

Модификация спектра высших гармоник слабым вакуумным ультрафиолетовым полем

Т.С.Саранцева, М.В.Фролов, Н.В.Введенский

В рамках нестационарной теории эффективного радиуса вычислены спектры высших гармоник в поле, содержащем интенсивную низкочастотную компоненту и слабую (пертурбативную) высокочастотную компоненту с энергией фотона, превышающей потенциал ионизации атомной мишени. Дано квантово-механическое обоснование квазиклассической теории [А.В.Флегель и др., Квантовая электроника, 47, 222 (2017)], описывающей дополнительные каналы генерации высших гармоник, индуцированные слабым высокочастотным полем.

Ключевые слова: генерация высших гармоник, модель эффективного радиуса, сильное поле, вакуумный ультрафиолет.

Исследования генерации высших гармоник (ГВГ) тесно связаны с широким кругом практических задач, в частности с генерацией предельно коротких лазерных импульсов [1–3] и с развитием новых методов спектроскопии сверхбыстрых процессов, основанных на анализе спектров ГВГ [4–8]. Характерной особенностью ГВГ в сильных лазерных полях является возникновение плато в спектре высших гармоник, т.е. слабой зависимости выхода гармоники от ее энергии E_Ω . Число и форма платообразных структур в спектре ГВГ существенно зависят от структуры лазерного импульса. Например, в простейшем случае монохроматического линейно поляризованного поля наблюдается одно плато с энергией отсечки $E_c \approx E_0 + 3.17u_p$, где E_0 – энергия связи внешнего электрона; $u_p = F^2/(4\omega^2)$ – средняя колебательная энергия электрона в поле с напряженностью F и частотой ω [9] (здесь и далее используется атомная система единиц). В этом случае управлять высотой плато и положением отсечки можно только за счет изменения F и ω . Добавление электрических или магнитных полей к исходному интенсивному полю приводит к модификации платообразной структуры в спектре ГВГ, а также к увеличению числа параметров, позволяющих контролировать форму спектра высших гармоник.

В последнее время большое внимание привлекает двухкомпонентная схема ГВГ, в которой к интенсивному ИК полю добавляется высокочастотная компонента с одной или несколькими несущими частотами, лежащими

в УФ диапазоне [10–12]. Добавление слабой УФ компоненты приводит к существенной модификации спектра высших гармоник. Если энергия УФ фотона не превышает потенциала ионизации атомной системы, возможно увеличение эффективности выхода высших гармоник за счет резонансного заселения возбужденных состояний системы [10, 11, 13, 14]. Использование более высокочастотных полей, лежащих в вакуумном УФ диапазоне, приводит к возникновению дополнительных платообразных структур как одноэлектронной [15–17], так и многоэлектронной природы [18–20]. В работе [17] для решения рассматриваемой задачи было предложено использовать квазиклассический анализ динамики электрона в двухкомпонентном поле; получены оценки положения отсечки возникающих платообразных структур.

Целью настоящей работы является последовательный квантово-механический расчет спектра высших гармоник в рамках модели эффективного радиуса [21, 22] и определение точности полученных в работе [17] квазиклассических оценок положения спектральной отсечки платообразных структур.

Рассмотрим атомную систему с валентным s -электроном с энергией связи $E_0 = -\kappa^2/2$ в двухкомпонентном лазерном поле. Будем параметризовать двухкомпонентное лазерное поле с частотой ω и напряженностью F , определяющими ИК компоненту, а также с частотой $\Omega = k\omega$ (k – нечетное целое число) и напряженностью F_k для УФ компоненты поля,

$$\mathbf{F}(t) = e_z [F \cos(\omega t) + F_k \cos(\Omega t + \phi)], \quad (1)$$

где ϕ – фазовый сдвиг. Отметим, что выбор пространственной ориентации компонент поля не меняет структуру высокоэнергетической части спектра высших гармоник, однако приводит к модификации поляризационных свойств гармоник.

