

# Обобщённые квантованные спиральные пучки

В.Г.Волостников

*Найдено обобщение известных ранее квантованных спиральных пучков в виде замкнутых плоских кривых без самопересечений. Получено аналитическое выражение для распределений комплексных амплитуд полей этих пучков. Показано, что интенсивность таких световых полей может достигать нуля на порождающей кривой и обобщение позволяет управлять числом нулей внутри замкнутых кривых, что важно для прикладных задач. Исследован вопрос об экстремальных свойствах орбитального углового момента обобщённых квантованных спиральных пучков.*

**Ключевые слова:** когерентная оптика, спиральные пучки света, оптические вихри.

## 1. Введение

Спиральные пучки – это световые поля, сохраняющие своё распределение интенсивности с точностью до масштаба и вращения при их распространении и фокусировке. Такие световые поля являются модами специфических лазерных резонаторов с вращением поля. В [1, 2] рассмотрены спиральные пучки, распределения интенсивности которых в плоскостях, ортогональных направлению распространения, имеют вид плоских замкнутых кривых. Далее будем называть эти пучки пучками в виде замкнутых кривых. На рис.1 приведен пример исходной порождающей кривой и распределения интенсивности и фазы соответствующего пучка.

В работах [1, 2] также показано, что такие световые поля допускают существование некоторого условия квантования, связывающего площадь под кривой и гауссов параметр пучка. Квантованные пучки нашли широкое применение в различных задачах анализа и синтеза световых полей [2]. Характерными свойствами данных пучков являются, во-первых, отсутствие нулей интенсивности на порождающей кривой, а во-вторых, независимость распределения интенсивности от выбора начальной точки на этой кривой.



Рис.1. Порождающая кривая и соответствующие ей распределения интенсивности и фазы спирального пучка.

**В.Г.Волостников.** Самарский филиал Физического института им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: coherent@fian.smr.ru

Поступила в редакцию 26 октября 2017 г., после доработки – 26 марта 2018 г.

Распределение комплексной амплитуды спиральных световых полей содержит, как правило, оптические вихри, или дислокации волнового фронта [3], и они имеют ненулевой орбитальный угловой момент (ОУМ). Световые поля с ненулевым ОУМ привлекают пристальное внимание оптиков самых различных направлений. Например, в 2017 г. состоялась международная конференция, главной темой которой были такие световые поля [4]. Так, в работе [5] исследованы вопросы формирования световых полей с ненулевым ОУМ и обсуждаются различные приложения этих полей, в [6] рассмотрен вопрос о квантовой обработке информации, в [7] описано применение полей с ненулевым ОУМ для микроскопии сверхвысокого разрешения.

В работах [1, 2] приведены аналитические выражения для комплексных амплитуд полей пучков в виде замкнутых кривых и получены условия их квантования. Одним из очевидных методов экспериментальной реализации таких полей является расчёт и создание амплитудной и фазовой масок, а также освещение их «сэндвича» однородным по интенсивности пучком.

Целью настоящей работы является демонстрация того, что для замкнутых кривых можно получить некоторое обобщение спиральных световых полей. Эти обобщённые поля обладают как известными, так и отличными от обычных квантованных спиральных полей свойствами.

## 2. Квантованные спиральные пучки

Обычные квантованные пучки имеют характерное свойство, заключающееся в том, что на порождающей кривой  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$  отсутствуют нули комплексной амплитуды поля  $S(z, z^*|\zeta(t), t \in [0, T])$  (см. Приложение) [1, 2]:

$$|S(z, z^*|\zeta(t), t \in [0, T])| \neq 0, \quad z = x + iy,$$

где  $T$  – период.

Существуют различные формулировки этого утверждения. Пусть, например, для некоторой замкнутой кривой выполняются следующие условия [1]:

1) кривая начинается и заканчивается в начале координат:

$$x(0) = x(T) = 0, \quad y(0) = y(T) = 0;$$

2) функция  $\dot{\sigma}(t)$  – знакопостоянная (что эквивалентно условию отсутствия самопересечений кривой), где  $\sigma$  – площадь, ограниченная контуром  $\zeta(t)$ ;

3) площадь области, ограниченной кривой, удовлетворяет условию квантования

$$2 \int_0^T [x(\tau)\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)y(\tau)]d\tau = 4\sigma = 2\pi n,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  равно также и числу нулей внутри кривой  $\zeta(t)$ .

