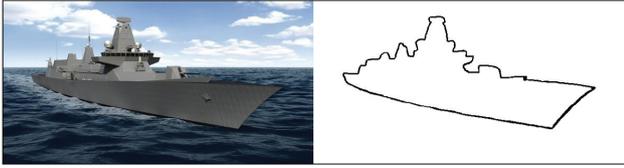


Рис.1. Изображение корабля и выделенный контур.

ления контуров и их последующей параметризации. На рис.1 приведен пример выделения контура для изображения корабля.

Предполагается, что задачи выделения и распознавания контура – разные задачи, поэтому для выделения границ объектов необходимо использовать существующие методы, например фильтры Собеля и граничный детектор Кэнни [1]. Если при выделении получается более одного контура, то результат распознавания изображения в целом является совокупностью результатов распознавания отдельных контуров на нем. Дадим описание процесса распознавания для случая одного контура, поскольку принятие общего решения задачи по совокупности частных решений для отдельных контуров определяется иными алгоритмами, не затрагивающими непосредственно процесс распознавания.

Математическим представлением контуров естественно считать замкнутые плоские кривые, состоящие из упорядоченного набора точек:

$$\zeta(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

На рис.2 приведены изображение самолета, выделенный контур и соответствующая ему наглядная параметризация. В этом случае задачу распознавания можно переформулировать следующим образом: соответствуют ли две рассматриваемые плоские кривые друг другу относительно некоторого критерия подобия?

В фундаментальной работе [3] отмечены четыре классические проблемы, с которыми приходится сталкиваться в рамках контурного анализа: неопределенность выбора начальной точки на контуре, неопределенность определения взаимного поворота и масштаба, а также шумы. Эту ситуацию наглядно иллюстрирует рис.3, где точкой выделена начальная точка на контуре.

Для решения задачи распознавания в работе [3] предлагается рутинный поиск максимума некоторого функцио-

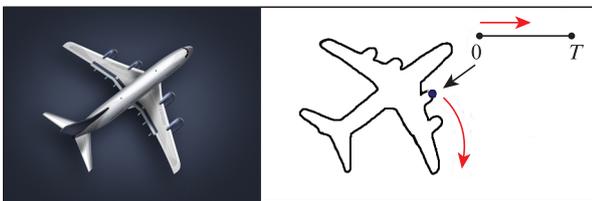


Рис.2. Исходное изображение и параметризованный контур.

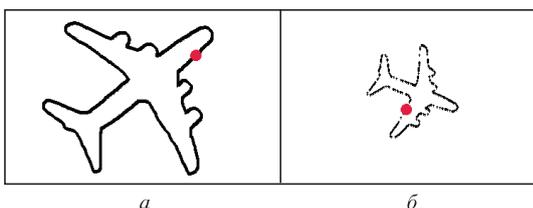


Рис.3. Эталон из базы данных (а) и входной распознаваемый контур (б).

нала правдоподобия четырех переменных  $\Lambda(N, \Delta\varphi, d, |\mu|)$ . Почему приходится прибегать к сложным математическим объектам? Ответ прост: традиционные инструменты анализа функций вида (1) не справляются с задачей в сформулированных условиях неопределенности. Так, например, сама кривая  $\zeta(t)$ , вообще говоря, не обязана быть дифференцируемой, что препятствует ее анализу с помощью рядов Тейлора и им подобных. Кроме того, разложение в ряд, даже если и существует, для одномерных функций существенно зависит от выбора начальной точки (см., напр., подобную зависимость коэффициентов разложения ряда Фурье).

### 3. Оптика спиральных пучков света

В монографии [7] была разработана теория когерентных световых полей, названных спиральными пучками света. В общем случае комплексные амплитуды  $F$  этих полей являются решениями параболического уравнения Леонтовича – Фока в параксиальном приближении:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial l} = 0, \quad (2)$$

где  $(x, y, l) \in \mathbb{R}^3$  – трехмерное пространство ( $l$  – ось распространения лазерного пучка). Решениями этого уравнения являются представленные на рис.4 ортогональные моды Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Приведенные решения – автомодельные, т.е. световые поля обладают свойством структурной устойчивости: распределение интенсивности при распространении пучков в пространстве остается неизменным. Единственное изменяющееся свойство, не затрагивающее структуру пучка, заключается в естественном изменении масштаба (равномерное сжатие или увеличение).

