

ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИЕ ИМПУЛЬСЫ

Распространение импульса света с длительностью менее одного периода в усиливающей резонансной среде

Р.М.Архипов, М.В.Архипов, И.Бабушкин, А.В.Пахомов, Н.Н.Розанов

Теоретически изучено распространение униполярного импульса света с длительностью менее одного периода в двухуровневой резонансно-усиливающей среде. В процессе усиления униполярный импульс становится биполярным. Продемонстрировано влияние времен релаксации на форму и длительность усиливаемого импульса. Установлено, что электрическая площадь импульса (интеграл от величины напряженности по времени) сохраняется, в отличие от площади под огибающей длинного импульса (интеграл от медленно меняющейся амплитуды поля по времени), которая для длинных импульсов удовлетворяет теореме площадей Мак-Колла и Хана.

Ключевые слова: импульсы с длительностью менее одного периода, аттосекундные импульсы, когерентные эффекты, усиление униполярных импульсов, электрическая площадь импульса.

1. Введение

В настоящее время удалось получить предельно короткие импульсы (ПКИ) с длительностью порядка и даже менее периода колебаний световой волны [1–5]. Генерация таких импульсов привела к активному изучению их взаимодействия с веществом [6–11]. Малая длительность импульсов с длительностью менее одного периода (субциклового импульсов) позволила использовать их для управления динамикой волновых пакетов в веществе и способствовала рождению аттосекундной науки (attosecond science) [12–14]. Параллельно с этим в последнее время (см. обзоры [15, 16], а также работы [17–21] и цитируемую в них литературу) обсуждается вопрос о получении импульсов с высокой степенью униполярности ζ :

$$\zeta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} E dt \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} |E| dt} \approx 1. \quad (1)$$

Строго униполярные импульсы (УИ) содержат один всплеск поля одной полярности (полуволну), в отличие от обычных многоциклового биполярных импульсов, у

которых степень униполярности ζ близка к нулю. Из-за наличия постоянной составляющей УИ могут быть использованы для эффективного управления динамикой волновых пакетов в веществе, оказывая однонаправленное воздействие на электрические заряды [15].

Длительность таких субциклового УИ может быть меньше не только времен релаксации поляризации T_2 и разности населенностей T_1 в резонансной среде, но и периода собственных колебаний резонансных переходов в среде. В первом случае возникает когерентное взаимодействие импульсов со средой и возможно появление самоиндуцированной прозрачности (СИП), когда 2π -импульс СИП распространяется в резонансной среде без потерь [22–24]. Когерентное распространение в резонансных средах хорошо изучено в случае длинных [22–24] и предельно коротких биполярных импульсов [25–30] с нулевой электрической площадью (интеграл от величины напряженности электрического поля). Несмотря на указанные достоинства УИ, их взаимодействие с усиливающими резонансными средами на сегодняшний день исследовано недостаточно полно. В основном изучалось распространение УИ в поглощающих средах [31–34]. В ряде работ были получены аналитические результаты, но они касаются главным образом установившихся солитонных решений [35–38]. Более того, решения были найдены с использованием различных приближений и не описывают динамику распространения УИ. Распространение видеоимпульсов в различных нелинейных поглощающих средах без учета релаксации сред и в приближении однонаправленного распространения рассмотрено в [6].

Отдельно стоит вопрос о распространении субциклового УИ в резонансно-усиливающей среде. Когерентное усиление биполярных ПКИ рассматривалось ранее [39–43]. К настоящему времени хорошо изучена динамика длинных импульсов (когда справедливы приближение медленно меняющейся амплитуды (ПММА) и приближение вращающейся волны (ПВВ)) в когерентно-усиливающей среде (см. обзоры [23, 44, 45] и цитируемую в них литературу). Характерной особенностью усиления является то, что при когерентном распространении длинного импульса в усиливающей среде, когда справедливы ПММА и ПВВ,

Р.М.Архипов. Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7–9; Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; e-mail: arhipovrostislav@gmail.com

М.В.Архипов. Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7–9; Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49

И.Бабушкин. Institute of Quantum Optics, Leibniz University Hannover, 30167, Hannover, Germany

А.В.Пахомов. Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49

Н.Н.Розанов. АО «ГОИ им. С.И.Вавилова», Россия, 199053 С.-Петербург, Кадетская л., 5, корп. 2; Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе, Россия, 194021 С.-Петербург, Политехническая ул., 26

Поступила в редакцию 31 января 2018 г., после доработки – 20 марта 2018 г.

