ФОТОННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Что такое фотон: структура и волновая функция

А.П.Канавин, О.Н.Крохин

«До последних дней моей жизни я буду размышлять о том, что такое свет.»
А. Эйнштейн, 1917 г.

На основе модели фотона как «радиационного осциллятора» поля, перемещающегося в пространстве со скоростью света и имеющего массу покоя, равную нулю, построена волновая функция, которая описывает фотонные состояния электромагнитного поля. Выдвинуто предположение, что все пространство, где присутствует поле, распадается на отдельные области размером порядка длины волны излучения, внутри которых поле когерентно, а полная энергия поля равна энергии фотона.

Ключевые слова: *уравнения Максвелла, фотон, волновая функция.*

Понятие фотона – «кванта электромагнитного поля» – было введено М.Планком и А.Эйнштейном* в начале прошлого века [2, 3]. В последнее время проявляется большой интерес к исследованию квантовых состояний электромагнитного поля (фотонных состояний) с целью понять, каким образом устроена элементарная частица этого поля [4]. Критический обзор, посвященный различным аспектам понятия «фотон», приведён в [5]. С.Вайнберг определяет понятие «элементарная частица» как пакет соответствующих полей [6].

В современной интерпретации квантовой электродинамики понятие элементарной частицы-фотона вводится несколько формально посредством операторов рождения и уничтожения квантов электромагнитного поля в асимптотическом приближении во всём пространстве-времени [7]. При этом вопрос о структуре элементарных частиц не возникает, хотя кванты электромагнитного излучения – фотоны – имеют в оптическом диапазоне спектра относительно большие размеры ($\sim$1 мкм – порядка длины волны) и могут быть «прощупаны» современными методами исследования.

Мы попытаемся построить волновую функцию, описывающую собственно фотон, т. е., по существу, структуру электромагнитного поля фотона. Исходная посылка для этого – модель фотона как «радиационного осциллятора» поля, перемещающегося в пространстве со скоростью света и имеющего массу покоя, равную нулю.

Таким образом, будем считать, что волновая функция фотона состоит из произведения двух функций: функции, описывающей его свободное движение с импульсом $\boldsymbol{p}$, т. е. волну де Бройля, и функции, описывающей его структуру. Мы придерживаемся точки зрения, что данная задача аналогична задаче о волновой функции массивной частицы, у которой есть внутренняя структура, например атома водорода, совершающего свободное движение в пространстве.

Выберем систему координат. Пусть ось z направлена вдоль направления движения фотона. Ось x направим в направлении вектора электрического поля $\boldsymbol{E}$ (рассматривается линейная поляризация электромагнитной волны), а ось y – перпендикулярно плоскости xz. В этой плоскости в начале координат вектор $\boldsymbol{E}$ монохроматической волны совершает гармонические колебания с циклической частотой ω подобно линейному осциллятору. Попытаемся свести задачу о фотоне, который иногда называют «радиационным осциллятором поля», к задаче о квантовых состояниях механического линейного осциллятора [7].

Попытаемся на этой основе построить квантовый подход к решению задачи о структуре фотона. Для этого рассмотрим классический осциллятор, совершающий гармонические колебания вдоль оси x. Задача о квантовом поведении осциллятора была впервые рассмотрена В.Гейзенбергом в 1925 г., ещё до открытия уравнения Шредингера [8]. В.Гейзенберг применил разработанный им матричный метод, опираясь на правила коммутации канонически сопряжённых величин операторов координаты $\hat{x}$ и импульса $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\partial/\partial x$.

Для «радиационного осциллятора» роль координаты играет напряжённость электрического поля $E(t, x)$, которое осциллирует во времени с частотой, равной частоте электромагнитной волны. Таким образом, мы можем использовать соотношение [8]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{i}\omega E = 0. \qquad (1)$$

При переходе к квантовому рассмотрению величины E и $\partial E/\partial t$ следует заменить на некоммутирующие операторы $\hat{E}$ и $\partial\hat{E}/\partial t$.

