

## НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

# Одновременное нелинейное преобразование света в РДС-кристаллах

А.В.Белинский, Р.Сингх

*Рассмотрены невырожденный параметрический процесс  $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$  и одновременная генерация суммарных частот  $\omega_1 + \omega_3 \rightarrow \omega_4$  и  $\omega_2 + \omega_3 \rightarrow \omega_5$  в кристаллах с регулярной доменной структурой и квадратичной нелинейностью. Предложен алгоритм численного описания эволюции системы при полном учете квантово-механического взаимодействия всех пяти плоских монохроматических мод и истощения накачки. Изучено поведение среднего числа фотонов взаимодействующих мод и их взаимных корреляций. Обнаружен эффект инверсии взаимной корреляции мод генерируемого излучения.*

**Ключевые слова:** РДС-кристаллы, невырожденный параметрический процесс, генерация суммарных частот.

## 1. Введение

Одно из направлений исследования РДС-кристаллов (кристаллы с регулярной доменной структурой) с квадратичной нелинейностью [1–7] связано с тем, что изучение квантовых статистических характеристик формируемого в них излучения важно не только для чисто теоретических, но и для прикладных задач квантовой информатики. Например, корреляционные характеристики генерируемых световых пучков используются для формирования квантовых изображений [4, 5]. При решении подобных задач обычно применяют приближение заданного поля (метод S) для линейризации нелинейных классических и операторных уравнений [1, 2, 4, 5, 8]. Такой метод дает возможность получить решения в аналитическом виде, что, в свою очередь, позволяет проводить анализ взаимодействующих мод в тонких РДС-кристаллах при слабом энергообмене. Однако при усилении энергообмена и заметном истощении накачки точность описания теряется. Лучшее приближение дает теория возмущений (метод P) [9, 10], но это достигается усложнением расчета за счет увеличения числа слагаемых высших порядков. Более точное квантовое решение (метод Q) можно получить путем численной диагонализации гамильтониана взаимодействия и нахождения собственных векторов и собственных значений квантовых состояний [11–13]. Следует также отметить, что существует еще один метод решения задач квантовой нелинейной оптики, который основан на полиномиальной алгебре [14].

В настоящей работе решена квантовая задача о взаимодействии всех плоских монохроматических мод с учетом истощения накачки. Результаты отличаются от результа-

тов, полученных приближенными методами вычислений в случае сильного энергообмена, когда происходит заметное истощение накачки. Показана динамика среднего числа фотонов в модах и их взаимная корреляция, что особенно важно для компьютерной обработки информации в условиях зашумления, поскольку известные корреляционные зависимости позволяют эффективно выделять полезный сигнал на фоне шума, например при работе с квантовыми фантомными изображениями [4, 5].

## 2. Процессы в РДС-кристалле

Пусть пять плоских монохроматических мод, характеризуемых операторами уничтожения фотона  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4$  и  $\hat{a}_5$  на оптических частотах  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  и  $\omega_5$ , коллинеарно распространяются внутри РДС-кристалла с квадратичной нелинейностью. Операторы удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:  $[\hat{a}_j, \hat{a}_k^+] = \delta_{jk}$ . Одновременно происходят три процесса: параметрическая генерация субгармоник и преобразование частоты вверх за счет суммирования частот субгармоник с частотой накачки:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (1a)$$

$$\delta k_3 = k_3 - k_1 - k_2 + m_3 G_3 = \Delta k_3 + m_3 G_3,$$

$$\omega_1 + \omega_3 = \omega_4, \quad (1b)$$

$$\delta k_4 = k_4 - k_1 - k_3 + m_4 G_4 = \Delta k_4 + m_4 G_4,$$

$$\omega_2 + \omega_3 = \omega_5, \quad (1в)$$

$$\delta k_5 = k_5 - k_2 - k_3 + m_5 G_5 = \Delta k_5 + m_5 G_5.$$

Здесь  $k_j$  – модули волновых векторов мод с частотами  $\omega_j$ ;  $j = 1-5$ ;  $\Delta k_q$  – волновые расстройки соответствующего процесса для однородного кристалла;  $q = 3, 4, 5$ ;  $m_q = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  – порядки квазисинхронизма;  $G_q = 2\pi/\Lambda_q$  – волновое число (модуль псевдовектора) решетки доменной структуры с периодом  $\Lambda_q$ .