Тогда справедливо неравенство

$$I = \int_0^T \exp[-x^2(t) - y^2(t)] \cos \left\{ 2 \int_0^t [x(\tau)\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)y(\tau)]d\tau \right\} \times \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \neq 0.$$

Покажем это. Проинтегрировав данное выражение, получим

$$I = L + \int_0^T \exp[-x^2(t) - y^2(t)] \times \cos \left\{ 2 \int_0^t [x(\tau)\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)y(\tau)]d\tau \right\} \times l(t)[2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t)]dt + \int_0^T \exp[-x^2(t) - y^2(t)] \sin \left\{ 2 \int_0^t [x(\tau)\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)y(\tau)]d\tau \right\} \times l(t)[2x(t)\dot{y}(t) - 2\dot{x}(t)y(t)]dt, \quad (1)$$

где  $L$  – полная длина кривой, а  $l(t)$  – её текущая длина. Преобразуя (1) стандартным способом, получаем выражение

$$I = L + \int_0^T \exp[-x^2(t) - y^2(t)] \times R(t) \cos \left\{ 2 \int_0^t [x(\tau)\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)y(\tau)]d\tau \right\} - \arccos \left[ \frac{\dot{R}(t)}{\dot{l}(t)} \right] \times 2\dot{l}(t) dt. \quad (2)$$

Здесь  $\dot{R}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$ .

Функция  $2\dot{l}(t)$  – знакопостоянная, поэтому, согласно интегральной теореме о среднем, выражение (2) примет следующий вид:

$$I = L + R(t_1) \exp[-x^2(t_1) - y^2(t_1)] \times \cos \left\{ 2 \int_0^{t_1} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]dt \right\} - \arccos \left[ \frac{\dot{R}(t_1)}{\dot{l}(t_1)} \right] L^2, \quad (3)$$

где  $t_1 \in [0, T]$ . Вынося  $L$  за скобки, получаем соотношение

$$I = L \left( 1 + R(t_1) L \exp[-x^2(t_1) - y^2(t_1)] \times \cos \left\{ 2 \int_0^{t_1} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]dt \right\} - \arccos \left[ \frac{\dot{R}(t_1)}{\dot{l}(t_1)} \right] \right). \quad (4)$$

Пусть теперь  $\zeta_1(t)$  – квантованная кривая при  $n = 1$ , тогда  $\sqrt{n}\zeta_1(t)$  – соответственно  $n$ -квантованная кривая, и выражение (4) примет вид

$$I = L \left( 1 + R(t_1) Ln \exp[-nx^2(t_1) - ny^2(t_1)] \times \cos \left\{ 2 \int_0^{t_1} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]dt \right\} - \arccos \left[ \frac{\dot{R}(t_1)}{\dot{l}(t_1)} \right] \right).$$

Исследуем выражение  $R(t) Ln \exp[-nx^2(t_1) - ny^2(t_1)]$ . Видно, что, начиная с некоторого  $n$ , оно становится меньше единицы, значит соотношение (4) не может быть равным нулю. Большое количество численных экспериментов показало, что этим свойством обладают квантованные пучки с любым значением параметра квантования  $n$ . К сожалению, строгого доказательства данного факта к настоящему времени не получено.

Пусть теперь кривая имеет самопересечение. Не нарушая общности, выберем положение кривой и её параметризацию так, чтобы начало кривой совпадало с началом координат и точкой самопересечения (рис.2). Из [1] следует, что другие случаи можно свести к вышеупомянутому. Таким образом,  $\zeta(0) = \zeta(t_0) = \zeta(T) = 0$ , где  $t_0$  – координата точки самопересечения.

В этом случае, поскольку  $\dot{\sigma}(t)$  является знакопеременной функцией (меняется направление обхода), выражение (2) будет представлять собой сумму двух интегралов:

$$I = L + \int_0^{t_0} \exp[-x^2(t) - y^2(t)] \times R(t) \cos \left\{ 2 \int_0^t [x(\tau)\dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau)y(\tau)]d\tau \right\} - \arccos \left[ \frac{\dot{R}(t)}{\dot{l}(t)} \right] \times 2\dot{l}(t) dt + \int_{t_0}^T \exp[-x^2(t) - y^2(t)] \times$$