Взаимодействие атомной системы с периодическим по времени полем вида (1) может быть описано в рамках модельного подхода, сочетающего в себе нестационарную теорию эффективного радиуса [21, 22] и метод комплексных квазиэнергий [23]. В рамках данного подхода волновая функция квазистационарного квазиэнергетиче-

Т.С.Саранцева. Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Воронежский государственный университет, Россия, 394018 Воронеж, Университетская пл., 1
М.В.Фролов. Воронежский государственный университет, Россия, 394018 Воронеж, Университетская пл., 1; e-mail: frolov@phys.vsu.ru
Н.В.Введенский. Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Воронежский государственный университет, Россия, 394018 Воронеж, Университетская пл., 1; Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Россия, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; e-mail: vvved@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 21 февраля 2018 г., после доработки – 21 мая 2018 г.

ского состояния (ККЭС) атомной системы во внешнем периодическом поле может быть представлена в виде [24]

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = -C_0 \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \sum_q f_q \Phi_\varepsilon^{(q)}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\Phi_\varepsilon^{(q)}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \exp[i\varepsilon(t-t')] G^{(+)}(\mathbf{r}, t; 0, t') \exp(-2iq\omega t') dt',$$

где C_0 – безразмерный асимптотический коэффициент невозмущенной волновой функции связанного состояния; $G^{(+)}(\mathbf{r}, t; 0, t')$ – запаздывающая функция Грина в лазерном поле;

$$G^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G_0^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \exp[iR(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') - iS(t, t')];$$

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i \left[\frac{1}{2\pi i(t-t')} \right]^{3/2} \exp \left[i \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2(t-t')} \right];$$

$$R(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \mathbf{r} \mathbf{P}(t; t, t') - \mathbf{r}' \mathbf{P}(t'; t, t'); \quad (3)$$

$$S(t, t') = \frac{1}{2} \int_{t'}^t \mathbf{P}(\tau; t, t')^2 d\tau;$$

$$\mathbf{P}(\tau; t, t') = \frac{1}{c} \left(\mathbf{A}(\tau) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right);$$

$\mathbf{A}(\tau)$ – векторный потенциал двухкомпонентного поля; c – скорость света в вакууме. Коэффициенты f_q определяются из системы однородных уравнений для комплексной квазиэнергии ε ,

$$\sum_q \mu_{qq'}(\varepsilon) f_{q'} = 0, \quad (4)$$

где матричный элемент $\mu_{qq'}(\varepsilon)$ может быть выражен в виде двойного интеграла:

$$\mu_{qq'}(\varepsilon) = \mathcal{R}_0(\varepsilon + 2q\omega) \delta_{qq'} - M_{qq'}(\varepsilon); \quad (5)$$

$$M_{qq'}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i}} \frac{1}{T}$$

$$\times \int_0^T dt \int_{-\infty}^t \frac{dt' \exp\{i[\varepsilon(t-t') + 2q\omega t - 2q'\omega t']\}}{(t-t')^{3/2}}$$

$$\times \{\exp[-iS(t, t')] - 1\}. \quad (6)$$

Функцию $\mathcal{R}_0(E)$ можно выразить через основные параметры теории эффективного радиуса – длину рассеяния a_0 и эффективный радиус r_0 :

$$\mathcal{R}_0(E) = -\frac{1}{a_0} + r_0 E - i\sqrt{2E}. \quad (7)$$

Решение системы уравнений (4) позволяет найти штарковский сдвиг и уширение уровня во внешнем лазерном поле. Однако, как показывает анализ, в задаче о генерации высших гармоник учет указанных поправок вно-

сит пренебрежимо малый вклад в амплитуду процесса, и точное значение квазиэнергии можно заменить энергией связи валентного электрона в отсутствие поля, $\varepsilon \approx E_0$. Тогда для нахождения коэффициентов f_q решение системы (4) может быть найдено методом последовательных приближений [25]. Выбрав в качестве нулевого приближения $f_q = \delta_{q0}$, получим для коэффициентов $f_{q \neq 0}$ следующие выражения:

$$f_{q \neq 0} \approx \frac{M_{q0}}{\mathcal{R}_0(E_0 + 2q\omega)}. \quad (8)$$

Знание волновой функции (2) позволяет записать амплитуду ГВГ с заданной поляризацией \mathbf{e}_h в следующем виде [24]:

$$A_N = (\mathbf{e}_h^* \mathbf{d}_N), \quad (9)$$

$$\mathbf{d}_N = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{iN\omega t} \langle \tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t) | \mathbf{r} | \Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (10)$$