А.В.Белинский, Р.Сингх. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: belinsky@inbox.ru, ranjit.singh@mail.ru

Поступила в редакцию 23 января 2018 г., после доработки – 8 мая 2018 г.

Выполнение условия квазисинхронизма для процессов (1а)–(1в) соответствует  $\delta k_q = 0$ . Одновременный квазисинхронизм в одной и той же доменной структуре с  $G = G_3 = G_4 = G_5$  можно реализовать, например, при различных порядках квазисинхронизма  $m_q$  или при разных длинах когерентности  $L_q = \pi/\Delta k_q = \Lambda_q/(2m_q)$ . Нами численно рассчитывались значения  $m_q, L_q$  для одной доменной структуры с волновым числом  $G$  при выполнении равенства  $\delta k_q = 0$  до пятого знака после запятой. Найдены значения порядков квазисинхронизма  $m_{3,4} = 1$  (для процессов (1а) и (1б)),  $m_5 = 3$  (для процесса (1в)) при длинах когерентности  $L_{3,4} \approx 128.5$  мкм,  $L_5 \approx 42.8$  мкм и длинах волн необыкновенных волн  $\lambda_1 = 4.55$  мкм,  $\lambda_2 = 4.041$  мкм,  $\lambda_3 = 2.166$  мкм,  $\lambda_4 = 1.476$  мкм,  $\lambda_5 = 1.373$  мкм в РДС-кристалле  $\text{LiNbO}_3$ .

Отметим, что для вырожденного случая выполнение условия квазисинхронизма проанализировано в работах [6, 7], где выявлены условия его реализации. Нами же рассчитан квазисинхронизм для случая невырожденной генерации.

Гамильтониан взаимодействия рассматриваемых процессов представляется в следующем виде [1, 2]:

$$\hat{H}_{\text{int}} = h(\beta \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3^+ + \gamma_1 \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_4^+ + \gamma_2 \hat{a}_2 \hat{a}_3 \hat{a}_5^+) + \text{H.c.}, \quad (2)$$

где  $h$  – постоянная Планка;  $\beta$  и  $\gamma_{1,2}$  – коэффициенты нелинейного взаимодействия; H.c. – эрмитово сопряжение. Выражение (2) является приближением плоских монохроматических мод при коллинеарном взаимодействии. Поперечная пространственная структура пучков при этом полагается однородной.

Операторные уравнения движения вдоль оси  $z$  внутри РДС-кристалла в представлении Гейзенберга описываются уравнением

$$\frac{d\hat{a}_j}{dz} = -\frac{i}{h}[\hat{a}_j, \hat{H}_{\text{int}}]. \quad (3)$$

В приближении заданного поля накачку считаем классической с постоянной амплитудой  $|B_3|$  и фазой  $\varphi_3$ :  $B_3 = |B_3| \exp(i\varphi_3)$ .

Введем приведенную длину взаимодействия  $\zeta = \beta z$  и безразмерные нелинейные коэффициенты связи  $\xi_{1,2} = \gamma_{1,2}/\beta$ . Система уравнений движения при этом становится линейной:

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^+ \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iB_3 \hat{a}_2^+ - i\xi_1 B_3^* \hat{a}_4 \\ iB_3^* \hat{a}_1 + i\xi_2 B_3 \hat{a}_5^+ \\ -i\xi_1 B_3 \hat{a}_1 \\ i\xi_2 B_3^* \hat{a}_5^+ \end{pmatrix}.$$

Ее решения можно найти с помощью преобразования Лапласа:  $\hat{a}(\zeta) = Q(\zeta) \hat{a}(0)$ , где  $\hat{a}(\zeta) = (\hat{a}_1(\zeta), \hat{a}_2^+(\zeta), \hat{a}_4(\zeta), \hat{a}_5^+(\zeta))^T$ ,  $T$  – операция транспонирования,  $\hat{a}(0)$  – вектор операторов мод на входе РДС-кристалла. Коэффициенты  $Q(\zeta)$