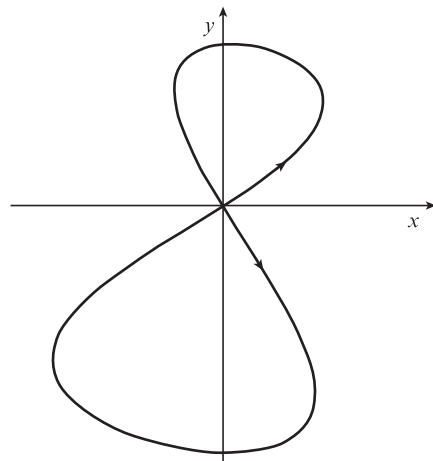


Рис.2. Вид кривой с самопересечением.

$$\begin{aligned} &\times R(t) \cos \left\{ 2 \int_0^t [x(\tau) \dot{y}(\tau) - \dot{x}(\tau) y(\tau)] d\tau \right\} \\ &+ \arccos \left[ \frac{\dot{R}(t)}{\dot{l}(t)} \right] \left\{ 2 \dot{l}(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Каждый интеграл, подобно случаю, описываемому выражением (3), при некотором  $n$  становится по модулю меньше единицы, чего уже нельзя сказать о сумме. Это является причиной отсутствия знакопостоянства функции  $\dot{\sigma}(t)$ . Следовательно, судить об отсутствии или о наличии нулей на порождающей кривой нельзя.

### 3. Обобщённые квантованные спиральные пучки

Пусть

$$S(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T]) = \exp \left( -\frac{zz^*}{\rho^2} \right) f \left( \frac{z}{\rho} \right) \quad (5)$$

– квантованный спиральный пучок в виде кривой  $\zeta(t)$ . Введем параметр  $A$ , тогда

$$S^{(A)}(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T]) = \exp \left( -\frac{zz^*}{\rho^2} \right) f \left( \frac{Az}{2\rho} \right) \quad (6)$$

– обобщённый квантованный пучок, и нули его поля будут находиться в точках

$$\{z_j^{(A)}\} = z_j(2/A), \quad (7)$$

где  $z_j$  – нули функции  $f(z/\rho)$ .

Не нарушая общности, будем считать, что  $A$  положительно и вещественно. Из (6) и (7) видно, что для замкнутой кривой всегда найдётся (если  $z_j \neq 0$ ) такое  $A$ , что  $z_j(2/A) = \zeta(t_j)$ . Это произойдёт (рис.3) при выполнении следующих двух условий:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi t_j}{T} &= \arg z_j = \arg z_j^{(A)}, \\ |z_j^{(A)}| &= |\zeta(t_j)|. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что при уменьшении параметра  $A$  нуль уйдёт из области замкнутой кривой. На рис.4 показаны результаты численного моделирования распределений интенсивностей и фаз спиральных пучков для различных значений

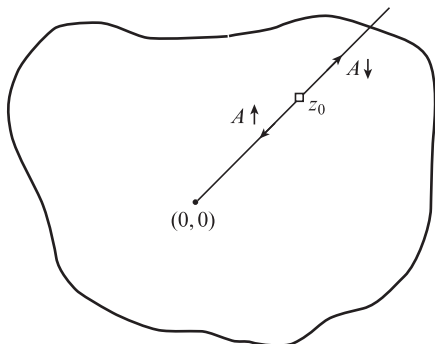


Рис.3. Схема движения нулей при изменении параметра  $A$ .

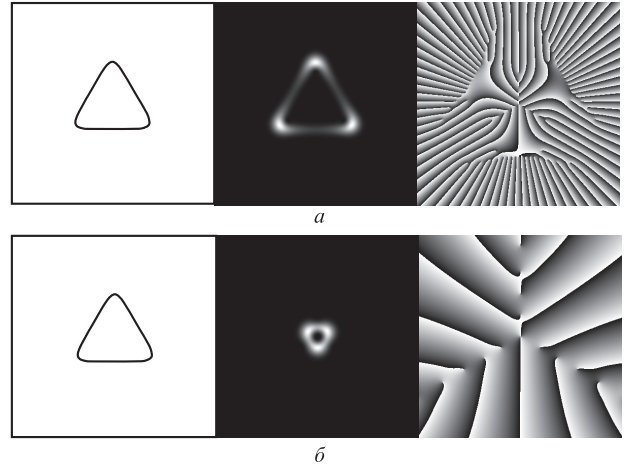


Рис.4. Порождающая кривая и соответствующие ей распределения интенсивностей и фаз спиральных пучков при  $A = 2.2$  (а) и 1 (б).