возможно формирование π -импульса, который переводит среду в основное состояние при одновременном уменьшении длительности импульса. Однако в случае субцикловых УИ динамика усиления может быть значительно сложнее из-за малой длительности УИ и неприменимости ПММА и ПВВ. Для таких импульсов вследствие неприменимости понятия огибающей импульса утрачивается смысл теорема площадей Мак-Колла и Хана [26–30]. В данном случае, как показано в [43, 46–48], сохраняется электрическая площадь импульса (см. разд.2). Более того, полученные аналитические и численные решения уравнений Максвелла–Блоха [36–38, 45] были выведены с учетом ряда допущений и непригодны для корректного описания усиления УИ. Например, пренебрегалось релаксацией среды и быстрыми осцилляциями на оптической частоте резонансного перехода (см. разд.2).

Для получения более детальной картины распространения субциклового импульса в резонансной среде при минимальном числе упрощающих предположений необходимо проведение численных расчетов. В связи с этим в настоящей работе рассматривается динамика распространения УИ субциклового (аттосекундной) длительности в двухуровневой усиливающей резонансной среде в случае, когда длительность входного импульса τ_p меньше периода собственных колебаний резонансного перехода среды $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Расчет проводится на основе численного решения системы уравнений Максвелла–Блоха, не содержащих указанных выше приближений. Установлено, что динамика когерентного усиления субциклового импульса существенно отличается от таковой для длинных импульсов (когда справедливы ПММА и ПВВ). В частности, для усиливающей среды впервые на основе численного моделирования проиллюстрировано выведенное аналитически из уравнений Максвелла [43, 46–48] правило сохранения электрической площади импульса. Показано, что динамика усиливаемого импульса существенно зависит от времен релаксации среды, что ранее не принималось во внимание.

2. Теоретическая модель и основные понятия

Основным понятием, широко используемым при описании когерентных резонансных взаимодействий длинных импульсов (содержащих большое число периодов колебаний поля) с резонансными средами, является понятие площади под огибающей импульса (интеграл от медленно меняющейся амплитуды поля по времени) [22–24]:

$$\Theta(z) \equiv \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(z, t) dt, \quad (2)$$

где d_{12} – дипольный момент перехода; $\varepsilon(t)$ – медленная огибающая импульса. Эволюция площади импульса при когерентном распространении длинных импульсов описывается теоремой площадей Мак-Колла и Хана [22–24]. Если длительность импульса порядка периода колебаний поля и меньше, то уже неприменимы ПММА и ПВВ и, следовательно, теорема площадей. Для ПКИ говорят об электрической площади импульса, сохраняющей, в рамках одномерного рассмотрения, свою величину при любых продольных координатах [43, 46–48]:

$$S_E \equiv A \int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt. \quad (3)$$

Здесь A – некая постоянная. Далее, как и в работах [36–38], выберем $A = 2d_{12}/\hbar$. Для изучения динамики усиления субциклового импульса в резонансной усиливающей среде будем применять систему уравнений Максвелла–Блоха. Вследствие малой (субциклового) длительности падающего импульса в ней не используются ПММА и ПВВ. Данная система уравнений имеет следующий вид [17–34]:

$$\frac{\partial \rho_{12}(z, t)}{\partial t} = -\frac{\rho_{12}(z, t)}{T_2} + i\omega_0 \rho_{12}(z, t) - \frac{i}{\hbar} d_{12} E(z, t) n(z, t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial n(z, t)}{\partial t} = -\frac{n(z, t) - n_0}{T_1} + \frac{4}{\hbar} d_{12} E(z, t) \text{Im} \rho_{12}(z, t), \quad (5)$$

$$P(z, t) = 2N_0 d_{12} \text{Re} \rho_{12}(z, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где P – поляризация среды; N_0 – концентрация активных центров; E – напряженность электрического поля с фиксированной линейной поляризацией; c – скорость света в вакууме; ω_0 – частота резонансного перехода среды ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ – длина волны резонансного перехода); n_0 – разности населенностей двух рабочих уровней в отсутствие электрического поля.