$$Q(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{C_2 X_2 + C_1 X_1}{2L_2} & i \exp(i\varphi_3) \frac{\sqrt{V_2} S_2 - S_1 \sqrt{V_1}}{\sqrt{2} L_2} & i \exp(-i\varphi_3) \frac{S_1 \sqrt{V_1} W_2 + S_2 \sqrt{V_2} W_1}{2\sqrt{2} \xi_1 L_2} & \exp(i2\varphi_3) \xi_2 \frac{C_1 - C_2}{L_2} \\ -i \exp(-i\varphi_3) \frac{S_2 \sqrt{V_2} - S_1 \sqrt{V_1}}{\sqrt{2} L_2} & \frac{C_1 W_1 + C_2 W_2}{2L_2} & \exp(-i2\varphi_3) \xi_1 \frac{C_1 - C_2}{L_2} & -i \exp(i\varphi_3) \frac{\sqrt{V_2} S_2 X_1 + S_1 \sqrt{V_1} X_2}{2\sqrt{2} \xi_2 L_2} \\ -i \xi_1 \exp(i\varphi_3) \frac{S_1 \sqrt{V_2} X_1 + S_2 \sqrt{V_1} X_2}{\sqrt{2} \sqrt{V_1} V_2 L_2} & \exp(i2\varphi_3) \xi_1 \frac{C_2 - C_1}{L_2} & \frac{C_2 W_1 + C_1 W_2}{2L_2} & i \sqrt{2} \xi_1 \xi_2 \exp(i\varphi_3) \frac{\sqrt{V_1} S_2 - \sqrt{V_2} S_1}{L_2 \sqrt{V_1} V_2} \\ \exp(-i2\varphi_3) \xi_2 \frac{C_2 - C_1}{L_2} & -i \exp(-i\varphi_3) \frac{\sqrt{V_2} S_2 X_1 + S_1 \sqrt{V_1} X_2}{2\sqrt{2} \xi_2 L_2} & -i \sqrt{2} \xi_1 \xi_2 \exp(-i\varphi_3) \frac{\sqrt{V_1} S_2 - \sqrt{V_2} S_1}{L_2 \sqrt{V_1} V_2} & \frac{C_2 X_1 + C_1 X_2}{2L_2} \end{pmatrix}$$

несколько отличаются от приведенных в [1, 3], поскольку нами рассмотрен более общий случай произвольных фаз и амплитуд  $B_3$ . Здесь

$$L_1 = 1 - \xi_1^2 - \xi_2^2, \quad L_2 = \sqrt{\xi_1^4 + (-1 + \xi_2^2)^2 - 2\xi_1^2(1 + \xi_2^2)},$$

$$L_{3,4} = 1 \pm (\xi_1^2 \mp \xi_2^2),$$

$$C_{1,2} = \cosh\left(\frac{|\zeta| |B_3| \sqrt{V_{1,2}}}{\sqrt{2}}\right), \quad S_{1,2} = \sinh\left(\frac{|\zeta| |B_3| \sqrt{V_{1,2}}}{\sqrt{2}}\right),$$

$$V_{1,2} = L_1 \pm L_2, \quad W_{1,2} = L_2 \pm L_3, \quad X_{1,2} = L_2 \pm L_4.$$

В более точном приближении (в приближении теории возмущений) учитывается взаимодействие всех пяти мод и нелинейные по длине взаимодействия слагаемые. Оператор эволюции в представлении Шредингера для гамильтониана (2) имеет вид

$$\hat{U}(\zeta) = \exp(-i\hat{H}_{\text{int}}\zeta/h). \quad (4)$$

Поскольку гамильтониан находится в экспоненте оператора эволюции, последний можно разложить в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \hat{U}(\zeta) &= \exp(-i\hat{H}_{\text{int}}\zeta/h) \\ &= 1 + \left(-i\frac{\hat{H}_{\text{int}}\zeta}{h}\right) + \frac{1}{2!} \left(-i\frac{\hat{H}_{\text{int}}\zeta}{h}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Он вычислялся нами до 12-го порядка по параметру взаимодействия  $\zeta$ , и были найдены операторы уничтожения фотона  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4$  и  $\hat{a}_5$  для пяти мод:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{jP}(\zeta) &= \hat{U}^+(\zeta) \hat{a}_j(0) \hat{U}(\zeta) = \hat{a}_j(0) + \left(i\frac{\zeta}{h}\right) [\hat{H}_{\text{int}}, \hat{a}_j(0)] \\ &+ \frac{1}{2!} \left(i\frac{\zeta}{h}\right)^2 [\hat{H}_{\text{int}}, [\hat{H}_{\text{int}}, \hat{a}_j(0)]] + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Более точно квантовую задачу можно решить следующим образом. Запишем матричные элементы оператора уничтожения в энергетическом представлении:

$$\hat{a}_{j'n'} = \langle n' | \hat{a}_j | n \rangle = \delta_{n'n-1} \sqrt{n}. \quad (7)$$

