

Влияние синхротронного излучения на динамику прецессии спина электрона в процессе лазерно-плазменного ускорения

Д.В.Пугачёва, Н.Е.Андреев

Разработана и протестирована модель для изучения динамики прецессии спина и траекторий заряженных частиц в кильватерных полях, генерируемых в лазерно-плазменном ускорителе с учётом силы радиационного трения в форме Ландау–Лифшица. Исследовано влияние синхротронного излучения на динамику набора энергии и прецессии спина электрона, ускоряющегося в модельных постоянных полях, и на поляризацию пучка частиц при ускорении на отдельной ускорительной стадии в случае самосогласованного описания нелинейной динамики лазерного импульса и генерируемых им ускоряющих и фокусирующих кильватерных плазменных полей. Показано, что синхротронное излучение практически не влияет на поляризацию и темп набора энергии электронами, которые ускоряются в полях, характерных для умеренно нелинейного режима лазерно-плазменного ускорения вплоть до энергий 3.8 ТэВ.

Ключевые слова: лазерно-плазменное ускорение, поляризация электронов, бетатронные колебания, синхротронное излучение.

1. Введение

Использование многостадийных лазерно-плазменных ускорителей заряженных частиц может стать альтернативой традиционным методам ускорения в экспериментах по физике высоких энергий (ФВЭ) [1]. Одной из предложенных схем получения пучков частиц с энергией ~ 1 ТэВ является многостадийный электрон-позитронный коллайдер, состоящий из ста ускорительных секций [1,2]. Существуют несколько методов ускорения, которые могут быть реализованы в отдельной ускорительной стадии такого коллайдера. Наиболее перспективным из них является умеренно нелинейный режим ускорения, в основе которого лежит высокий темп набора энергии частицами в слабонелинейных кильватерных полях, генерируемых интенсивным коротким лазерным импульсом в плазме (Laser Wakefield Acceleration, LWFA). Такой режим обеспечивает эффективное ускорение как электронов, так и позитронов, а также позволяет достичь необходимой синхронизации ускорительных стадий [2]. Несмотря на технические трудности, касающиеся, в частности, способа транспортировки частиц между секциями с сохранением качества сгустка и несимметричности ввода лазерного импульса в направляющую структуру [3], в последнее время была продемонстрирована возможность двухстадийного лазерно-плазменного ускорения электронов с использованием активной плазменной линзы для транспортировки сфокусированного электронного пучка, ускоренного в первой секции, во вторую ускорительную секцию [4].

Д.В.Пугачёва, Н.Е.Андреев. Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 125412 Москва, ул. Ижорская, 13; Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, Московская обл., 141701 Долгопрудный, Институтский пер., 9; e-mail: sedyakina.d@gmail.com, andreev@ras.ru

Поступила в редакцию 7 марта 2018 г.

В современных экспериментах по ФВЭ одной из важных характеристик ускоренного электронного сгустка является его поляризация, поскольку ориентация спина влияет на сечение взаимодействия частиц [5,6]. Использование поляризованных пучков позволяет выполнять прецизионные тесты стандартной модели или непосредственно исследовать слабое взаимодействие [7]. Целью настоящей работы является исследование ускорения спин-поляризованных электронов в умеренно нелинейном режиме LWFA. Движение частиц рассматривается в полях, генерируемых коротким высокоинтенсивным лазерным импульсом в предварительно сформированном плазменном канале. Радиальный профиль концентрации электронов в канале является параболическим:

$$n_0 = N_0 \left(1 + \frac{r^2}{R_{ch}^2} \right). \quad (1)$$

Здесь N_0 – невозмущенная концентрация свободных электронов плазмы на оси канала; R_{ch} – характерный радиус канала; r – расстояние от оси канала. Использование такого канала, при условии согласования радиусов канала и фокального пятна лазерного импульса, позволяет лазерному излучению распространяться на расстояние, равное многим длинам Рэлея, без дифракционного расплывания [8].