Среда описывается уравнениями (4)–(7) в двухуровневом приближении с использованием формализма матрицы плотности. Уравнение (4) описывает эволюцию недиагонального элемента матрицы плотности ρ_{12} , а уравнение (5) – поведение разности населенностей $n \equiv \rho_{11} - \rho_{22}$ между основным и возбужденным состояниями двухуровневой системы. Поляризация среды P связана с недиагональным элементом матрицы плотности ρ_{12} выражением (6).

В настоящее время система уравнений Максвелла–Блоха (4)–(7) активно используется для изучения когерентного распространения ПКИ в резонансной среде [17–34]. Если длительность импульса достигает субциклового величины, возникает вопрос о применимости двухуровневого приближения для описания поведения резонансной среды. Следует отметить, что любое состояние квантовой системы можно описать на основе базиса состояний с определенной энергией, которые составляют полный набор. До порога ионизации состояния сплошного спектра исключаются из рассмотрения, так что остается только дискретный спектр. В этом случае необходимо выяснить, сколькими уровнями достаточно ограничиться для описания интересующего нас явления с некоторой заданной точностью. В работах [30, 41–43] проводились численные расчеты, на основании которых было показано, что главные особенности когерентного распространения ПКИ с одноциклового и субциклового длительностями, в частности в режиме СИП, в двухуровневых усиливающих и поглощающих средах имеют качественное сходство со случаем многоуровневых систем и при учете неоднородного уширения [49]. Более того, двухуровневая система является простейшим объектом, который используется на протяжении многих лет при изучении когерентного взаимодействия коротких импульсов с веществом [21–34]. Данная модель позволяет на элементарном уровне понять основные особенности когерентного распространения УИ в резонансной среде и может служить первым приближением более сложных моделей. Поэтому в настоящей работе для простоты и наглядности также

используется двухуровневое приближение и неоднородным уширением спектрального перехода пренебрегается. Кроме того, мы пренебрегаем дифракцией излучения, что оправданно при распространении пучков на длинах, меньших дифракционной, и решаем одномерную задачу распространения.

Как и в работах [30–34], уравнения для матрицы плотности (4), (5) решались методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Волновое уравнение (7) решалось методом конечных разностей, описанным в [50]. Пространственная область интегрирования имела длину $L = 30\lambda_0$. Резонансная среда располагалась вдоль оси z в центре области между точками с координатами $z_1 = 9\lambda_0$ и $z_2 = 23\lambda_0$.

В случае субциклового УИ авторы [6, 35–38] исследовали аналитически и численно его динамику в усиливающей и поглощающей средах с помощью уравнений (3)–(7). При этом был сделан ряд допущений: использовалось приближение однонаправленного распространения [6], пренебрегалось релаксационными членами в уравнениях (4), (5), а также быстро осциллирующим по сравнению с производной $\partial\rho_{12}(z, t)/\partial t$ членом $i\omega_0\rho_{12}(z, t)$ в уравнении (4) [35–38]. Последнее допущение оправдывалось условием малой длительности импульса: $\omega_0\tau_p \ll 1$. В результате система уравнений (3)–(7) сводилась к уравнению синус-Гордона, описывающему эволюцию электрической площади импульса в пространстве и во времени. Полная площадь такого сложного волнового пакета становится равной π , и он забирает всю энергию, запасенную в среде. Более того, несущая частота импульса возрастает и сдвигается в голубую область по мере его распространения. Ясно, что в указанных приближениях электрическая площадь импульса (3) будет также меняющейся величиной. Однако более общее рассмотрение [43, 46–48], свободное от данных приближений, показывает, что эта площадь будет сохраняться в рамках одномерного волнового уравнения (7). Сохранение площади импульса в усиливающей среде приводит к потере униполярности при его распространении, что и подтверждается результатами численных расчетов, приведенных ниже.