Спиральные пучки света появились в качестве обобщения классических базисных мод при поиске других автомодельных решений уравнения (2), которые могли бы не только масштабироваться, но и поворачиваться вокруг оси распространения пучка. Добавление новой степени свободы позволило получить богатое семейство световых полей с конечной энергией. Так, было установлено, что распределения интенсивностей этих полей могут иметь форму произвольной плоской кривой (что соответствует случаю одиночного контура из разд.2). Выражение для комплексной амплитуды  $S$  спирального пучка в виде кривой  $\zeta(t)$  имеет вид

$$S(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T]) = \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) f(z) =$$

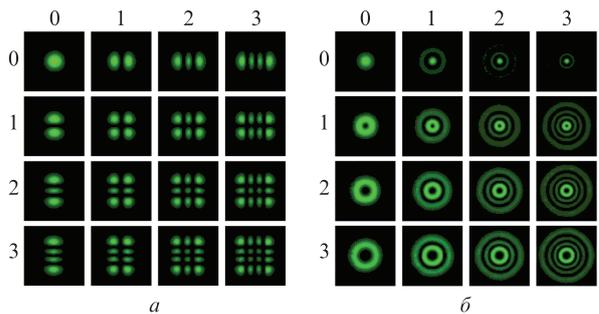


Рис.4. Распределения интенсивностей мод Эрмита–Гаусса (а) и Лагерра–Гаусса (б).

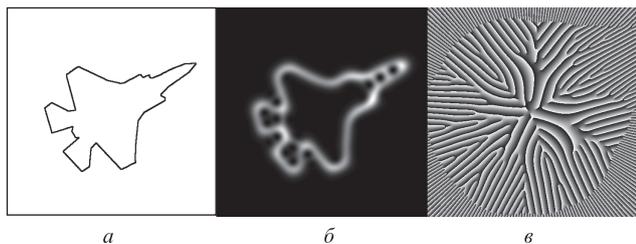


Рис.5. Порождающий контур (а), распределения интенсивности (б) и фазы (в) спирального пучка.

$$= \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) \int_0^T \exp\left\{-\frac{\zeta(t)\zeta^*(t)}{\rho^2} + \frac{2z\zeta^*(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t [\zeta^*(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\zeta'^*(\tau)] d\tau\right\} |\zeta'(\tau)| dt, \quad (3)$$

где  $z = x + iy$  – комплексная переменная в плоскости изображения;  $\rho$  – параметр гауссова пучка; штрих означает производную, а звездочка – комплексное сопряжение.

Выражение для комплексной амплитуды может быть наглядно представлено в виде распределений интенсивности  $I(z, z^*) = |S(z, z^*)|^2$  и фазы  $\varphi(z, z^*) = \arg S(z, z^*)$  (рис.5). На рис.5 четко прослеживается взаимосвязь контура и распределений интенсивности и фазы спирального пучка: распределение интенсивности соответствует порождающей кривой, а на распределении фазы при детальном анализе также могут быть выявлены закономерности расположения дислокаций волнового фронта (нулей комплексной амплитуды).

#### 4. Математический аппарат спиральных пучков

Можно провести такую аналогию: подобно тому, как преобразование Фурье связывает временное и частотное пространства сигнала, преобразование (3) связывает пространство контуров с пространством спиральных пучков света. Преобразование (3) позволяет перенести задачу распознавания контуров в более «комфортное» для анализа пространство спиральных пучков. Поясним приведенный тезис. Во-первых, пространство спиральных пучков (здесь и далее будем отождествлять понятия светового пучка как светового поля и задающей его комплексной амплитуды как функции) есть подпространство световых полей с конечной энергией  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , т.е. все комплексные амплитуды являются квадратично-интегрируемыми. Во-вторых, все спиральные пучки содержат целые функции, которые являются комплексно-дифференцируемыми неограниченное число раз всюду на комплексной плоскости изображения, что позволяет записывать их в виде степенных рядов:

$$S(z, z^*) = \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) z^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{L}_{0n}(z, z^*), \quad (4)$$