ний  $A$ . Из сравнения рис.1 и 4 видно, что число нулей внутри кривой действительно различно при разных значениях параметра  $A$ . Это означает, что исчезает жёсткая связь между числом нулей внутри порождающей кривой и параметром квантования.

Число нулей внутри кривой – важная характеристика для прикладных задач. Оно задаёт величину ОУМ при оптической манипуляции микроскопическими объектами. При обработке контурных изображений [8] существенным является определение угла поворота распознаваемого контура относительно контуров из базы данных. Для этого в случае обычных квантованных пучков берутся кривые с малым значением параметра квантования, когда число нулей внутри соответствующей кривой невелико: по теореме Виета при этом коэффициенты разложения целой функции  $f(z)$  находятся более точно, следовательно, более точно находится и угол поворота. Таким образом, изменение параметра  $A$  является альтернативным способом изменения числа нулей внутри кривой.

Обобщением формулы (П1) из Приложения будет формула

$$\begin{aligned} S^{(A)}(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T]) &= \exp \left( -\frac{zz^*}{\rho^2} \right) \\ &\times \int_0^T \exp \left\{ -\frac{\zeta(t)\zeta^*(t)}{\rho^2} + \frac{2z(A/2)\zeta^*(t)}{\rho^2} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t [\zeta^*(\tau)\dot{\zeta}(\tau) - \zeta(\tau)\dot{\zeta}^*(\tau)] d\tau \right\} |\dot{\zeta}(t)| dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Характерно, что условие квантования для (9) будет тем же, что и для (П1). Действительно, записав условия (П2), (П3) и (П4) для (9), получим равенство, эквивалентное (П7) с заменами  $z \rightarrow z(A/2)$ ,  $\Phi(a) \rightarrow \Phi(a, A)$  и  $F_1(a), F_2(a) \rightarrow F_1(a, A), F_2(a, A)$ . Отсюда находим условие квантования, эквивалентное (П7).

### 4. ОУМ обобщённых квантованных спиральных пучков

Обобщённые квантованные спиральные пучки зависят от параметра  $A$ , поэтому имеет смысл исследовать условия на экстремум для их удельного ОУМ.

Известно [1, 2], что для обычных спиральных пучков величина удельного ОУМ определяется выражением ( $\rho = 1, n = 0$ )

$$L_1 = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{m!}{2^m} |c_m^1|^2}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{2^m} |c_m^1|^2}, \tag{10}$$

где  $c_m^1$  – коэффициенты разложения спирального пучка по модам Лагерра–Гаусса  $LG_{0m}$ .

Для обобщённых спиральных пучков величина удельного ОУМ

$$L_A^{(1)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{m!}{2^m} \frac{A^{2m}}{2^{2m}} |c_m^1|^2}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{2^m} \frac{A^{2m}}{2^{2m}} |c_m^1|^2}. \tag{11}$$

Для простоты выкладок сделаем замену

$$\frac{m!}{2^{3m}} |c_m^1|^2 = |c_m|^2, \quad L_A = \sum_{m=0}^{\infty} mA^{2m} |c_m|^2, \quad E_A = \sum_{m=0}^{\infty} A^{2m} |c_m|^2. \tag{12}$$

Теперь условие на экстремум для удельного ОУМ будет иметь вид

$$\frac{d}{dA} \left( \frac{L_A}{E_A} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dL_A}{dA} E_A - \frac{dE_A}{dA} L_A = 0. \tag{13}$$

Из (13) видно, что

$$\frac{dE_A}{dA} = \sum_{m=0}^{\infty} 2mA^{2m-1} |c_m|^2 = \frac{2L_A}{A}. \tag{14}$$

Тогда из (7) и (8) получим следующие соотношения:

$$E_A = \frac{L_A dE_A/dA}{dL_A/dA} = \frac{2L_A^2}{A dL_A/dA},$$

$$\frac{A}{2} \frac{E_A}{dA} = \sum_{m=0}^{\infty} mA^{2m} |c_m|^2 = L_A. \tag{15}$$

Из (15) после простых преобразований находим условие на экстремум в терминах  $E_A$  или  $L_A$ :

$$\frac{d^2 E_A}{dA^2} A E_A + \frac{dE_A}{dA} E_A - A \left( \frac{dE_A}{dA} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 L_A}{dA^2} A L_A + \frac{dL_A}{dA} L_A - A \left( \frac{dL_A}{dA} \right)^2 = 0. \tag{16}$$