3. Результаты численных расчетов

Была проведена серия численных расчетов на основе системы уравнений (3)–(7). Слева направо в среду направлялся субцикловоый УИ с огибающей в форме гиперболического секанса:

$$E(t) = E_0 \operatorname{sech}(t/\tau_p). \quad (8)$$

Электрическая площадь такого импульса определяется выражением

$$S_E = 2d_{12}E_0\tau_p\pi/\hbar. \quad (9)$$

Изучалась динамика поля, поляризации и разности населенностей в процессе распространения импульсов в усиливающей среде при вариациях площади входного импульса, времен релаксации в среде и длительности входного импульса.

3.1. Случай малых времен релаксации среды

Рассмотрим усиление импульса с большой входной площадью. Пример эволюции электрического поля импуль-

са с входной электрической площадью $S_E = 2d_{12}E_0\tau_p\pi/\hbar = 0.9\pi$ приведен на рис.1. Параметры расчета таковы: $\lambda_0 = 700$ нм, $d_{12} = 5$ Д, $T_1 = 100$ фс, $T_2 = 0.005$ пс, $N_0 = 10^{21}$ см⁻³, $E_0 = 2.4 \times 10^5$ ед. СГСЭ, $S_E = 0.9\pi$, $\tau_p = T_0/6 = 388$ ас, $n_0 = 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда времена релаксации в среде малы. Из рис.1 видно, что по мере распространения импульс становится биполярным, и это проявляется в возникновении субимпульсов в виде хвостов. Для наглядности на рис.2 приведены временные зависимости поля на входе в среду (рис.2,а), в центре среды (рис.2,б) и на выходе из нее (рис.2,в). В процессе распространения импульса в усиливающей среде происходит увеличение его амплитуды на переднем фронте и появляются длинные хвосты на заднем фронте, которые постепенно затухают. Такая динамика существенно отличается от случая когерентного усиления длинных импульсов [23, 44, 45] при справедливости ПММА и ПВВ, когда усиление сопровождается только уменьшением длительности импульса, возрастанием амплитуды и формированием π -импульса. Появление хвостов связано с тем, что короткий импульс, распространяясь в среде, вызывает осцилляции макроскопической поляризации на частоте резонансного перехода среды. Данная поляризация переизлучает поле в противофазе с полем падающего импульса – «когерентный звон среды», который создает хвосты противоположной полярности на заднем фронте [51]. Это поле переизлучения среды распространяется вслед падающему импульсом и может усиливаться, т.к. среда является усиливающей. Такой результат качественно согласуется с аналитическим результатом, полученным в [36–38]. Отличие заключается в том, что указанные хвосты затухают по мере распространения импульса вследствие релаксации среды.

Наконец, электрическая площадь импульса сохраняется, что иллюстрирует рис.2,г, где приведена ее зависимость от координаты, полученная в численных расчетах. Эта зависимость согласуется с правилом сохранения площади импульса, выведенным в [43, 46–48]. Расчеты показывают, что степень униполярности (1) поля на входе в среду $\zeta = 0.9$. Она меньше 1 в результате появления отраженного излучения противоположной полярности. На выходе из среды степень униполярности уменьшается до $\zeta = 0.26$. Таким образом, биполярная составляющая становится доминирующей после усиления в среде.