Во время ускорения релятивистские частицы совершают бетатронные колебания и испускают синхротронное излучение, которое может влиять на характеристики электронного пучка [9–11]. В разд.2 предложена модель для расчета динамики прецессии спина электрона при ускорении в кильватерных полях, которые генерируются лазерным импульсом в отдельной ускорительной секции коллайдера. Эта модель учитывает синхротронное излучение путем добавления силы торможения в форме Ландау–Лифшица в уравнения движения электронов. В разд.3 для оценки влияния синхротронного излучения на темп набора энергии и на прецессию спина электронов,

ускоряемых в многосекционном коллайдере, сначала изучается ускорение под действием заданных постоянных сил, величины которых соответствуют средним значениям сил, полученным из результатов самосогласованного моделирования умеренно нелинейного режима LWFA [12]. Для сравнения также приведена эволюция характеристик излучающих электронов, движущихся под действием характерных для bubble-режима ускорения постоянных сил [12, 13]. Далее исследовано влияние синхротронного излучения на динамику поляризации электронного пучка на одном этапе LWFA при самосогласованном учете нелинейной динамики распространения лазерного импульса и генерации им кильватерных плазменных полей. В разд.4 подытожены основные результаты работы.

2. Основные уравнения

Распространение лазерного излучения с учетом цилиндрической симметрии описывалось уравнением Максвелла для огибающей лазерного импульса [14], а генерирующееся в плазме кильватерное поле, медленно меняющееся на периоде волны лазерного излучения, определялось с помощью уравнения, полученного из уравнений гидродинамики, для кильватерного потенциала $\Phi = \gamma_p - p_{ez}/(mc)$ [14, 15], где $\gamma_p = \sqrt{1 + p_e^2/(m^2 c^2) + a^2/2}$; p_e – импульс электронов плазмы:

$$\left[(\Delta_{\perp\rho} - v_0) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \ln v_0}{\partial \rho} \frac{\partial^3}{\partial \rho \partial \xi^2} + v_0 \Delta_{\perp\rho} \right] \times \Phi - \frac{v_0^2}{2} \left[1 - \frac{1 + |a|^2/2}{(1 + \Phi)^2} \right] = v_0 \Delta_{\perp\rho} \frac{|a|^2}{4}. \quad (2)$$

Здесь $v_0 = n_0/N_0$; $\Delta_{\perp\rho}$ – поперечная часть оператора Лапласа; $a = a(\xi, \rho, \zeta)$ – медленно меняющаяся (на периоде и длине волны лазерного излучения) нормированная на $m_e c \omega_0/e$ комплексная амплитуда лазерного импульса; e и m_e – заряд и масса электрона; c – скорость света; ω_0 – частота лазерного излучения;

$$\xi = k_{p0}(z - ct), \quad \zeta = k_{p0}z, \quad \rho = k_{p0}r_{\perp}, \quad k_{p0} = \omega_{p0}/c \quad (3)$$

– безразмерные переменные; $\omega_{p0} = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m_e}$ – плазменная частота.

Ускоряющая (F_z) и фокусирующая (F_{\perp}) силы, нормированные на $m_e c \omega_{p0}$, действующие на ускоряющиеся заряженные частицы и связанные с кильватерным полем в плазме, могут быть выражены через кильватерный потенциал [8, 14, 15]:

$$F_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad F_{\perp} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}.$$

Прецессия спина электрона описывалась уравнением Томаса – Бергмана – Мишеля – Телегди (Thomas – Bargman – Michel – Telegdi, T – BMT) [16]. Для описания влияния синхротронного излучения на процесс кильватерного ускорения n -го электрона в пучке использовалась сила торможения в форме Ландау – Лифшица [11, 17]:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = -\frac{2r_e}{3c} \frac{\tilde{F}_{\perp}^2}{m_e^2 c^2} \gamma^{(n)} \mathbf{p}^{(n)}, \quad (4)$$

где $\mathbf{p}^{(n)} = \{p_{\perp}^{(n)}, p_z^{(n)}\}$ – импульс n -го электрона; $\gamma^{(n)}$ – гамма-фактор n -го электрона; $\tilde{r}_e \approx 3 \times 10^{-13}$ см – классический ра-

диус электрона; \tilde{F}_{\perp} – размерная фокусирующая сила, действующая на электроны при ускорении.