где  $\mathcal{L}_{0n}(z, z^*)$  – ортогональные базисные моды Лагерра–Гаусса с нулевым первым индексом. В-третьих, спиральные пучки дают возможность ввести зависимость от выбора начальной точки на контуре. Пусть  $a$  – параметр, отвечающий за выбор начальной точки на периодиче-

ской кривой  $\zeta(t)$ , т.е. задающий ее не на интервале  $[0, T]$ , а на интервале  $[a, a + T]$ . Тогда комплексные амплитуды связаны соотношением:

$$S(z, z^* | \zeta(t), t \in [a, a + T]) = S(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T]) \exp[i\Delta\phi(a)], \quad (5)$$

т.е. смещение начальной точки оказывает влияние только на фазу спирального пучка, которая в каждой точке  $z$  плоскости получает одинаковую добавку  $\Delta\phi(a)$ , и не меняет распределение интенсивности [7]. В-четвертых, пусть изменения масштаба и поворота контура в плоскости распознавания описываются преобразованием  $\zeta(t) \rightarrow \zeta(t)A \exp(i\alpha)$  ( $A$  – масштабный множитель,  $\alpha$  – угол поворота), тогда комплексные амплитуды связаны соотношением

$$S(z, z^* | \zeta(t)A \exp(i\alpha)) = S\left(\frac{z}{A \exp(i\alpha)}, \frac{z^*}{A \exp(-i\alpha)} | \zeta(t)\right) \quad (6)$$

при выполнении так называемого условия квантования:

$$S_{\text{area}} = \frac{1}{2} \pi \rho^2 N_q, \quad N_q = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где  $S_{\text{area}}$  – ориентированная площадь, заметаемая кривой  $\zeta(t)$ ;  $N_q$  – некоторое целое число, называемое параметром квантования (более подробно см. в [3, 4, 7]). В-пятых, спиральные пучки есть частный случай гауссовых пучков: в математическое выражение для них (3) входит экспонента  $\exp(-zz^*/\rho^2)$ , определяющая степень сглаженности спирального пучка для кривой  $\zeta(t)$ .

Процесс изменения спирального пучка в зависимости от параметра  $\rho$  показан на рис.6. Рисунок наглядно демонстрирует подстройку спирального пучка при изменении параметра гауссова пучка. Это полезное свойство можно успешно использовать для противодействия искажающему влиянию шумов, а также для решения задачи отнесения распознаваемого объекта к тому или иному классу. Верхний ряд на рис.6 дает возможность определить принадлежность контура к самолетам, а нижний – к конкретному экземпляру транспортной авиации (для сравнения см. рис.5).

Итак, математический аппарат спиральных пучков позволяет говорить о корректности применения принципов когерентной оптики в задаче распознавания контурных изображений, поскольку появляется возможность преодоления описанных выше классических сложностей контурного анализа.

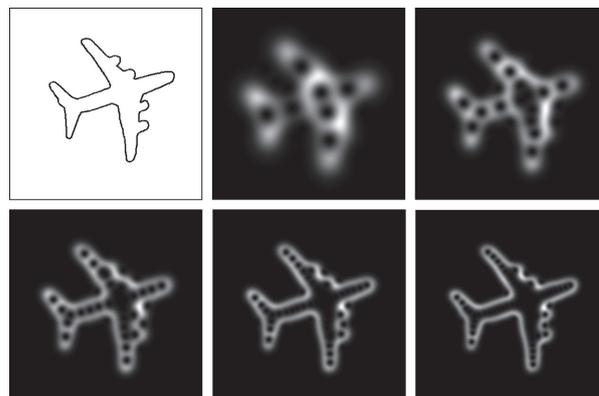


Рис.6. Контур самолета (вверху слева) и распределения интенсивностей пучков при уменьшении параметра гауссова пучка  $\rho$ .