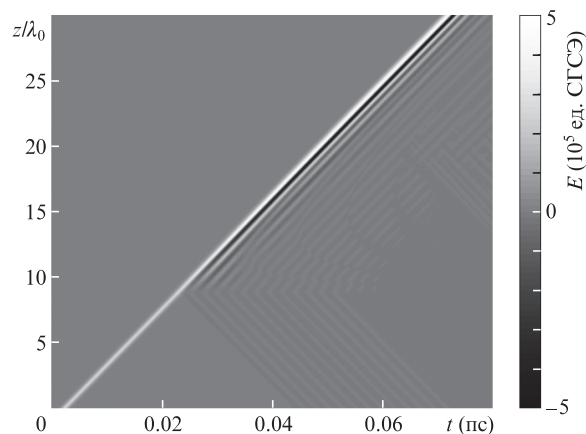


Рис.1. Эволюция импульса с начальной электрической площадью $S_E = 0.9\pi$. Параметры расчета указаны в тексте. Резонансная среда располагалась вдоль оси z между точками с координатами $z_1 = 9\lambda_0$ и $z_2 = 23\lambda_0$. Цветные варианты рис.1, 3 и 5 помещены на сайте нашего журнала <http://www.quantum-electron.ru>.

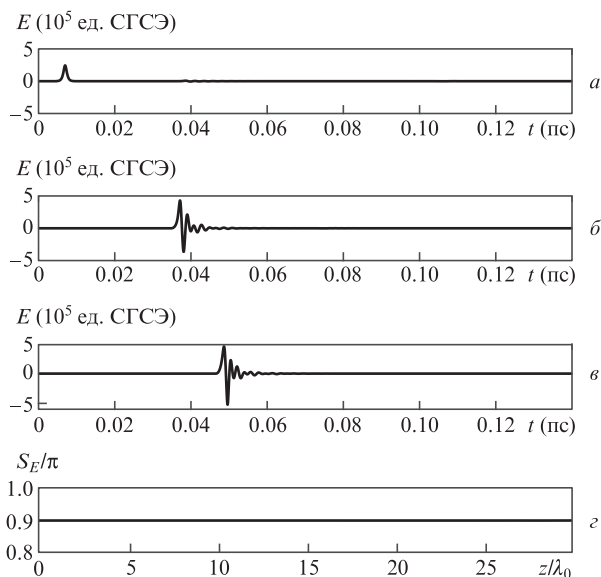


Рис.2. Временные зависимости электрического поля на входе в среду (а), в центре среды при $z = 15\lambda_0$ (б) и в конце среды при $z = 20\lambda_0$ (в), а также электрическая площадь импульса $S_E(z)$ в каждой точке внутри области интегрирования (г).

Правило сохранения электрической площади импульса оказывается существенным именно для динамики усиления субциклового импульса, тогда как при усилении длинных импульсов правомерно использование теоремы площадей Мак-Колла и Хана, согласно которой площадь под огибающей импульса (2) меняется в процессе его распространения.

3.2. Случай больших времен релаксации среды

При увеличении времен релаксации среды осциллирующая поляризация не успевает затухнуть в процессе распространения импульса и излучает поле со сдвигом фазы на π по отношению к полю падающего импульса. Это проявляется в том, что у импульса по мере его распространения появляется длинный незатухающий хвост противоположной полярности (рис.3 и 4). Наличие незатухающих знакопеременных хвостов у импульса качественно согласуется с результатами численных расчетов, проведенных в [38] в пренебрежении релаксацией среды, и с приближенными аналитическими результатами [36–38], полученными также без учета релаксации.

Динамика разности населенностей в среде в случае больших времен релаксации представлена на рис.5 и 6. На выходе из среды наблюдается длинный импульс, содержащий длинный хвост противоположной полярности (см. рис.4,в). Соответственно инверсия имеет сложную динамику (рис.6,в). Среда после окончания действия такого длинного импульса переходит практически в основное состояние с инверсией, весьма близкой к +1. В таком случае степень униполярности поля на входе в среду $\zeta = 0.27$. Она снова меньше 1 из-за появления отраженного излучения противоположной полярности. На выходе из среды степень униполярности еще меньше: $\zeta = 0.05$.

Следовательно, при больших временах релаксации в среде формируется сложный волновой пакет, который действует на нее подобно π -импульсу, снимая практически всю энергию, запасенную в активной среде. Однако электрическая площадь импульса в этом случае также сохраняется.