Поскольку в случае LWFA сила Лоренца много больше сил Штерна – Герлаха [18], влиянием динамики спина на движение электронов можно пренебречь. В этом случае система уравнений в безразмерных переменных (ξ, ζ, ρ) для эволюции траектории, импульса и прецессии спина излучающего n -го электрона пучка, полученная путем объединения уравнения T – BMT, записанного в безразмерных координатах [15], релятивистского уравнения Лоренца и силы (4), имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{q}_{\perp}^{(n)}}{d\zeta} = \frac{1}{\beta_z^{(n)}} \left(\mathbf{F}_{\perp} - \frac{2}{3} r_e \gamma^{(n)} \mathbf{F}_{\perp}^2 \mathbf{q}_{\perp}^{(n)} \right), \quad (5)$$

$$\frac{dq_z^{(n)}}{d\zeta} = \frac{1}{\beta_z^{(n)}} \left(F_z - \frac{2}{3} r_e \gamma^{(n)} F_z^2 q_z^{(n)} \right), \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{\perp}^{(n)}}{d\zeta} = \frac{\mathbf{q}_{\perp}^{(n)}}{q_z^{(n)}}, \quad (7)$$

$$\frac{d\xi^{(n)}}{d\zeta} = 1 - \frac{1}{\beta_z^{(n)}}, \quad (8)$$

$$\frac{ds_{\perp}^{(n)}}{d\zeta} = \frac{s_z^{(n)}}{\beta_z^{(n)}} \left(a_m + \frac{1}{\gamma^{(n)}} \right) \mathbf{F}_{\perp}, \quad (9)$$

$$\frac{ds_z^{(n)}}{d\zeta} = -\frac{1}{\beta_z^{(n)}} \left(a_m + \frac{1}{\gamma^{(n)}} \right) (\mathbf{F}_{\perp} s_{\perp}^{(n)}), \quad (10)$$

где $s^{(n)} = \{s_{\perp}^{(n)}, s_z^{(n)}\}$ – спин n -го электрона, нормированный на абсолютную величину спина электрона; $a_m = 0.0011$ – аномальный магнитный момент электрона; $\mathbf{q}^{(n)} = \{\mathbf{q}_{\perp}^{(n)}, q_z^{(n)}\} = \mathbf{p}^{(n)}/(m_e c)$ – безразмерный импульс n -го электрона; $\beta^{(n)} = v^{(n)}/c$ – безразмерная скорость n -го электрона; $\mathbf{x}_{\perp}^{(n)} = \{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ – безразмерные поперечные координаты n -го электрона; $\mathbf{F}_{\perp} = \{F_{\perp} \cos \phi^{(n)}, F_{\perp} \sin \phi^{(n)}\}$; $\phi^{(n)} = \arctan(y^{(n)}/x^{(n)})$; $r_e = \tilde{r}_e k_{p0}$.

В предположении постоянной фокусирующей силы $F_{\perp} = -\alpha\rho$, постоянной ускоряющей силы $F_z = F_{ac}$ и $\mathbf{F}_{\text{rad}} = 0$ аналитическое выражение для компоненты спина n -го электрона $s_z^{(n)}$ может быть получено из уравнения T – BMT в цилиндрических координатах (с вектором спина $\mathbf{s}^{(n)} = \{s_r^{(n)}, s_{\phi}^{(n)}, s_z^{(n)}\}$) в случае $F_{ac}/\sqrt{\alpha\gamma^{(n)}} \ll 1$, $|q_{\perp 0}^{(n)}| \ll \sqrt{\alpha\gamma^{(n)}} |x_{\perp 0}^{(n)}|$ и $\gamma^{(n)} \gg 1$ [18]:

$$s_z^{(n)}[\gamma^{(n)}] = \sqrt{1 - s_{\phi 0}^{(n)2}} \sin \left[-r_0^{(n)} \Phi + \arctan \left(\frac{s_{z 0}^{(n)}}{s_{r 0}^{(n)}} \right) \right], \quad (11)$$