### 5. Процесс распознавания контура

Введем ряд обозначений. Пусть  $\zeta = \zeta(t)$  – входной контур,  $\mathbb{K}_{DB}$  – база данных эталонных объектов,  $\mathbb{K}$  – множество всех контуров,  $S = S(z, z^*)$  – построенный по контуру  $\zeta$  спиральный пучок,  $\mathbb{S}_{DB}$  – база данных спиральных пучков для эталонных объектов,  $\mathbb{S}$  – множество всех спиральных пучков. Таким образом, имеют место следующие тривиальные соотношения:

$$\begin{aligned} \zeta \in \mathbb{K}, \quad \mathbb{K}_{DB} \subset \mathbb{K}, \\ S \in \mathbb{S}, \quad \mathbb{S}_{DB} \subset \mathbb{S} \subset L_2(\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{8}$$

Классическая задача распознавания изображений состоит в задании на множестве всех контуров  $\mathbb{K}$  метрики  $\mu_{\mathbb{K}}$ , определяющей степень схожести двух контуров –  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , с последующим вычислением расстояния в заданной метрике от входного контура  $\zeta$  до множества эталонных объектов  $\mathbb{K}_{DB}$ . Если вычисленное расстояние меньше определенной величины  $\varepsilon$  (в идеале  $\varepsilon = 0$  соответствует точному совпадению), то фиксируется факт распознавания. Существующие методики распознавания контуров всегда явно (или неявно) определяют такие метрики, однако существует значительная трудность: необходимо не просто построить метрику, а сделать ее максимально инвариантной к изменению таких характеристик контура, как выбор начальной точки, масштаба и поворота, и, по возможности, устойчивой к шумам.

В нашем исследовании предлагается осуществлять процесс распознавания контуров не путем введения метрики  $\mu_{\mathbb{K}}$  в пространстве контуров  $\mathbb{K}$ , а путем введения метрики

$$\mu_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow [0, 1] \tag{9}$$

в пространстве спиральных пучков  $\mathbb{S}$ , поскольку комплексные амплитуды имеют ряд полезных свойств (см. разд.4), которые в приведенных терминах можно интерпретировать как инварианты некоторой перспективной метрики  $\mu_{\mathbb{S}}$ . Построим эту метрику.

За основу возьмем коэффициент перекрытия  $\Pi$ . Он определяется следующим образом:

$$\Pi = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} S_1(z, z^*) S_2^*(z, z^*) dx dy}{\left( \iint_{\mathbb{R}^2} |S_1(z, z^*)|^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} |S_2(z, z^*)|^2 dx dy \right)^{1/2}}. \tag{10}$$

В сущности, это выражение – нормированное скалярное произведение двух функций,  $S_1(z, z^*)$  и  $S_2(z, z^*)$ , в гильбертовом пространстве световых полей с конечной энергией  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . Поскольку в нашей задаче контуры могут быть повернуты относительно друг друга в плоскости распознавания, комплексные амплитуды также будут «повернуты» в пространстве спиральных пучков. Расширим классическое понятие коэффициента перекрытия световых полей и введем функцию

$$\Pi(\theta) = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} S_1(z, z^*) S_2^*(z \exp(-i\theta), z^* \exp(i\theta)) dx dy}{\left( \iint_{\mathbb{R}^2} |S_1(z, z^*)|^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} |S_2(z, z^*)|^2 dx dy \right)^{1/2}}, \tag{11}$$

добавив переменную  $\theta$ , отвечающую за поворот одного спирального пучка относительно другого. Поскольку  $\Pi(\theta)$  как функция есть по-прежнему нормированное комплексное скалярное произведение, то значения ее модуля  $|\Pi(\theta)|$  в точности попадают в отрезок  $[0, 1]$ .