где $\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ – дуальная функция, получаемая из функции ККЭС $\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ путем комплексного сопряжения и обращения времени [24, 26]. Принимая во внимание разложение (2), фурье-образ дипольного момента \mathbf{d}_N может быть записан в виде двойной суммы, содержащей коэффициенты f_q :

$$\mathbf{d}_N = \sum_{qq'} f_{q'} \mathbf{D}_{qq'} f_q, \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_{qq'}(N) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi i}} \frac{\kappa C_0^2}{N\omega T}$$

$$\times \int_0^T dt \int_{-\infty}^t \frac{dt' \exp[i\varepsilon(t-t') + 2iq\omega t]}{(t-t')^{3/2}}$$

$$\times \exp[-2iq'\omega t' - iS(t, t')] \int_{t'}^t \mathbf{P}(\tau; t, t') \exp(iN\omega\tau) d\tau. \quad (12)$$

Если параметры УФ импульса удовлетворяют условию $\kappa\Omega/F_k \gg 1$, то взаимодействие с таким полем может быть рассмотрено в рамках теории возмущений [27]. В этом случае амплитуду ГВГ в двухкомпонентном лазерном поле можно представить в виде парциальных амплитуд, описывающих ГВГ с участием n -фотонов УФ поля:

$$\mathbf{d}_N = \mathbf{e}_z \sum_n d_N^{(n)}. \quad (13)$$

Выпишем два первых члена данного разложения:

$$d_N^{(0)} = \sum_{qq'} f_q^{(0)} \mathbf{D}_{qq'}^{(0)} f_{q'}^{(0)}, \quad (14)$$

$$d_N^{(1)} = \sum_{qq'} (f_q^{(0)} \mathbf{D}_{qq'}^{(1)} f_{q'}^{(0)} + f_q^{(1)} \mathbf{D}_{qq'}^{(0)} f_{q'}^{(0)} + f_q^{(0)} \mathbf{D}_{qq'}^{(0)} f_{q'}^{(1)}). \quad (15)$$

Для анализа относительного вклада процессов, происходящих с обменом n фотонов УФ поля, удобно также ввести парциальные вероятности процесса ГВГ:

$$R_N^{(n)} = \frac{(N\omega)^3}{2\pi c^3} |d_N^{(n)}|^2. \quad (16)$$

В случае, когда ИК и УФ компоненты поля являются монохроматическими, выражения для матричных элементов $D_{qq'}^{(i)}$ и $M_{0q}^{(i)}$ (определяют коэффициенты $f_q^{(i)}$ в соответствии с (8)) могут быть представлены в виде одномерных интегралов от функции Бесселя. Например, для матричных элементов нулевого порядка они имеют вид [22]

$$M_{qq'}^{(0)} = i^{q-q'} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i}} \int_0^\infty \frac{\exp[i(E_0/\omega + q + q')\tau]}{\tau^{3/2}} \times [\exp(-i\lambda(\tau))J_{q-q'}(z(\tau)) - \delta_{qq'}] d\tau, \quad (17)$$

$$D_{qq'}^{(0)}(n) = N \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \exp[i(E_0/\omega + q + q')\tau - i\lambda(\tau)] \times [j_-(\tau)\mathcal{J}_{-1}(\tau) - ij_+(\tau)\mathcal{J}_{+1}(\tau)], \quad (18)$$

где

$$\mathcal{J}_n(\tau) = J_\eta(z(\tau)); \quad \eta = q - q' + (N + n)/2;$$

$$z(\tau) = \frac{2u_p}{\omega} \sin \frac{\tau}{2} \left[\cos \frac{\tau}{2} - 2 \frac{\sin(\tau/2)}{\tau} \right];$$

$$\lambda(\tau) = \frac{u_p}{\omega} \left[\tau - 4 \frac{\sin^2(\tau/2)}{\tau} \right];$$

$$j_\pm(\tau) = 2 \frac{\sin(\tau/2)\sin(N\tau/2)}{\tau} - \frac{N \sin[(N \pm 1)\tau/2]}{N \pm 1};$$