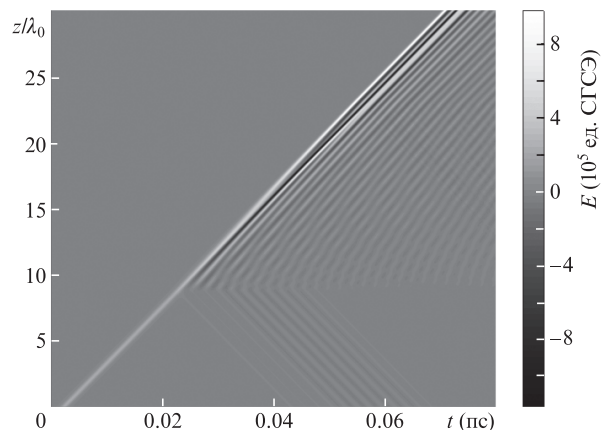


Рис.3. Эволюция импульса с начальной электрической площадью $S_E = 0.9\pi$ при больших временах релаксации: $T_1 = 1$ пс, $T_2 = 0.5$ пс. Остальные параметры расчета указаны в тексте. Резонансная среда располагалась вдоль оси z между точками $z_1 = 9\lambda_0$ и $z_2 = 23\lambda_0$.

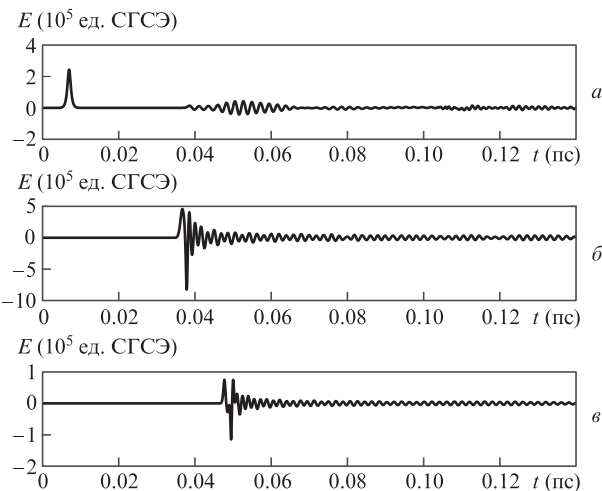


Рис.4. Временные зависимости электрического поля на входе в среду (а), в центре среды при $z = 15\lambda_0$ (б) и на выходе из среды при $z = 20\lambda_0$ (в), соответствующие рис.3.

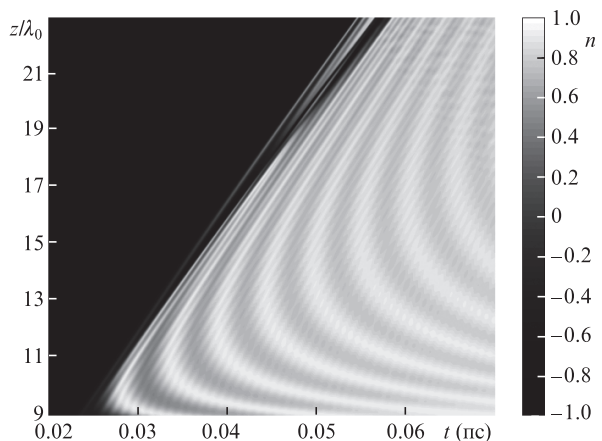


Рис.5. Пространственно-временная зависимость разности населенностей в среде, соответствующая рис.3 и 4.

4. Заключение

Таким образом, в работе на основе численного решения системы уравнений Максвелла–Блоха без использо-

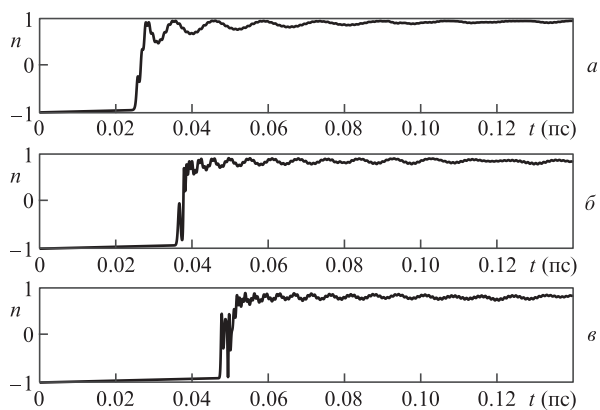


Рис.6. Временные зависимости разности населеностей для различных участков среды, соответствующие рис.5: на входе в среду (а), в центре среды при $z = 15\lambda_0$ (б) и на выходе из среды при $z = 20\lambda_0$ (в).