На основе функции (11) зададим метрику схожести в пространстве спиральных пучков:

$$\mu_{\mathbb{S}}(S_1, S_2) = 1 - \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\Pi(S_1, S_2, \theta)|. \tag{12}$$

Таким образом, в настоящей работе предлагается отождествить метрики  $\mu_{\mathbb{K}}$  и  $\mu_{\mathbb{S}}$  за счет использования интегрального преобразования (3) контура в спиральный пучок.

### 6. Сведение задачи распознавания к одномерной

Следует отметить, что у предлагаемого подхода к распознаванию изображений при всех его отмеченных достоинствах есть ряд недостатков, укажем их и попробуем устранить.

Самый главный недостаток следует из совокупности достоинств, которые обусловлены тем, что для реализации процесса распознавания используются спиральные пучки света – объекты, вообще говоря, трехмерной природы (по области определения соответствующих функций). Они задаются комплексными амплитудами – непрерывными функциями на всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Возникает ряд вопросов, затрагивающих реализацию процесса распознавания на СВТ. Во-первых, как работать с непрерывными функциями при создании специализированного программного обеспечения для ЭВМ? Во-вторых, сколько пространственных (память) и временных ресурсов будут потреблять разрабатываемые алгоритмы распознавания? В-третьих, каковы будут асимптотические оценки сложности таких алгоритмов (поскольку в общем случае двумерные алгоритмы решения задач зачастую уступают одномерным в скорости обработки при увеличении объема входных данных)?

Сведем задачу распознавания контуров с помощью спиральных пучков к одномерной. Для этого воспользуемся формулой разложения (4) комплексной амплитуды  $S(z, z^*)$  в ряд по полиномам Лагерра – Гаусса. Тогда появляется следующая цепочка преобразований:

$$\zeta(t) \rightarrow S(z, z^*) \rightarrow \{c_n\}_{n=0}^{\infty}, \tag{13}$$

т.е. для осуществления процесса распознавания будем пользоваться не амплитудами, а коэффициентами разложения, поскольку работа с одномерными одноиндексными массивами чисел на ЭВМ существенно проще работы с непрерывными функциями. Рассмотрим следующую последовательность преобразований. Обозначив в формуле (3) внутри интеграла по  $dt$  все, что не зависит от  $z$ , как  $P(t)$ , разложим в ряд Маклорена по  $z$  экспоненту под интегралом и проинтегрируем почленно ряд, сходящийся к аналитической функции:

$$\begin{aligned} S(z, z^*) &= \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) f(z) = \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) \int_0^T \exp\left[\frac{2z\zeta^*(t)}{\rho^2}\right] P(t) dt \\ &= \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) \int_0^T \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{2z\zeta^*(t)}{\rho^2} \right]^n \right\} P(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \left\{ \frac{1}{n!} \left[ \frac{2z\zeta^*(t)}{\rho^2} \right]^n \right\} P(t) dt.$$

Перегруппируем выражения, вынеся все, что не зависит от переменной интегрирования, вне интеграла, и внося гауссову экспоненту под знак суммы:

$$S(z, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n!} \frac{2^n}{\rho^{2n}} \int_0^T [\zeta^*(t)]^n P(t) dt \right] \left[ \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) z^n \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[ \exp\left(\frac{-zz^*}{\rho^2}\right) z^n \right].$$

Таким образом, разложение (4) получено в явном виде, и выражение для вычисления коэффициентов разложения для спирального пучка может быть представлено формулой

$$c_n = \frac{2^n}{n! \rho^{2n}} \int_0^T [\zeta^*(t)]^n \exp\left\{ -\frac{\zeta(t)\zeta^*(t)}{\rho^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t [\zeta^*(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\zeta'^*(\tau)] d\tau \right\} |\zeta'(t)| dt. \quad (14)$$