$$N = -i^{q-q'+N/2} \frac{C_0^2 \kappa}{N^2} \sqrt{\frac{u_p}{\pi\omega}}.$$

Для поправок первого порядка по напряженности F_k соответствующие матричные элементы имеют следующий вид:

$$M_{qq'}^{(1)} = -\frac{F_k}{\kappa C_0^2} [D_{qq'}^{(0)}(k)e^{i\phi} + D_{qq'}^{(0)}(-k)e^{-i\phi}], \quad (19)$$

$$D_{qq'}^{(1)}(N) = \sum_{\nu, \mu = \pm 1} e^{i\mu\phi} D_{qq'}^{(\mu, \nu)}(N, k),$$

где

$$D_{qq'}^{(\mu, \nu)}(N, k) = -N i^{(1+\mu k)/2} \frac{F_k}{\mu k} \times \int_0^\infty \frac{\exp[i(E_0/\omega + q + q')\tau - i\lambda(\tau)] \exp(ik\nu\tau/2)}{\tau^{3/2}} \times \left\{ w_{N,k}^{\mu, \nu}(\tau) \mathcal{J}_{\mu k}(\tau) - 2 \frac{u_p}{\omega} [w_{1,k}^{-\mu, \nu}(\tau) j_-(\tau) \mathcal{J}_{\mu k-2}(\tau) - w_{1,k}^{\mu, \nu}(\tau) j_+(\tau) \mathcal{J}_{\mu k+2}(\tau) - i(w_{1,k}^{\mu, \nu}(\tau) j_-(\tau) + w_{1,k}^{-\mu, \nu}(\tau) j_+(\tau)) \mathcal{J}_{\mu k}(\tau)] \right\} d\tau; \quad (20)$$

$$w_{n,k}^{\mu, \nu} = \frac{\nu}{2i} \left[\frac{2 \sin(n\tau/2)}{nk\tau} - \mu \frac{\exp(i\mu\nu n\tau/2)}{n + \mu k} \right]. \quad (21)$$

Для анализа влияния УФ поля на процесс ГВГ нами были вычислены спектры ГВГ для атомной системы с энергией связи $E_0 = -13.605$ эВ и асимптотическим коэффициентом $C_0 = 2$ (соответствует параметрам атома водорода). Частота ИК составляющей отвечает длине волны $\lambda = 1200$ нм ($\omega = 0.038$ ат.ед.), а $\Omega = 41\omega$ или 51ω . Интенсивность основной компоненты $I = 2 \times 10^{14}$ Вт/см², интенсивность добавочного поля составляет 1% от интенсивности основного поля. Отметим, что в первом порядке теории возмущений парциальный выход $R_N^{(1)}$ линейно зависит от интенсивности УФ компоненты поля. В то же время, как видно из (20) и (21), зависимость парциального выхода от частоты УФ фотона не может быть выражена в виде элементарной функции. Парциальные вероятности $R_N^{(0)}$ и $R_N^{(1)}$ представлены на рис.1. Для парциального выхода $R_N^{(1)}$ наблюдаются две платообразные структуры с разными длинами и интенсивностями. Отсечке короткого плато соответствует меньшая энергия гармоник, чем у отсечки плато в монохроматическом ИК поле. При увеличении энергии УФ фотона энергия обрыва короткого плато уменьшается. Энергия отсечки длинного плато превышает максимальную энергию в монохроматическом ИК поле ровно на величину энергии УФ фотона.

Такое поведение положения отсечки платообразных структур находится в согласии с квазиклассической теорией, предложенной в работе [17]. В соответствии с ней возникновение интенсивного короткого плато связано с