Данные обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка легко сводятся к уравнениям первого порядка подстановками

$$u = \frac{dE_A}{dA} / E_A, \quad v = \frac{dL_A}{dA} / L_A. \tag{17}$$

При этом получим соотношения

$$\frac{d}{dA} \left( A \frac{dE_A}{dA} / E_A \right) = 0, \quad \frac{d}{dA} \left( A \frac{dL_A}{dA} / L_A \right) = 0. \tag{18}$$

Вернувшись теперь к формулам (8) и (9), найдём выражения

$$\frac{A}{2} \frac{dE_A}{dA} = \sum_{m=0}^{\infty} mA^{2m} |c_m|^2, \quad \frac{A}{2} \frac{dL_A}{dA} = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 A^{2m} |c_m|^2. \tag{19}$$

Тогда условие (9) примет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 A^{2m} |c_m|^2 \sum_{m=0}^{\infty} A^{2m} |c_m|^2 - \left( \sum_{m=0}^{\infty} mA^{2m} |c_m|^2 \right)^2 = 0. \tag{20}$$

Таким образом, формула (20) – это разность произведений рядов.

Воспользуемся очевидным тождеством:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k. \tag{21}$$

Согласно [9] члены последней суммы в (21) можно представить в виде

$$d_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^k b_l a_{k-l}. \tag{22}$$

Тогда, используя формулы (18) и (19) для членов в левой части (21), получаем соотношение

$$d_m = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m A^{2m} |c_{m-k}|^2 |c_k|^2$$

$$\times [(m-k)^2 + k^2 - 2(m-k)k] > 0. \tag{23}$$

Строгое неравенство обусловлено тем, что в квадратных скобках – удвоенная разность среднего арифметического и среднего геометрического двух целых чисел.

Равенство (20) будет справедливо только тогда, когда в суммах присутствует по одному слагаемому ( $m = m_0$ ). В этом случае из (16) и (22) находим выражения

$$\frac{A}{2} \frac{dE_A}{dA} / E_A = \frac{A}{2} \frac{dL_A}{dA} / L_A = m_0, \quad L_A / E_A = m_0. \tag{24}$$

В остальных случаях отношение  $L_A/E_A$  монотонно возрастает с ростом  $A$ , и условия (16), (24) выполняются лишь для спиральных пучков, построенных для окружностей с центром в начале координат. Конечно, это находится в полном согласии с (7) при  $z_j = 0$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ).

### 5. Заключение

Таким образом, найден новый способ построения квантованных спиральных пучков с различным числом нулей внутри порождающей кривой и различной величиной ОУМ. Исследованы также экстремальные свойства удельного ОУМ световых полей таких пучков. Изменение параметра  $A$  является альтернативным способом изменения числа нулей внутри замкнутой кривой, что важно при решении задачи распознавания контурных изображений с применением спиральных пучков [8]. С точки зрения быстрого действия изменение параметра квантования  $n$  и введение параметра  $A$  являются эквивалентными подходами. Сравнительный анализ обоих подходов требует дополнительного исследования.

### Приложение

Согласно [1, 2] комплексную амплитуду поля спирального пучка в виде плоской (порождающей) кривой  $\zeta(t) = \zeta(t) + i\eta(t)$  в перетяжке можно представить в виде

$$S(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T]) = \exp\left(-\frac{zz^*}{\rho^2}\right) \times \int_0^T \exp\left\{-\frac{\zeta(t)\zeta^*(t)}{\rho^2} + \frac{2z\zeta^*(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t [\zeta^*(\tau)\dot{\zeta}(\tau) - \zeta(\tau)\dot{\zeta}^*(\tau)] d\tau\right\} |\dot{\zeta}(t)| dt, \quad (\text{П1})$$

$$z = x + iy.$$

Найдем условие, при котором распределения интенсивностей спиральных пучков, построенных для замкнутых кривых  $\zeta(t)$  и  $\zeta(t + a)$ , совпадают:

$$|S(z, z^* | \zeta(t), t \in [a, a + T])| \equiv |S(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T])|. \quad (\text{П2})$$