вания ПММА и ПВВ изучена динамика распространения субциклового УИ в когерентно-усиливающей резонансной среде. Результаты численных расчетов позволяют провести более полный анализ динамики поля вне рамок ряда приближений, принятых в предыдущих аналитических исследованиях. Показано, что по мере распространения импульса степень его униполярности снижается: он становится биполярным, и часть энергии, полученной от активной среды на переднем фронте, уходит в быстро осциллирующие хвосты.

Установлено, что динамика распространения субциклового импульса оказывается более сложной, чем в случае длинных импульсов в ПММА и ПВВ. Для длинных импульсов площадь под огибающей импульса меняется при его распространении, в общем же случае, включая ПКИ, электрическая площадь импульса сохраняется. Сохранение последней накладывает существенные ограничения на возможность усиления субциклового УИ.

Отмечены существенные различия в динамике усиления длинных импульсов и УИ. Если для длинных импульсов процесс усиления характеризуется сжатием импульса, возрастанием амплитуды и стремлением площади под огибающей к π , то в случае субциклового УИ по мере его распространения в усиливающей среде появляются составляющие противоположной полярности. Длительность и форма этих звонков зависит от времен релаксации среды. При больших временах релаксации характерно наличие длинного, медленно затухающего хвоста, состоящего из большого числа циклов колебаний.

Исследование сохранения площади субциклового импульса при его распространении поддержано грантом РФФИ № 16-02-00762. Исследование динамики усиления субциклового импульса выполнено при поддержке гранта РНФ № 17-19-01097.

1. Krausz F., Ivanov M. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 163 (2009).
2. Manzoni C., Mücke O.D., Cirmi G., Fang S., Moses J., Huang S.-W., et al. *Laser Photonics Rev.*, **9**, 129 (2015).
3. Calegari F., Sansone G., Stagira S., Vozzi C., Nisoli M. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **49**, 062001 (2016).
4. Hassan M.T. et al. *Nature*, **530** (7588), 66 (2016).
5. Babushkin I. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **105** (5), 053903 (2010).
6. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30** (4), 287 (2000) [*Quantum Electron.*, **30** (4), 287 (2000)].
7. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **40** (9), 756 (2010) [*Quantum Electron.*, **40** (9), 756 (2010)].
8. Skryabin D.V., Gorbach A.V. *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 1287 (2010).
9. Dudley J.M., Genty G., Coen S. *Rev. Mod. Phys.*, **78**, 1135 (2006).