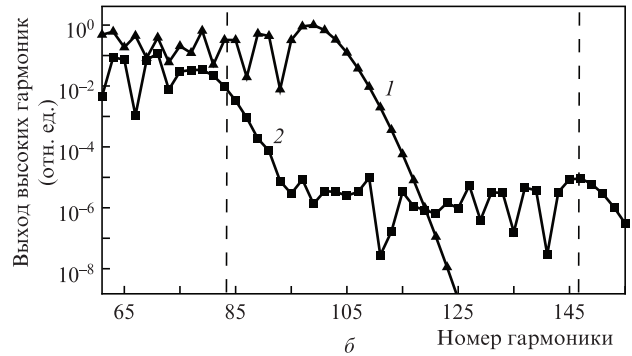
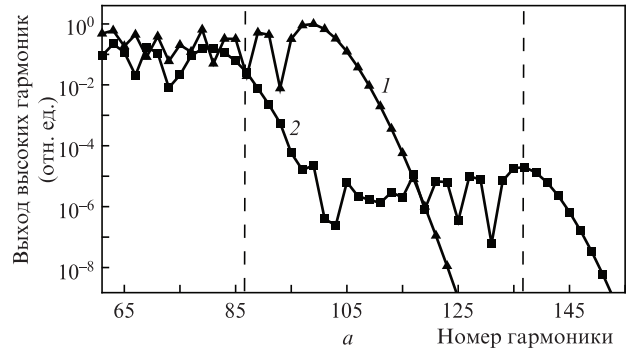


Рис.1. Зависимости парциальных выходов высших гармоник $R_N^{(0)}$ (1) и $R_N^{(1)}$ (2) от номера гармоники для атомной системы с энергией связи $E_0 = -13.605$ эВ в двухкомпонентном лазерном поле. Длина волны ИК компоненты $\lambda = 1200$ нм, интенсивность $I = 2 \times 10^{14}$ Вт/см². УФ компонента с $I_k = 2 \times 10^{12}$ Вт/см² соответствует 41-й (а) и 51-й (б) гармоникам ИК компоненты. Результаты нормированы на условие $R_{99}^{(0)} = 1$, где $N = 99$ соответствует положению отсечки плато в монохроматическом ИК поле. Здесь и на рис.2 вертикальными штриховыми линиями обозначено положение обрыва плато в соответствии с квазиклассическими оценками, предложенными в работе [17].

поглощением УФ фотона на этапе ионизации, тогда как менее интенсивное длинное плато возникает вследствие поглощения УФ кванта на этапе рекомбинации. В работе [17] приведены также аналитические выражения для оценки границ высокоэнергетичных плато. Положения отсечек платообразных структур, вычисленные в соответствии с указанными аналитическими выражениями, показаны на рис.1 вертикальными штриховыми линиями. Видно, что квазиклассическая теория с хорошей точностью описывает положение отсечки длинного плато, однако для короткого плато даваемые ею оценки положения отсечки приводят к завышенным результатам. Хорошее согласие положения отсечки длинного плато с классическими оценками, предложенными в работе [17], объясняется тем, что динамика электрона в континууме определяется нулевой начальной скоростью и, следовательно, минимальным расплыванием волнового пакета, образованного в результате туннелирования электрона из связанного состояния. В случае короткого плато переход электрона в континуум происходит посредством поглощения УФ фотона, что соответствует ненулевой начальной скорости электрона в континууме. Расплывание такого пакета происходит значительно быстрее, вследствие чего реальное положение отсечки плато существенно отличается от классического результата.

Важным приближением, широко применяемым для расчетов в сильных лазерных полях, является приближение сильного поля (ПСП). Оно состоит в пренебрежении эффектами атомного потенциала на этапе движения электрона в модифицированном поле континууме. В рамках теории эффективного радиуса ПСП сводится к замене $f_q = \delta_{q,0}$, и дипольный матричный элемент d_N принимает следующий вид:

$$d_N = e_z \sum_{\nu, \mu = \pm 1} e^{i\mu\varphi} D_{0,0}^{(\mu, \nu)}(N, k). \tag{22}$$