Аналогичным образом выражаются матричные элементы оператора рождения  $\hat{a}_j^+$ . Тогда гамильтониан взаимодействия (2) принимает следующий вид:

$$\hat{H}_{\text{int}} = h(\beta \hat{a}'_1 \hat{a}'_2 \hat{a}'_3^+ + \gamma_1 \hat{a}'_1 \hat{a}'_3 \hat{a}'_4^+ + \gamma_2 \hat{a}'_2 \hat{a}'_5 \hat{a}'_5^+) + \text{H.c.}, \quad (8)$$

где

$$\hat{a}'_1 = (\hat{a}_{1n_1 n_1}) \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5;$$

$$\hat{a}'_2 = \hat{E}_1 \otimes (\hat{a}_{2n_2 n_2}) \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5;$$

$$\hat{a}'_3 = \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes (\hat{a}_{3n_{3n_3}}) \otimes \hat{E}_4 \otimes \hat{E}_5;$$

$$\hat{a}'_4 = \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes (\hat{a}_{4n_{4n_4}}) \otimes \hat{E}_5;$$

$$\hat{a}'_5 = \hat{E}_1 \otimes \hat{E}_2 \otimes \hat{E}_3 \otimes \hat{E}_4 \otimes (\hat{a}_{5n_{5n_5}});$$

$\hat{E}_j$  – единичные матрицы соответствующих мод;  $(\hat{a}_{j n_j})$  – матрица; знак  $\otimes$  обозначает тензорное произведение.

Диагонализируем гамильтониан взаимодействия (8) и найдем его собственные векторы и собственные значения. Оператор эволюции в матричном представлении вычисляется по формуле

$$\hat{U}(\zeta) = \sum_{m=0}^M \exp(-i\lambda_m \zeta) |m\rangle \langle m|, \quad (9)$$

где  $M = (n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1)(n_4 + 1)(n_5 + 1)$ ;  $n_j$  – число фотонов в модах;  $|m\rangle$  – собственный вектор с числом фотонов  $m$  при собственном значении  $\lambda_m$  гамильтониана взаимодействия (8):  $\hat{H}_{int} |m\rangle = \lambda_m |m\rangle$ .

Матрица плотности вычисляется по формуле

$$\hat{\rho}_Q(\zeta) = \hat{U}(\zeta) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(\zeta). \quad (10)$$

Здесь  $\hat{\rho}(0) = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$  – матрица плотности начального состояния для всех пяти мод на входе РДС-кристалла. В тензорном представлении эта матрица принимает следующий вид:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_1(0) \otimes \hat{\rho}_2(0) \otimes \hat{\rho}_3(0) \otimes \hat{\rho}_4(0) \otimes \hat{\rho}_5(0). \quad (11)$$

### 3. Средние значения числа фотонов и корреляции мод

Вычислим средние значения числа фотонов и коэффициентов корреляции 2-го порядка, или фактора  $g^{(2)}$ , в модах для рассмотренных трех методов по формулам

$$N_{j(S,P,Q)}(\zeta) = \begin{cases} \langle \hat{a}_{j(S,P)}^+(\zeta) \hat{a}_{j(S,P)}(\zeta) \rangle, \\ \langle \hat{a}_{j(Q)}^+(\zeta) \hat{a}_{j(Q)}(\zeta) \rangle, \end{cases} \quad (12)$$

$$g_{jk}^{(2)(S,P,Q)}(\zeta) = \begin{cases} \frac{\langle \hat{a}_{j(S,P)}^+(\zeta) \hat{a}_{j(S,P)}(\zeta) \hat{a}_{k(S,P)}^+(\zeta) \hat{a}_{k(S,P)}(\zeta) \rangle}{N_{j(S,P)}(\zeta) N_{k(S,P)}(\zeta)}, \\ \frac{\langle \hat{a}_{j(Q)}^+(\zeta) \hat{a}_{j(Q)}(\zeta) \hat{a}_{k(Q)}^+(\zeta) \hat{a}_{k(Q)}(\zeta) \rangle}{N_{j(Q)}(\zeta) N_{k(Q)}(\zeta)}. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь нижние индексы при  $g^{(2)}$  обозначают номера мод, для которых рассчитывается коэффициент корреляции, и метод вычисления (S, P, Q).