где

$$\Phi[\gamma^{(n)}] = (1 + a_m \gamma^{(n)}) \left(\frac{\alpha^2 \gamma_0^{(n)}}{\gamma^{(n)3}} \right)^{1/4} \sin \left[\frac{2\sqrt{\alpha}}{F_{ac}} (\sqrt{\gamma^{(n)}} - \sqrt{\gamma_0^{(n)}}) \right]; \quad (12)$$

$s_0^{(n)}$, $\mathbf{x}_{\perp 0}^{(n)}$, $\mathbf{q}_{\perp 0}^{(n)}$ и $\gamma_0^{(n)}$ – начальные параметры n -го электрона; $r_0^{(n)} = (x_0^{(n)} | x_0^{(n)} + y_0^{(n)} | y_0^{(n)}) / \sqrt{x_0^{(n)2} + y_0^{(n)2}}$.

При определении поляризации пучка как усредненно-го вектора спинов электронов пучка [6],

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^{N_b} \mathbf{s}^{(n)} / N_b, \quad (13)$$

где N_b – общее число электронов в пучке, огибающая колебаний деполяризации $|\Delta \mathbf{P}|_{\text{env}} = |\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|_{\text{env}}$ для пучков с нулевым эмиттансом может быть оценена с использованием формулы (11) (при $\Phi \ll 1$) [18]:

$$\frac{|\Delta P|_{\text{env}}}{|P_0|} = \frac{(1 + P_{z0}^2)\sigma_r^2(\alpha\gamma_0\gamma)^{1/2}a_m^2}{8} \quad (14)$$

$$\left| \frac{F_{\text{rad}z}}{F_z} \right| \approx \frac{2r_e}{3F_z}\alpha^2\rho^2\gamma^2 \leq \frac{2r_e}{3F_z}\alpha^2x_{10}^2\sqrt{\gamma_0}\gamma^{3/2} \approx 0.23 \quad (16)$$

Здесь P_0 – начальная поляризация пучка; γ_0 – средний начальный гамма-фактор электронов пучка; σ_r – начальная поперечная ширина электронного пучка с гауссовым распределением плотности.

3. Результаты моделирования

Для оценки влияния радиационного трения на поляризацию и лазерно-плазменное ускорение пучка электронов сначала рассматривалась динамика характеристик одного электрона, движение которого происходило в заданных постоянных полях и описывалось уравнениями (5)–(10). На рис.1 изображен процесс набора энергии излучающим и неизлучающим электроном, который движется под действием безразмерной ускоряющей силы $F_z = 0.47$ и различных фокусирующих сил, $F_{\perp} = -\alpha\rho = -0.75\rho$ или $F_{\perp} = -0.5\rho$, нормированных на $m_e\omega_{p0}$ при $\omega_{p0} \approx 17.84$ ТГц, что соответствует фоновой концентрации электронов плазмы $N_0 = 10^{17}$ см⁻³. Значение $\alpha = 0.5$ соответствует большой фокусирующей силе при ускорении электронов в bubble-режиме [9, 12], а $\alpha = 0.075$ – средней фокусирующей силе, определенной ниже, в умеренно нелинейном режиме ускорения в кильватерной волне. Начальный спин электрона $s_0 = \{0.279, -0.334, 0.9\}$ в декартовых координатах, начальное поперечное положение электрона $x_{\perp 0} = \{0, 0.5\}$, $q_{\perp 0} = 0$ и $\gamma_0 = 1000$ [18]. Из рис.1 видно, что излучающий электрон, движущийся под действием большой фокусирующей силы с $\alpha = 0.5$, ускоряется до меньшей энергии, чем неизлучающий, а потери энергии при ускорении до ~ 300 ГэВ составляют 5%. Для того чтобы оценить отношение силы радиационного трения $F_{\text{rad}z} = -(2r_e/3)\alpha^2\rho^2\gamma\rho_z$ к ускоряющей силе $F_z = 0.47$ (эти силы действуют на ускоренный до 300 ГэВ электрон), воспользуемся приближенной формулой для описания траектории неизлучающего электрона с $q_{\perp 0} = 0$ в постоянных полях [10, 18]:

$$x_{\perp} = x_{\perp 0} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{1/4} \cos \left[\frac{2\sqrt{|\alpha|}}{F_z} (\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma_0}) \right]; \quad (15)$$