При этом каждому из слагаемых в сумме (22) можно придать прозрачный физический смысл. Очевидно, что слагаемые с $\mu = +1$ соответствуют излучению УФ фотона в процессе ГВГ, а слагаемые с $\mu = -1$ отвечают поглощению УФ фотона. Для понимания смысла переменной ν необходимо обратиться к общему выражению для дипольного момента (11). Видно, что выражение для любого матричного элемента представляется в виде двойного интеграла по переменным t и t' , которые могут быть интерпретированы как времена начала и окончания движения в модифицированном поле континууме. Значение переменной ν соответствует моменту времени, в который происходит взаимодействие с УФ полем: при $\mu = \nu$ это момент ионизации (t'), при $\mu = -\nu$ это момент возврата электрона к родительскому остову (t). Следует отметить, что, помимо описанных выше случаев, обмен УФ фотоном возможен также на этапе движения электрона в континууме. Амплитуда ГВГ в соответствующем канале описывается слагаемыми, содержащими ненулевые коэффициенты $f_q^{(1)}$. Таким образом, анализ точности ПСП позволяет также оценить относительный вклад канала ГВГ с излучением или поглощением УФ фотона на этапе движения электрона в континууме.

На рис.2 представлены парциальные вероятности

$$R_N^{(\mu, \nu)} = \frac{(N\omega)^3}{2\pi c^3} |D_{00}^{(\mu, \nu)}(N, k)|^2, \tag{23}$$

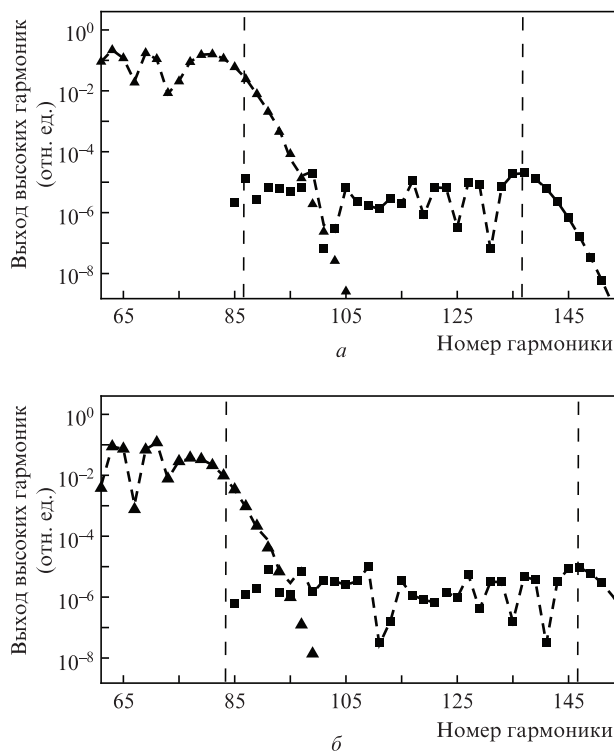


Рис.2. Зависимости парциальных выходов высоких гармоник $R_N^{(1)}$ (штриховые кривые), $R_N^{(-,-)}$ (треугольники) и $R_N^{(-,+)}$ (квадраты) от номера гармоники в двухкомпонентном лазерном поле. Параметры расчета те же, что и на рис.1.

соответствующие поглощению УФ фотона на этапе ионизации ($R_N^{(-,-)}$) и рекомбинации ($R_N^{(-,+)}$), вычисленные для двухкомпонентного поля с теми же параметрами, что и на рис.1. Видно, что вклады парциальных выходов $R_N^{(-,-)}$ и $R_N^{(-,+)}$ полностью описывают наблюдаемые платообразные структуры в спектре ГВГ. Это свидетельствует о том, что в первом порядке теории возмущений по напряженности УФ импульса основной вклад в полный выход ГВГ вносят только два канала, рассмотренные в работе [17], а вклад остальных каналов является пренебрежимо малым.

В заключение сформулируем основные результаты настоящей работы. Для двухкомпонентного поля, состоящего из низкочастотной (ИК) и высокочастотной (УФ) компонент в рамках теории эффективного радиуса были получены аналитические выражения для амплитуды ГВГ в первом порядке теории возмущений по напряженности УФ поля как в приближении сильного поля, так и с учетом эффектов перерасеяния высших порядков. Было показано, что в приближении сильного поля аналитическое выражение для амплитуды ГВГ позволяет выделить вклады каналов, соответствующих излучению/поглощению УФ фотона на этапе ионизации или рекомбинации. Из проведенных расчетов следует, что в первом порядке теории возмущений по напряженности УФ поля возникающие платообразные структуры полностью описываются вкладом от каналов, соответствующих поглощению УФ фотона на этапах ионизации и рекомбинации. Таким образом, проведенные квантово-механические расчеты качественно подтверждают выводы работы [17].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-12-00476).