10. Leblond H., Mihalache D. *Phys. Rep.*, **523**, 61 (2013).
11. Mihalache D.U. *Roman. Rep. Phys.*, **69**, 403 (2017).
12. Gallmann L., Cirelli C., Keller U. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, **63**, 447 (2012).
13. Ramasesha K., Leone S.R., Neumark D.M. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, **67**, 41 (2016).
14. Ciappina M.F., Pérez-Hernández J.A., Landsman A.S. *Rep. Prog. Phys.*, **80**, 054401 (2017).
15. Архипов Р.М., Пахомов А.В., Архипов М.В. и др. *Письма в ЖЭТФ*, **105** (6), 388 (2017) [*JETP Lett.*, **105** (6), 408 (2017)].
16. Arkhipov R.M., Pakhomov A.V., Arkhipov M.V., Babushkin I., et al. *Laser Phys.*, **27** (5), 053001 (2017).
17. Kalosha V.P., Herrmann J. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 544 (1999).
18. Song X., Yang W., Zeng Z., et al. *Phys. Rev. A*, **82** (5), 053821 (2010).
19. Kozlov V.V., Rosanov N.N., Angelis C.D., Wabnitz S. *Phys. Rev. A*, **84**, 023818 (2011).
20. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Belov P.A., Tolmachev Yu.A., Babushkin I. *Laser Phys. Lett.*, **13** (4), 046001 (2016).
21. Pakhomov A.V., Arkhipov R.M., Babushkin I.V., Arkhipov M.V., Tolmachev Yu.A., Rosanov N.N. *Phys. Rev. A*, **95**, 013804 (2017).
22. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969).
23. Крюков П.Г., Летохов В.С. *УФН*, **99**, 169 (1969) [*Sov. Phys. Usp.*, **12**, 641 (1970)].
24. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
25. Hughes S. *Phys. Rev. Lett.*, **81** (16), 3363 (1998).
26. Xiao J., Wang Z., Xu Z. *Phys. Rev. A*, **65**, 031402 (2002).
27. Tarasishin A.V., Magnitskii S.A., Shuvaev V.A., Zheltikov A.M. *Opt. Express*, **8**, 452 (2001).
28. Xie X.T., Macovei M.A. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 073902 (2010).
29. Novitsky D.V. *Phys. Rev. A*, **86**, 063835 (2012).
30. Arkhipov R.M., Pakhomov A.V., Arkhipov M.V., Babushkin I., Demircan A., et al. *Sci. Rep.*, **7** (1), 12467 (2017).
31. Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В., Бабушкин И., Розанов Н.Н. *Квантовая электроника*, **47** (7), 589 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (7), 589 (2017)].
32. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Pakhomov A.V., Babushkin I., Rosanov N.N. *Laser Phys. Lett.*, **14** (9), 1 (2017).
33. Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В., Бабушкин И., Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **123** (4), 600 (2017) [*Opt. Spectrosc.*, **123** (4), 610 (2017)].
34. Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В., Жигулева Д.О., Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **124** (4), 541 (2018) [*Opt. Spectrosc.*, **124** (4), 541 (2018)].
35. Bullough R.K., Ahmad F. *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 330 (1971).
36. Беленов Э.М., Крюков П.Г., Назаркин А.В., Ораевский А.Н., Усков А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **47**, 442 (1988) [*JETP Lett.*, **47**, 523 (1988)].
37. Беленов Э.М., Назаркин А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **51**, 252 (1990) [*JETP Lett.*, **51**, 288 (1990)].
38. Беленов Э.М., Назаркин А.В., Ушаповский В.А. *ЖЭТФ*, **100**, 762 (1991) [*Sov. Phys. JETP*, **73**, 422 (1991)].
39. Tarasishin A.V., Magnitskii S.A., Zheltikov A.M. *Laser Phys.*, **11**, 620 (2001).
40. Tarasishin A.V., Magnitskii S.A., Zheltikov A.M. *Opt. Commun.*, **193**, 187 (2001).
41. Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Высотина Н.В. *Квантовая электроника*, **38** (2), 137 (2008) [*Quantum Electron.*, **38** (2), 137 (2008)].
42. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Семенов В.Е. *Оптика и спектроскопия*, **106** (5), 793 (2009) [*Opt. Spectrosc.*, **106** (5), 713 (2009)].
43. Розанов Н.Н. *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-* (М.: Физматлит, 2011, гл. 17).
44. Lamb G.L. *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 99 (1971).
45. Belenov E.M., Kryukov P.G., Nazarkin A.V., Oraevsky A.N., Uskov A.V. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5** (5), 946 (1988).
46. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **107** (5), 761 (2009) [*Opt. Spectrosc.*, **107** (5), 721 (2009)].
47. Rosanov N.N., Kozlov V.V., Wabnitz S. *Phys. Rev. A*, **81**, 043815 (2010).
48. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **118** (6), 975 (2015) [*Opt. Spectrosc.*, **118** (6), 943 (2015)].
49. Kozlov V.V., Rosanov N.N. *Phys. Rev. A*, **87** (4), 043836 (2013).
50. Taflove A., Hagness S.C. *Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method* (Boston–London: Artech House, 2005).
51. Siddons P. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **47** (9), 093001 (2014).