Проанализируем полученный результат. Прежде всего, целостность предложенного способа введения метрики распознавания  $\mu_S$  не нарушена, поскольку функция перекрытия (11) может быть переписана в терминах коэффициентов разложения за счет ортогональности базиса функций Лагерра – Гаусса следующим образом:

$$\Pi(\theta) = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} S_1(z, z^*) S_2^*(z \exp(-i\theta), z^* \exp(i\theta)) dx dy}{\left( \iint_{\mathbb{R}^2} |S_1(z, z^*)|^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} |S_2(z, z^*)|^2 dx dy \right)^{1/2}} \\ = \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} \sum_n c_n^{(1)} \mathcal{L}_{0n}(z, z^*) \left[ \sum_m c_m^{(2)} \exp(i\theta m) \mathcal{L}_{0m}(z, z^*) \right]^* dx dy}{\left( \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_n c_n^{(1)} \mathcal{L}_{0n}(z, z^*) \right|^2 dx dy \right)^{1/2} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_m c_m^{(2)} \mathcal{L}_{0m}(z, z^*) \right|^2 dx dy \right)^{1/2}} \\ = \frac{\sum_n \sum_m c_n^{(1)} [c_m^{(2)} \exp(i\theta m)]^* \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}_{0n}(z, z^*) \mathcal{L}_{0m}^*(z, z^*) dx dy}{\sum_n |c_n^{(1)}|^2 \sum_m |c_m^{(2)}|^2} \\ = \frac{\sum_n c_n^{(1)} [c_n^{(2)*}]^* \exp(-i\theta n)}{\sum_n |c_n^{(1)}|^2 \sum_n |c_n^{(2)}|^2}. \quad (15)$$

Теперь можно отказаться от прямого применения комплексных амплитуд и использовать коэффициенты разложения спиральных пучков. Напомним, что коэффициенты разложения представляют собой конечный, упорядоченный по одному индексу  $n$  массив комплексных чисел  $\{c_n\}_{n=0}^{N_c}$ . Конечность массива определяется быстрой сходимостью ряда (4), более детально этот вопрос рассмотрен нами в работе [4]. Типичное число коэффициентов  $N_c$  определяется конкретной задачей распознавания и сложностью объектов и лежит в диапазоне от 3 до 500 комплексных чисел.

Процесс сравнения входного контура  $\zeta_1$  с эталоном  $\zeta_2 \in \mathbb{K}_{ДВ}$  выглядит теперь следующим образом:

1. Для входного контура  $\zeta_1$  вычисляется набор коэффициентов разложения  $\{c_n^{(1)}\}_{n=0}^{N_c}$  по формуле (14).

2. Для очередного контура-эталона из базы данных  $\mathbb{K}_{ДВ}$  делается выборка хранимых, заранее рассчитанных коэффициентов  $\{c_n^{(2)}\}_{n=0}^{N_c}$ .

3. Вычисляется значение метрики схожести  $\mu_S$  по формулам (12) и (15).

4. Принимается решение о распознавании, если полученное расстояние не превышает некоторого порогового значения  $\epsilon$ .

Обратим внимание на то, что в предложенном алгоритме отсутствуют двумерные интегралы и геометрические размеры изображения, все определяется только кривыми  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . При этом сложность расчета растет линейно с ростом объема базы данных контуров-эталонов  $\mathbb{K}_{ДВ}$ , его  $p$ -кратное увеличение приводит к увеличению числа сравнений в  $p$  раз. Объем памяти, затрачиваемый на хранение массива коэффициентов  $\{c_n^{(1)}\}_{n=0}^{N_c}$  постоянен и одинаков для любых контуров. Единственный (и, по всей видимости, непреодолимый) недостаток заключается в том, что для вычисления коэффициентов разложения используются экспоненциальные функции, которые требуют больших ресурсов, сложность их вычисления значительно превышает таковую для операции умножения.

### 7. Результаты численного моделирования

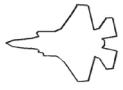
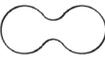
Приведем небольшую выборку результатов численного моделирования в виде табл.1. В первой строке этой таблицы представлены объекты-эталоны, а в первом столбце – распознаваемые изображения (везде размер изображений составляет  $800 \times 800$  пикселей). Ячейки содержат значения некоторой метрики  $\mu_S$  для двух наборов комплексных коэффициентов разложения спиральных пучков, отвечающих двум контурам. Если величина метрики не превышает установленный порог в 0.1, то полагается, что контуры соответствуют друг другу, и ячейки дополнительно содержат масштабный множитель и угол взаимного поворота.