1. Krausz F., Ivanov M. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 163 (2009).
2. Popmintchev T., Chen M.-C., Arpin P., Murnane M.M., Kapteyn H.C. *Nature Phot.*, **4**, 822 (2010).
3. Popmintchev T., Chen M.-C., Popmintchev D., Arpin P., Brown S., Ališauskas S., Andriukaitis G., Baliunas T., Mücke O.D., Pugzlys A., et al. *Science*, **336**, 1287 (2012).
4. Wörner H.J., Niikura H., Bertrand J.B., Corkum P.B., Villeneuve D.M. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 103901 (2009).
5. Shiner A.D., Schmidt B.E., Trallero-Herrero C., Wörner H.J., Patchkovskii S., Corkum P.B., Kieffer J., Légaré F., Villeneuve D.M. *Nature Phys.*, **7**, 464 (2011).
6. Bertrand J.B., Wörner H.J., Hockett P., Villeneuve D.M., Corkum P.B. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 143001 (2012).
7. Wong M.C.H., Le A.-T., Alharbi A.F., Boguslavskiy A.E., Lucchese R.R., Brichta J.-P., Lin C.D., Bhardwaj V.R. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 033006 (2013).
8. Frolov M.V., Sarantseva T. S., Manakov N.L., Fulfer K.D., Wilson B.P., Troß J., Ren X., Poliakov E.D., Silaev A.A., Vvedenskii N.V., et al., *Phys. Rev. A*, **93**, 031403 (2016).
9. Corkum P.B. *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1994 (1993).
10. Heinrich A., Kornelis W., Anscombe M.P., Hauri C. P., Schlup P., Biegert J., Keller U. *J. Phys. B*, **39**, S275 (2006).
11. Takahashi E.J., Kanai T., Ishikawa K.L., Nabekawa Y., Midorikawa K. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 053904 (2007).
12. Brizuela F., Hey C.M., Rudawski P., Kroon D., Rading L., Dahlström J.M., Mauritsson J., Johnsson P., Arnold C.L., L'Huillier A. *Scientific Rep.*, **3**, 1410 (2013).
13. Ishikawa K. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 043002 (2003).
14. Popruzenko S.V., Zaretsky D.F., Becker W. *Phys. Rev. A*, **81**, 063417 (2010).
15. Fleischer A., Moiseyev N. *Phys. Rev. A*, **77**, 010102 (2008).
16. Fleischer A. *Phys. Rev. A*, **78**, 053413 (2008).
17. Флегель А.В., Фролов М.В., Желтухин А.Н., Введенский Н.В. *Квантовая электроника*, **47** (3), 222 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (3), 222 (2017)].
18. Buth C., He F., Ullrich J., Keitel C.H., Hatsagortsyan K.Z. *Phys. Rev. A*, **88**, 033848 (2013).
19. Brown A.C., van der Hart H.W. *Phys. Rev. Lett.*, **117**, 093201 (2016).
20. You J.-A., Dahlström J.M., Rohringer N. *Phys. Rev. A*, **95**, 023409 (2017).
21. Frolov M.V., Manakov N.L., Pronin E.A., Starace A.F. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 053003 (2003).
22. Frolov M.V., Flegel A.V., Manakov N.L., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **75**, 063408 (2007).
23. Manakov N.L., Ovsiannikov V.D., Rapoport L.P. *Phys. Rep.*, **141**, 319 (1986).
24. Frolov M.V., Flegel A.V., Manakov N.L., Starace A.F. *Phys. Rev. A*, **75**, 063407 (2007).
25. Frolov M.V., Khuskivadze A.A., Manakov N.L., Starace A.F. *J. Phys. B*, **39**, S283 (2006).
26. Manakov N.L., Frolov M.V., Starace A.F., Fabrikant I.I. *J. Phys. B*, **33**, R141 (2000).
27. Келдыш Л.В. *ЖЭТФ*, **47**, 1945 (1964).