Обратим внимание на то, что в классическом случае в точке, где $\partial E/\partial t = 0$, величина E достигает максимально-

* 12 декабря 1951 г. А.Эйнштейн писал М.Бессо: «Пятьдесят лет мучительных размышлений так и не приблизили меня к ответу на вопрос: что же такое кванты света? В наши дни любой мальчишка воображает, что ему это известно. Но он глубоко ошибается» [1].

А.П.Канавин, О.Н.Крохин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: kanavin@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 11 апреля 2018 г.

го значения, равного амплитуде колебаний $E_0(x, 0)$, которая, в свою очередь, определяет усреднённую по времени плотность энергии поля в волне и плотность потока энергии (последние с учётом равенства электрического и магнитного полей равны $E_0^2/8\pi$ и $cE_0^2/8\pi$ соответственно). После достижения величиной E значения E_0 она будет уменьшаться со временем подобно координате механического осциллятора. Поведение E и координаты механического осциллятора весьма схожи: обе величины совершают гармонические колебания, а энергетические характеристики в обоих случаях пропорциональны квадратам соответствующих величин.

При квантовом описании система, находящаяся в стационарном состоянии, т. е. в состоянии с заданным значением энергии, описывается волновой функцией, которая является произведением двух функций, зависящих только от координаты и только от времени:

$$\psi(x,t) = \psi(t)\psi(x), \tag{2}$$

где $\psi(t) = \exp(-\mathrm{i}\omega t)$, а $\psi(x)$ определяет структуру объекта, т. е. волновое поле, соответствующее стоячей волне. Для определения $\psi(x, t)$, необходимо найти решение «краевой задачи».

Уравнение (1), записанное для операторов, имеет вид

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} + \mathrm{i}\omega\hat{E} = 0. \tag{3}$$

Оно совпадает с уравнением для оператора $\hat{x}$ – оператора координаты линейного осциллятора Гейзенберга – с той лишь разницей, что механический осциллятор совершает колебания относительно точки с $x = 0$, к которой его возвращает упругая сила, а поле E не имеет такой точки – оно не локально и осциллирует во всём объёме, где присутствует это поле.

Поскольку уравнение (3) совпадает с уравнением

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + \mathrm{i}\omega\hat{x} = 0, \tag{4}$$

описывающим квантовое поведение механического осциллятора (мы здесь выбрали знак «+» в соответствии с формулой (23.11) в [8]), их решения аналогичны. Таким образом, наша задача сводится к замене $\hat{E}$ на $\hat{x}$, и, соответственно, оператор напряжённости электрического поля $\hat{E}$ не коммутирует со «скоростью» его изменения.

В нашей системе координат в заданный момент времени (например, при $t = 0$) электрическое поле, направленное по оси x, имеет одинаковое значение на плоскости xy. Поэтому в качестве точки, в которой присутствует осциллирующее электрическое поле, можно выбрать точку с произвольной координатой (x, y). Это соответствует волне электромагнитного поля (или волне вероятности), когда все параметры на фазовой поверхности одинаковы (например, плоская волна). Для простоты положим для этой точки $x = y = 0$.

Можно предположить, что именно вблизи этой точки находится фотон и дальнейшей задачей является определение структуры этого фотона (определение пространственной зависимости электрического поля в этой области).

Здесь следует сделать одно важное замечание. Оно относится к вопросу о когерентности электромагнитного поля. Поскольку мы ввели заданную источником частоту поля ω, возникает вопрос о пространственно-временной когерентности монохроматического поля. А именно, если мы имеем идеально монохроматическое поле, то оно одинаково во всём пространстве-времени, которое формально безгранично. Однако это невозможно, поскольку в процессе излучения волны имеют место флуктуации и изменения её амплитуды, фазы (т. е. частоты) и пространственных свойств. Эти свойства определяются так называемой функцией пространственно-временной корреляции электромагнитного поля волны. В результате все пространство, где присутствует поле, распадается на отдельные области размером порядка длины волны излучения, внутри которых поле когерентно, а его полная энергия равна энергии фотона.