тогда $\rho \leq |x_{\perp 0}| (\gamma_0/\gamma)^{1/4}$, и

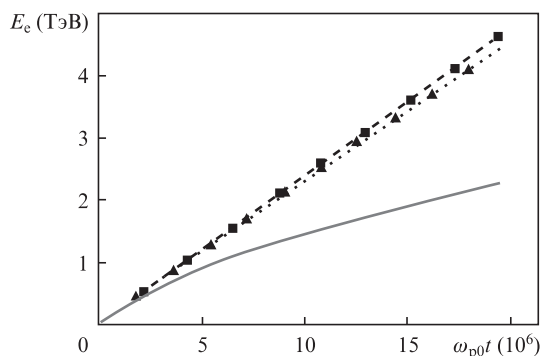


Рис.1. Динамика ускорения электрона под действием постоянных сил – ускоряющей, $F_z = 0.47$, и фокусирующей, $F_{\perp 0} = -\alpha\rho$: зависимости от времени ускорения энергии электрона без учета синхротронного излучения электрона (штриховая линия и квадраты) и с его учетом при $\alpha = 0.075$ (пунктир и треугольники) и $\alpha = 0.5$ (сплошная кривая).

при $\gamma \sim p_z$ и $\alpha = 0.5$. Зависимость деполяризации излучающего и неизлучающего электронов от времени ускорения $\omega_{p0}t$ при $\alpha = 0.5$ показана на рис.2,а. Видно, что деполяризация слабее для излучающего электрона, набирающего меньшую энергию, при этом аналитическая кривая деполяризации, полученная с помощью формулы (11) для неизлучающего электрона, хорошо описывает поведение деполяризации излучающей частицы с энергией до 300 ГэВ. Из формулы (14) следует функциональная зависимость деполяризации от радиуса осциллирующей частицы и ее энергии. В соответствии с этой зависимостью излучающий электрон деполяризуется меньше, чем неизлучающий, поскольку набирает меньшую энергию и осциллирует с меньшей амплитудой. При $\alpha = 0.075$ энергии, набираемые излучающим и неизлучающим электронами, практически одинаковы вплоть до ~ 3.8 ТэВ (см. рис.1), что соответствует оценке $|F_{\text{rad}z}/F_z| \approx 0.23$. Как следует из рис.2,б, влияние синхротронного излучения на деполяризацию частиц в случае относительно малых фокусирующих сил также проявляется начиная с энергий около 3.8 ТэВ, а в случае сил, характерных для bubble-режима, оно становится существенным для частиц с энергией ~ 300 ГэВ.

Исследование ускорения пучка поляризованных электронов при самосогласованном описании нелинейной динамики лазерного импульса и генерируемых им ускоряющих и фокусирующих кильватерных плазменных полей проводилось с помощью кода LAPLAC [19] при следующих параметрах лазерного импульса: радиус фокаль-