Данное тождество можно записать в виде

$$\exp[i\Phi(a)] S(z, z^* | \zeta(t), t \in [a, a + T]) \equiv S(z, z^* | \zeta(t), t \in [0, T]), \quad (\text{П3})$$

где  $\Phi(a)$  – некоторая вещественная функция, не зависящая от  $z$  (иначе, разделив обе части (П3) на гауссову функцию, получим, что  $\Phi$  есть аналитическая функция от  $z$  и, следовательно, не может быть вещественной функцией при всех  $z$ ). Дифференцируя (П3) по  $a$  и используя периодичность  $\zeta(t)$ , находим выражение

$$\exp[-i\Phi(a)] S(z, z^* | \zeta(t), t \in [a, a + T]) \times \left[ i\dot{\Phi}(a) - \frac{\zeta^*(a)\dot{\zeta}(a) - \zeta(a)\dot{\zeta}^*(a)}{\rho^2} \right] + \exp\left[ i\Phi(a) - \frac{zz^* - 2z\zeta^*(a) + \zeta(a)\zeta^*(a)}{\rho^2} \right] \times \left\{ \exp\left[ \frac{1}{\rho^2} \int_0^T [\zeta^*(\tau)\dot{\zeta}(\tau) - \zeta(\tau)\dot{\zeta}^*(\tau)] d\tau \right] - 1 \right\} |\dot{\zeta}(a)| = 0. \quad (\text{П4})$$

Заменяв спиральный пучок в первом слагаемом в (П4) в соответствии с (П3) и разделив результат на гауссову функцию, перепишем уравнение (П4) в символическом виде:

$$f(z)F_1(a) + \exp\left[\frac{2z\zeta^*(a)}{\rho^2}\right]F_2(a) = 0, \quad (\text{П5})$$

где  $f(z)$  – целая аналитическая функция;  $F_1(a), F_2(a)$  – некоторые функции от  $a$ . Это равенство имеет место для всех  $z$  и  $a$  только при  $F_1(a) = F_2(a) \equiv 0$  (если  $f(z)$  имеет нуль, это очевидно; случай, когда  $f(z)$  не имеет нулей, также прост). Поэтому

$$\Phi(a) = \frac{1}{i\rho^2} \int_0^a [\zeta^*(\tau)\dot{\zeta}(\tau) - \zeta(\tau)\dot{\zeta}^*(\tau)] d\tau, \quad (\text{П6})$$

$$\exp\left\{ \frac{1}{\rho^2} \int_0^T [\zeta^*(\tau)\dot{\zeta}(\tau) - \zeta(\tau)\dot{\zeta}^*(\tau)] d\tau \right\} = 1.$$

Отсюда условие квантования имеет вид

$$\frac{1}{i\rho^2} \int_0^T [\zeta^*(\tau)\dot{\zeta}(\tau) - \zeta(\tau)\dot{\zeta}^*(\tau)] d\tau = \frac{4\sigma}{\rho^2} = 2\pi n. \quad (\text{П7})$$

Автор выражает благодарность В.Н.Цветову за ценные обсуждения, А.М.Майоровой и Е.А.Соколовой за помощь в оформлении статьи.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-02-01055а и 16-29-11809 офи\_м) и Министерства образования и науки РФ.

1. Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. *Современная оптика гауссовых пучков* (М.: Физматлит, 2010).
2. Волостников В.Г. *Методы анализа и синтеза когерентных световых полей* (М.: Физматлит, 2014).
3. Bazhenov V.Yu., Soskin M.S., Vasetsov M.V. *J. Mod. Optics*, **39**, 985 (1992).
4. *Abs. 4th Int. Conf. on Optical Angular Momentum (ICOAM2017)* (Anacapri, Italy, 2017).
5. Vallone G. *Abs. 4th Int. Conf. on Optical Angular Momentum (ICOAM2017)* (Anacapri, Italy, 2017).
6. Wang X.-L. *Abs. 4th Int. Conf. on Optical Angular Momentum (ICOAM2017)* (Anacapri, Italy, 2017).
7. Banzer P. *Abs. 4th Int. Conf. on Optical Angular Momentum (ICOAM2017)* (Anacapri, Italy, 2017).
8. Волостников В.Г., Кишкин С.А., Котова С.П. *Квантовая электроника*, **43**, 646 (2013) [*Quantum Electron.*, **43**, 646 (2013)].
9. Рудин У. *Основы математического анализа* (М.: Мир, 1976).