Расчеты выполнялись для  $\xi_1 = 0.6$  и  $\xi_2 = 0.4$ , когда моды находились в состоянии  $|\psi_0\rangle = |n_{10}\rangle |n_{20}\rangle |\alpha_{30}\rangle |n_{40}\rangle |n_{50}\rangle$  на входе ( $\zeta = 0$ ) РДС-кристалла, причем полагалось, что моды 1, 2, 4, 5 находились в вакуумном состоянии  $|0\rangle$ , а накачка была в когерентном состоянии со средним числом фотонов  $|\alpha_{30}|^2 = 3$  и фазой  $\varphi_{30} = \pi/3$ . Постоянная начальная фаза накачки влияет на результаты расчета, потому что она определяет условия входа излучения в нелинейный кристалл.

Для сравнения мы также провели расчет для всех мод, кроме накачки, находящихся в однофотонных состояниях. При этом общие тенденции, описанные нами ниже, сохранились.

Правильность вычислений проверялась контролем коммутационных соотношений

$$[\hat{a}_j(\zeta), \hat{a}_j^+(\zeta)] = 1 \text{ и } [\hat{a}'_j(\zeta), \hat{a}'_j^+(\zeta)] = 1.$$

### 4. Результаты и выводы

На рис.1 и 2 представлена динамика среднего числа фотонов и коэффициентов корреляции, или, другими словами, фактора  $g^{(2)}$ , внутри РДС-кристалла для разных методов расчета. Видно, что метод S, как и метод P, заметно теряет точность при истощении накачки по сравнению с более точным квантовым методом расчета Q.

На рис.1,б кривые демонстрируют почти периодические осцилляции среднего числа фотонов, в отличие от кривых, полученных приближенными методами S и P. На начальном этапе взаимодействия идут невырожденный параметрический процесс  $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$  распада фотона моды 3 на два фотона мод 1 и 2, а затем процессы генерации суммарной частоты  $\omega_1 + \omega_3 \rightarrow \omega_4$  и  $\omega_2 + \omega_3 \rightarrow \omega_5$ . В дальнейшем идут обратные процессы, причем они конкурируют между собой, что хорошо видно из осциллирующего характера кривых для  $N_{1Q}$ ,  $N_{2Q}$ ,  $N_{3Q}$ ,  $N_{4Q}$ ,  $N_{5Q}$  при сильном энергообмене, т. е. с ростом  $\zeta$ .

Для сравнения мы также рассчитали среднюю интенсивность мод при классическом описании с учетом исто-