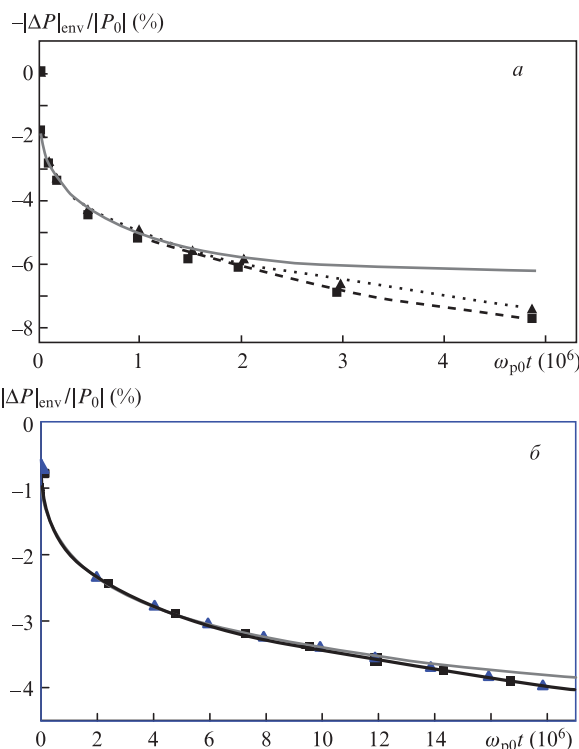


Рис.2. Эволюция деполяризации электрона, движущегося под действием постоянных сил – ускоряющей, $F_z = 0.47$, и фокусирующей, $F_{\perp 0} = -\alpha\rho$, с учетом (сплошная кривая) и без учета (штриховая кривая, квадраты) излучения при $\alpha = 0.5$ (а) и $\alpha = 0.075$ (сплошная кривая, квадраты); огибающая аналитического значения деполяризации, полученного из (11), на рис.а показана пунктиром и треугольниками, на рис.б – серой кривой и треугольниками.

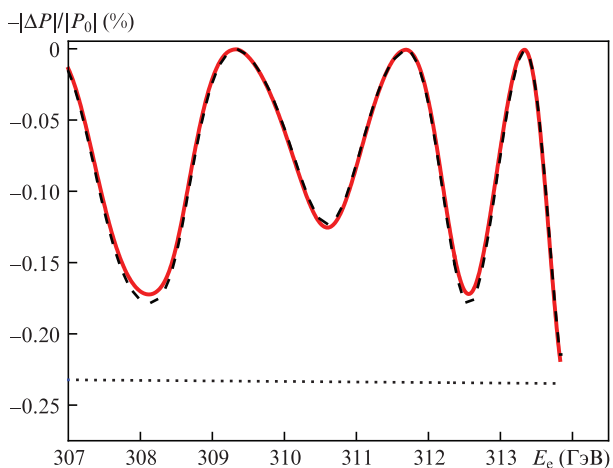


Рис.3. Динамика деполяризации электронного пучка для одной ускорительной секции LWFA при наличии (сплошная кривая) и в отсутствие (штриховая кривая) излучающих электронов; пунктир – теоретическое предсказание деполяризации (14) для $\bar{F}_z = 0.47$ и $\bar{\alpha} = 0.075$.

ного пятна гауссового импульса, сфокусированного на вход плазменного канала, $r_{\text{las}} = 89.13$ мкм, длительность $\tau_{\text{las}} = 56$ фс, длина волны $\lambda_{\text{las}} = 0.8$ мкм, интенсивность $I_{\text{las}} = 4.28 \times 10^{18}$ Вт/см² (безразмерная амплитуда $a_0 = 1.414$) и мощность $P_{\text{las}} = 534$ ТВт. Концентрация плазмы на оси предварительно сформированного канала (1) $N_0 = 10^{17}$ см⁻³, его радиус $R_{\text{ch}} = 305.1$ мкм, $k_{p0} = 0.0595$ мкм⁻¹ [2, 20]. Инжектированный извне пучок электронов [21] имел цилиндрически-симметричное гауссово распределение в поперечном направлении и нулевой разброс в продольном направлении. Ускоряющая сила, используемая для аналитической оценки деполяризации, была равна среднему значению силы, действующей на электроны пучка в процессе кильватерного ускорения:

$$\bar{F}_z = \frac{1}{N_b} \sum_{n=1}^{N_b} \frac{1}{L_{\text{ac}}^{(n)}} \int_0^{L_{\text{ac}}^{(n)}} F_z(\mathbf{x}_{\perp}^{(n)}, \zeta) d\zeta, \quad (17)$$

где $L_{\text{ac}}^{(n)}$ – нормированная на k_{p0}^{-1} длина ускорения n -го электрона. Аналогичный подход используется для вычисления среднего коэффициента $\bar{\alpha}$ для фокусирующей силы.