Время для расчета данных табл.1 на персональной ЭВМ с процессором Intel Core i7-7700 в однопоточном режиме без использования процедур распараллеливания вычислений составляет доли секунд. Все найденные углы поворота и масштабные множители в точности совпали с истинными.

### 8. Преимущества и недостатки способа распознавания контуров с помощью спиральных пучков света

Предложенный в настоящей работе способ относится к контурному анализу – составной части машинного зрения, изучению которого посвящена отечественная монография [10]. В ней пошагово описываются все этапы обработки графики – от выполнения элементарных алгебраических операций над изображениями до морфологического анализа. Отдельно авторы рассматривают ряд задач, имеющих чисто прикладное значение, – от оптического распознавания символов в типографическом производстве до создания систем высокоточного наведения в гражданской авиации. При этом делается важное замечание: в настоящее время не существует универсального

Табл.1. Результаты численного моделирования.

Изображение	Объект-эталон							
								
	0.491	<b>0.021</b> 0.75 -143	0.753	0.126	0.609	0.759	0.669	0.639
	0.817	0.689	0.725	0.692	0.674	0.626	0.630	0.753
	0.761	0.777	0.672	0.756	0.686	<b>0.029</b> 0.75 -122	0.579	0.626
	0.761	0.728	0.718	0.727	0.712	<b>0</b> 1.00 0	0.602	0.594
	0.532	0.560	0.602	0.579	0.517	0.602	0.712	<b>0.038</b> 1.00 -150
	0.738	0.656	0.528	0.632	0.687	0.620	0.645	0.607

подхода к распознаванию изображений, который может успешно применяться для различных прикладных задач. Более того, даже в рамках одной задачи, например при распознавании контуров самолетов, эффективность различных подходов может варьироваться для разных баз контуров-эталонов.

Тем не менее мы предпримем попытку сравнения предложенного подхода с главным его конкурентом в рамках контурного анализа – способом распознавания с помощью корреляционных функций. Теоретическое описание этого способа дано в работах [2, 10], а его реализация на языке программирования C# с заимствованием открытой библиотеки компьютерного зрения OpenCV [11] описана в [12]. Самым достоверным способом сравнения двух подходов является использование процедур распознавания для фиксированного множества входных (распознаваемых) объектов при единой базе контуров-эталонов с измерением времени выполнения процедуры. Однако из-за того, что разработанное нами программное обеспечение написано на другом языке программирования (C++) и не использует наработки библиотеки OpenCV, а обрабаты-

вает изображения самостоятельно (включая поиск и выделение контуров), провести такое сравнение не представляется возможным.

В связи со сказанным выше ограничимся качественным сравнением двух способов распознавания. Для распознавания с использованием корреляционных функций контур можно представить в следующем виде (рис.7):

$$\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}\}, \tag{16}$$

где  $\gamma_0$  – начальная точка на контуре, а  $\gamma_i$  – элементарные векторы смещений.

Функция корреляции двух контуров,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , согласно работам [10–12] есть нормированное скалярное произведение комплекснозначных векторов:

$$\tau(\Gamma_1, \Gamma_2) = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{1i} \gamma_{2i}}{\left(\sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{1i}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{2i}^2\right)^{1/2}}. \tag{17}$$

Эта функция существенно зависит от выбора начальных точек на контурах, поэтому для распознавания контура необходимо найти максимум функции корреляции для всех возможных положений начальной точки на распознаваемом контуре. Это достаточно ресурсоемкая операция в том случае, если контур состоит из нескольких сотен, а то и тысяч точек. В то же время в предложенном способе распознавания с использованием спиральных пучков света этот недостаток отсутствует, зависимость от выбора начальной точки легко формализуется (см. выражение (5)).