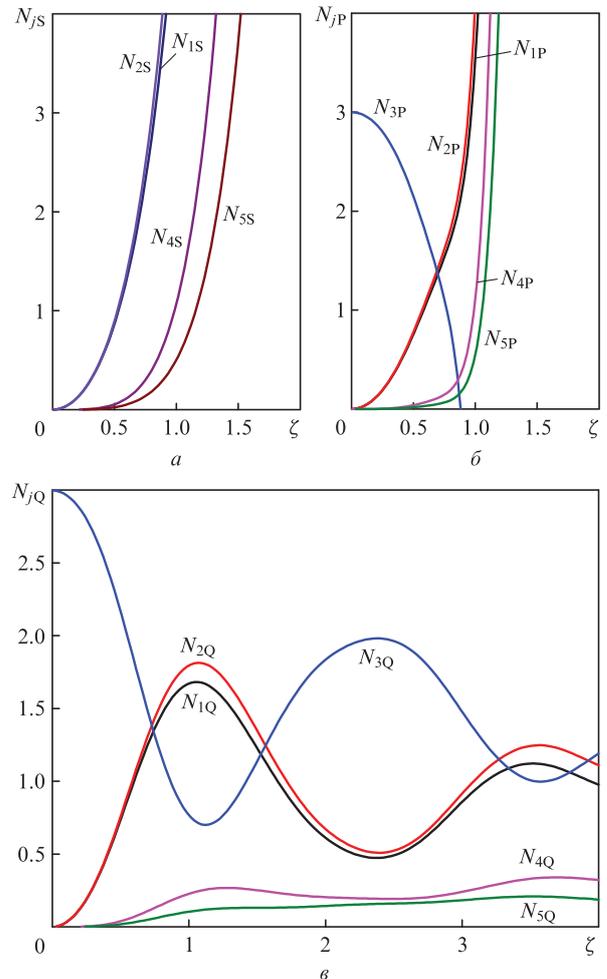


Рис.1. Динамика среднего числа фотонов в модах, рассчитанная методами S (а), P (б) и Q (в).

щения накачки и тоже получили заметные расхождения с представленным здесь квантовым расчетом.

На рис.2 приведены значения коэффициентов корреляции, или корреляционных факторов 2-го порядка. Видно, что методы S и P теряют точность даже при сравнительно небольшом истощении накачки. Рассчитанные более точным методом Q кривые ведут себя почти как периодические функции. При  $g^{(2)} > 1$  преобладают парные коррелированные в двух модах фотоны, а при  $g^{(2)} < 1$  – одиночные некоррелированные, аналогично тому, как для одиночной моды  $g^{(2)} > 1$  соответствует группировке и суперпуассоновской статистике фотонов, а  $g^{(2)} < 1$  – антигруппировке и субпуассоновской статистике [15, 16].

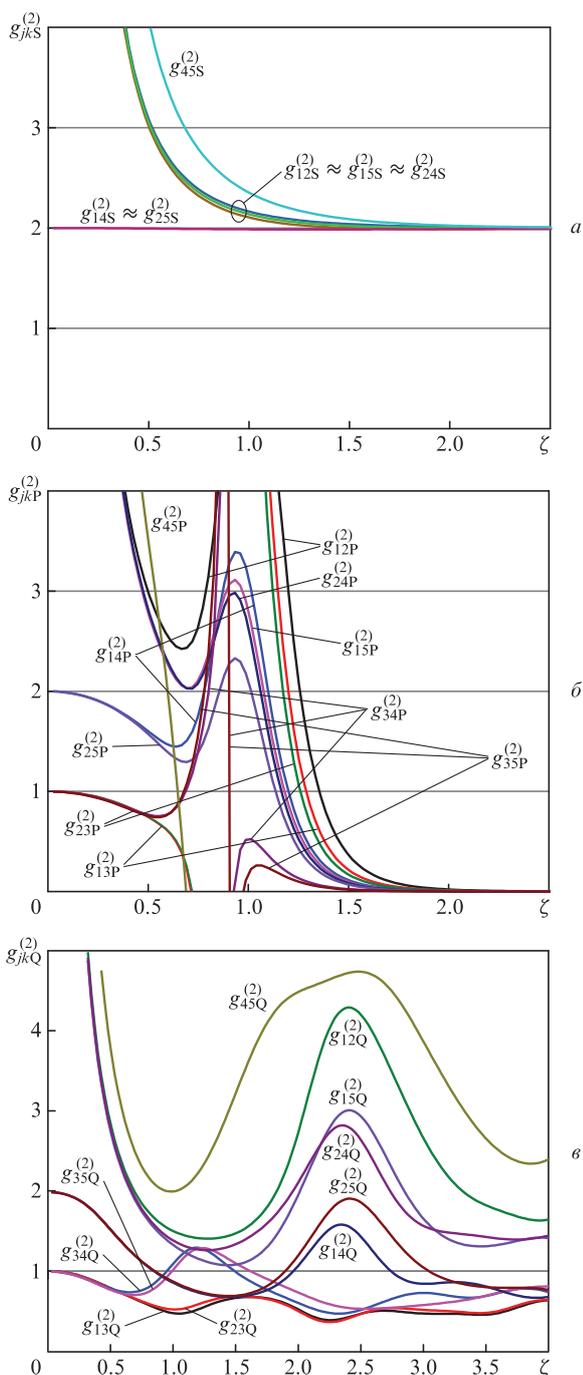


Рис.2. Коэффициенты корреляции, вычисленные методами S (а), P (б) и Q (в). Цветной вариант рис.2 помещен на сайте нашего журнала <http://www.quantum-electron.ru>.