Моделирование кильватерного ускорения выполнено для поляризованного электронного пучка с начальной характерной поперечной шириной $\sigma_r/k_{p0} = 4.2$ мкм, поляризацией $\mathbf{P}_0 = \{0.279, -0.334, 0.9\}$, нормализованным эмиттансом $\varepsilon = 2.5$ мм·мрад и числом электронов в пучке $N_b = 10^5$ с помощью интегрирования системы уравнений (2)–(10). Сгусток электронов был инжектирован с энергией $E_{\text{inj}} = 306.6$ ГэВ в окрестность максимума ускоряющей силы ($\xi_{\text{max}} = 3.0$, $\xi_{\text{inj}} = 3.2$) [15]. Средние на длине ускорения $L_{\text{ac}}^{(n)} \approx 0.5$ м силы, действующие на пучок электронов, в этом случае таковы: $\bar{F}_z = 0.47$, $\bar{F}_r = -0.075\rho$. Полученная в результате самосогласованных расчетов динамика деполяризации в соответствии с проведенным выше анализом практически одинакова для излучающих и неизлучающих электронов пучка, а верхняя граница деполяризации может быть предсказана с помощью формулы (14) (рис.3).

4. Заключение

Исследовано влияние синхротронного излучения на деполяризацию электронов при ускорении в кильватерных плазменных полях, генерируемых коротким высокоинтенсивным лазерным импульсом. Динамика характеристик электронов описывалась с помощью численного решения уравнений модели (5)–(10). Показано, что радиационное трение, уменьшающее значения поперечного и продольного импульсов электрона, приводит к заметному уменьшению деполяризации при движении электрона с энергией более 300 ГэВ в сильных фокусирующих полях, характерных для bubble-режима ускорения, и значительно снижает при этом темп набора энергии. Аналитическая оценка деполяризации пучка (14), не учитывающая потери на излучение, находится в хорошем согласии с численными расчетами для частиц, движущихся в относительно слабых фокусирующих полях, и для ускоряемых частиц, движущихся под действием сильных фокусирующих полей, если их конечная энергия не превышает 300 ГэВ. Показано, что синхротронное излучение практически не влияет на поляризацию и темп набора энергии при ускорении электронов вплоть до 3.8 ТэВ в полях, характерных для умеренно нелинейного режима лазерно-плазменного ускорения.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Экстремальные световые поля и их взаимодействие с веществом».

1. Leemans W.P., Esarey E. *Phys. Today*, **62** (3), 44 (2009).
2. Schroeder C. B. et al. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, **13**, 101301 (2010).
3. Veysman M.E., Andreev N.E. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **774**, 012109 (2016).
4. Steinke S. et al. *Nature*, **530**, 190 (2016).
5. Moortgat-Pick G. et al. *Phys. Rep.*, **460**, 131 (2008).
6. Kessler J. *Polarized Electrons* (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1976).
7. Swartz M.L. SLAC-PUB-4656, June (1988).
8. Andreev N.E., Gorbunov L.M., Kirsanov V.I., Nakajima K., Ogata A. *Phys. Plasmas*, **4** (4), 1145 (1997).
9. Esarey E., Shadwick B.A., Catravas P., Leemans W.P. *Phys. Rev. E*, **65**, 056505 (2002).
10. Glinec Y., Faure J., Lifschitz A., Vieira J.M., Fonseca R.A., Silva L.O., Malka V. *EPL*, **81** (6), 64001 (2008).
11. Kostyukov I.Yu., Nerush E.N., Litvak A.G. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, **15**, 111001 (2012).
12. Esarey E., Schroeder C.B., Leemans W.P. *Rev. Modern Phys.*, **81** (3), 1229 (2009).
13. Pukhov A., Gordienko S., Kiselev S., Kostyukov I. *Plasma Phys. Control. Fusion*, **46**, B179 (2004).
14. Andreev N.E., Nishida Y., Yugami N. *Phys. Rev. E*, **65**, 056407 (2002).
15. Пугачева Д.В., Андреев Н.Е. *Квантовая электроника*, **46** (1), 88 (2016) [*Quantum Electron.*, **46** (1), 88 (2016)].
16. Mane S.R., Shatunov Yu.M., Yokoya K. *Rep. Prog. Phys.*, **68**, 1997 (2005).
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М.: Наука, 1988).
18. Vieira J., Huang C.K., Mori W.B., Silva L.O. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, **14**, 071303 (2011).
19. Andreev N.E., Kuznetsov S.V. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **36** (4), 1765 (2008).
20. Walker P.A. et al. *J. Phys.: Conf. Series*, **874** (1), 012029 (2017).
21. Кузнецов С.В. *Квантовая электроника*, **47** (2), 87 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (2), 87 (2017)].