В связи с этим следует сослаться на работу Я.Б.Зельдовича, в которой определено полное число квантов электромагнитного поля N через корреляционный интеграл [9]:

$$N = \frac{1}{2c\hbar}\iint \frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{(2\pi)^3}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{H}$ – напряжённость магнитного поля; $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ – радиус-векторы двух разных точек пространства; множитель $1/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2$ определяет корреляцию поля в этих точках. Здесь, фактически, использована идея Гюйгенса о том, что каждая точка фронта волны излучает сферические волны и, следовательно, излучение из точки с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_1$ достигает точки с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_2$ ослабленным в $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ раза. Это обеспечивает конечность объёма интегрирования и фактически эквивалентно введению пространственной корреляционной функции.

«Скорость» $\partial E/\partial t$, как это следует из уравнений Максвелла, можно выразить через пространственную производную $c^{-1}(\partial E/\partial t) = -\partial E/\partial x$ и, таким образом, получить

$$c\frac{\partial E}{\partial x} - \mathrm{i}\omega E = 0. \tag{6}$$

Умножая это уравнение на $\mathrm{i}\hbar/c$, получаем

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\hbar\omega}{c}E = 0, \tag{7}$$

после чего, вводя оператор импульса $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\partial/\partial x$, можно записать

$$\hat{p}_x E = \frac{\hbar\omega}{c}E. \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет собой соотношение, определяющее собственные значения оператора импульса и граничные условия для $\partial E/\partial t$, а именно, $\partial E/\partial t = 0$ при достижении величиной E максимума, т. е. $E_0 = \sqrt{8\pi S}/c$ (S – плотность потока излучения). Тогда

$$\begin{gathered} E = \pm E_0 \text{ при } \partial E/\partial t = 0, \\ E = 0 \text{ при } \partial E/\partial t \to \max|\partial E/\partial t|. \end{gathered} \tag{9}$$

Первое из этих условий можно рассматривать как граничное условие для $E(x)$.

Здесь возникает существенный вопрос, связанный с дуализмом квантовой физики «волна-частица», затрону-

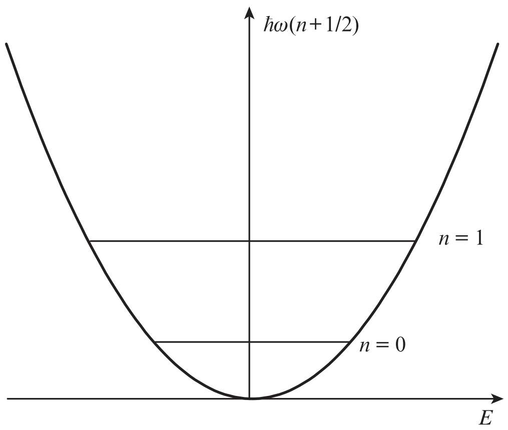

Рис.1. Энергия фотонов для нулевых колебаний ($n = 0$) и однофотонного состояния ($n = 1$).

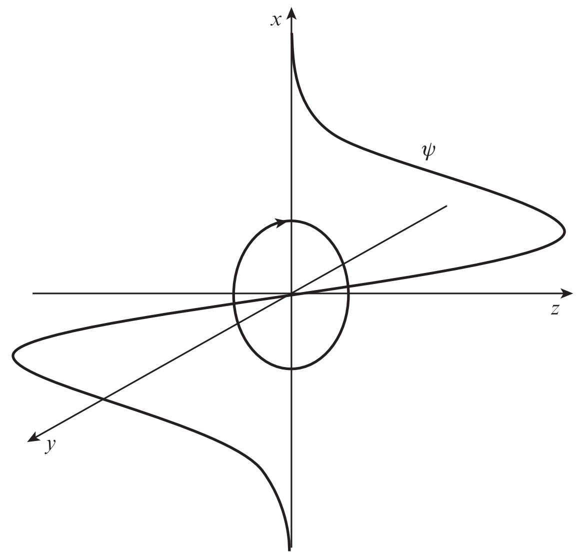

Рис.2. Волновая функция циркулярно поляризованного фотона, распространяющегося вдоль оси z. Поле описывается первым полиномом Эрмита ($n = 1$).