Из рис.2, как и из рис.1, видно, что сначала реализуется процесс (1а), а затем процессы (1б) и (1в). При сильном энергообмене все три процесса начинают конкурировать между собой, что выражается в почти периодическом характере приведенных кривых. В результате процесса (1б) практически не удается одновременно наблюдать парные совпадения фотонов мод 1 и 3, 2 и 3, что подтверждает выводы работы [4]. С другой стороны, парные моды 1 и 2, 1 и 5, 2 и 4, 4 и 5 заметно коррелированы и могут использоваться для восстановления изображений методами компьютерной обработки информации по алгоритмам, предложенным в работах [4, 5]. При этом очень важно отметить, что между модами 1 и 4, 2 и 5, 3 и 4, 3 и 5 может быть как взаимная корреляция, так и антикорреляция фотонов, что проявляется в значениях  $g^{(2)}$ , меньших 1. Для реализации того или иного режима нужно выбрать соответствующую длину взаимодействия с учетом интенсивного энергообмена между модами. Данный эффект инверсии взаимной корреляции установлен нами на основе описанного квантового расчета взаимодействия всех пяти мод, причем не только в случае вакуумного состояния на входе всех мод, кроме накачки, но и в случае однофотонной затравки. Как следует из рис.2,а и б, известными приближенными методами его обнаружить практически невозможно.

Итак, мы решили задачу квантового описания взаимодействия плоских монохроматических мод в РДС-кристалле. Для сравнения та же задача решена методом теории возмущений и в приближении заданного поля. Сходство результатов для всех трех методов наблюдается лишь на начальном этапе эволюции, когда истощение накачки не существенно, затем появляются значительные расхождения, которые нами исследованы. Получены результаты квантового расчета для интенсивного энергообмена между плоскими монохроматическими модами с учетом истощения накачки с помощью численного метода.

Работа поддержана грантом РФФИ №18-01-00598А.

1. Чиркин А.С. *Оптика и спектроскопия*, **87**, 627 (1999).
2. Chirkin A.S., Saigin M.Yu., Shutov I.V. *J. Russ. Laser Res.*, **29**, 336 (2008).
3. Чиркин А.С., Волков В.В., Лаптев Г.Д., Морозов Е.Ю. *Квантовая электроника*, **30**, 847 (2000) [*Quantum Electron.*, **30**, 847 (2000)].
4. Balakin D.A., Belinsky A.V., Chirkin A.S. *J. Russ. Laser Res.*, **38**, 164 (2017).
5. Балакин Д.А., Белинский А.В., Чиркин А.С. *ЖЭТФ*, **152**, 252 (2017) [*JETP*, **125**, 210 (2017)].
6. Гречин С.Г., Дмитриев В.Г. *Квантовая электроника*, **31**, 933 (2001) [*Quantum Electron.*, **31**, 933 (2001)].
7. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Физматлит, 2004).
8. Тагиев А., Чиркин А.С. *ЖЭТФ*, **73**, 1271 (1977) [*JETP*, **46**, 669 (1977)].
9. Beskrovnyi V.N., Chirkin A.S., in *Quantum Communication and Computing*. Ed. by O.Hirota, A.S.Holevo, C.M.Caves (New York: Plenum Press, 1997, p. 483).
10. Люиселл У. *Излучение и шумы в квантовой электронике* (М.: Наука, 1972).
11. Walls D.F., Barakat R. *Phys. Rev. A*, **1**, 446 (1970).
12. Nikitin S.P., Masalov A.V. *Quantum Opt.*, **3**, 105 (1991).
13. Sazonova Z.S., Singh R. *Laser Phys.*, **10**, 770 (2000).
14. Карасев В.П. *Теоретическая и математическая физика*, **95**, 3 (1993).
15. Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. *УФН*, **153**, 233 (1987) [*Sov. Phys. Usp.*, **30**, 851 (1987)].
16. Клышко Д.Н., Масалов А.В. *УФН*, **165**, 1249 (1995) [*Phys. Usp.*, **38**, 1203 (1995)].