Анализ функции корреляции (17) показывает, что для сравнения двух контуров необходимо, чтобы они состояли из одинакового числа точек, что выполняется, вообще

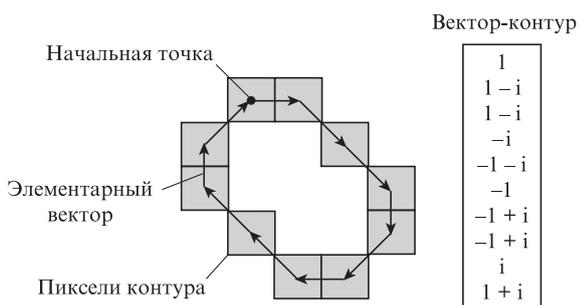


Рис.7. Представление контура цепным кодом.

говоря, не всегда. Для устранения этого недостатка прибегают к процедуре «эквализации» контуров: к выбрасыванию «лишних» и добавлению «гипотетических» точек. При этом ухудшается точность вычисления корреляционной функции, поскольку информационно-значимые части контура могут быть отброшены в ходе данной процедуры. Математический аппарат спиральных пучков свободен от указанного недостатка, поскольку число точек контура определяет лишь число слагаемых при вычислении интегралов (3) и (14), а не результирующий признак объекта – вектор комплексных коэффициентов разложения спирального пучка, поэтому выбрасывать из распознаваемого контура или добавлять в него участки не требуется.

Тем не менее математический аппарат спиральных пучков имеет существенный недостаток, который отсутствует у аппарата корреляционных функций: для расчета многих величин используется операция вычисления экспоненты, которая является более ресурсоемкой с точки зрения обработки изображений на СВТ, нежели операция умножения комплексных чисел при вычислении функции корреляции.

## 9. Выводы, постановка новых задач

Нами был подведен итог теоретической части исследования, посвященного изучению возможностей использования оптики спиральных пучков в задаче распознавания образов. Показано, что спиральные пучки могут применяться в задаче классификации и распознавания контуров на графических изображениях. Приведены результаты, позволяющие утверждать, что математический аппарат оптики спиральных пучков дает возможность успешно преодолевать классические сложности контурного анализа. Представлены результаты численного моделирования, свидетельствующие о том, что разработанный подход к распознаванию объектов применим для решения модельных задач. Проведено сравнение предла-

гаемого способа со способом распознавания контуров с использованием корреляционных функций.

В будущем авторы предполагают сосредоточить свои усилия на прикладной составляющей исследования. Во-первых, разработать специализированное программное обеспечение для обработки не десятков, а сотен–тысяч контуров одновременно с использованием процедур распараллеливания вычислений. Это позволит проводить более масштабное численное моделирование, способное прояснить, насколько производителен разработанный подход к распознаванию контуров. Во-вторых, перейти от модельных задач к реальному применению описанного в настоящей статье подхода для прикладных задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-42-630934).

1. Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений* (М.: Техносфера, 2006).
2. Фурман Я.А. *Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов* (М.: Физматлит, 2003).
3. Haykin S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation* (New Jersey: Pearson Education, 2009).
4. Волостников В.Г., Кишкин С.А., Котова С.П. *Квантовая электроника*, **43**, 646 (2013) [*Quantum Electron.*, **43**, 646 (2013)].
5. Волостников В.Г., Кишкин С.А., Котова С.П. *Компьютерная оптика*, **38**, 476 (2014).
6. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. *УФН*, **174**, 1273 (2004) [*Phys. Usp.*, **47**, 1177 (2004)].
7. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. *Современная оптика гауссовых пучков* (М.: Физматлит, 2010).
8. Berry M.V., Nye J.F. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **336**, 165 (1974).
9. Баранова Н.Б., Зельдович Б.Я. *ЖЭТФ*, **80**, 1789 (1981) [*JETP*, **53**, 925 (1981)].
10. Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Ососков М.В., Моржин А.В. *Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения* (М.: Физматкнига, 2010).
11. *OpenCV: Open Source Computer Vision Library*; <http://opencv.org>.
12. Torgashev P. *Contour Analysis for Image Recognition in C#* (2014); <https://www.codeproject.com/Articles/196168/Contour-Analysis-for-Image-Recognition-in-C>.