тый, в том числе, в [9]. А именно, насколько электромагнитное поле когерентно на фазовой плоскости xy? В нашем случае электрическое поле поляризовано вдоль оси x и зависит только от x. Характерная длина когерентности определяется длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, поэтому уравнение (8) справедливо только на расстояниях $x \leqslant \lambda$. Следовательно, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{2\pi x}{\lambda^2}E. \tag{10}$$

Множитель x/λ отражает тот факт, что при $x = \lambda$ энергия поля, заключённая в объёме λ^3, равна энергии кванта $\hbar\omega$. Из этого следует, что оно эквивалентно волновой функции линейного механического осциллятора (см. [8], §23). Поскольку в качестве волновой функции фотона в квантовой электродинамике можно рассматривать (с точностью до нормировочного множителя) волновое электрическое поле, то решения, приведённые в [8], являются, по существу, решением и для электромагнитной квантовой частицы «радиационного» осциллятора – фотона.

А именно, основное состояние с $n = 0$ – это нулевые колебания поля, первое возбуждённое состояние с $n = 1$ соответствует одному фотону. По существу, решение уравнения (10) – это «стоячие» волны (состояния) в параболическом потенциале, пропорциональном E^2 (рис.1), где E – текущее значение напряжённости электрического поля волны. Нормированные на единицу решения для $E(x) = \psi_0(x)$ являются полиномами Эрмита и дают распределение плотности энергии электромагнитного поля вдоль поперечной координаты x.

Итак, полная волновая функция фотона – состояния, отвечающего квантовому числу $n = 1$, есть произведение волновой функции, описывающей распространение фотона в свободном пространстве, и волновой функции в виде первого полинома Эрмита, описывающей структуру фотона (рис.2).

Конечно, остаётся принципиальный вопрос: почему элементарная частица фотон стабильна? Казалось бы, наличие зависимости ψ от поперечной координаты x должно привести к дифракции и «распаду» фотона с течением времени. Однако, как нам представляется, любое нарушение найденного решения должно сопровождаться «перестройкой» волновой функции, приводящей к увеличению энергии данного состояния, что невозможно. Формально это выражается в том, что найденное решение стационарно и $\hbar\omega = \mathrm{const}$. Физическая причина этого – отсутствие источников поля.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Плотность энергии электромагнитного поля при его линейной поляризации осциллирует в пространстве и времени пропорционально E_x^2, однако для фотона энергия является постоянной величиной, равной $\hbar\omega$. Это несоответствие устраняется, если предположить, что фотон имеет циркулярную поляризацию с компонентами поля E_x и E_y, смещёнными по фазе друг от друга на $\pi/2$. С учётом того, что выражение для E_y аналогично выражению для E_x (с заменой x на y), мы имеем для $|E_\perp|^2$ значение, постоянное во времени и пространстве. Это снимает отмеченное выше противоречие и приводит к тому, что фотон должен иметь момент импульса $M \sim |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}|$, который с учётом того, что $|\boldsymbol{r}| \sim \lambda$, а $|\boldsymbol{p}| = \hbar\omega/c$, оказывается равен $\hbar$ (см. [10]).

Тут следует сделать одно существенное замечание. Полная энергия механического осциллятора равна сумме кинетической и потенциальной и в стационарном случае постоянна. В процессе колебаний кинетическая и потенциальная энергии переходят друг в друга. Для «радиационного осциллятора» только в случае циркулярной поляризации волны полная энергия является постоянной величиной, и это означает, что сумма энергий колебаний вдоль осей x и y является интегралом движения, аналогичным упомянутому выше случаю гармонического осциллятора. Это положение, по существу, раскрывает конкретно утверждение об аналогии между «радиационным осциллятором» и механическим. Что также означает, что фотон должен иметь циркулярную поляризацию и обладать моментом количества движения, равным $\hbar$.

В заключение следует подчеркнуть, что переход от классического описания электромагнитного поля (уравнений Максвелла) к квантовому представлению тесно связан с понятием когерентности, как это было уже отмечено ранее Я.Б.Зельдовичем при введении выражения для числа квантов поля. При этом область пространства, где присутствует электромагнитная волна, как бы распадается на «домены», число которых соответствует числу фотонов, т.е. поле в одном «домене» эквивалентно полю одного фотона, а линейный размер этого «домена» равен длине волны.

Авторы выражают благодарность А.В.Виноградову и И.Г.Зубареву за плодотворные и стимулирующие дискуссии.

1. *Эйнштейновский сборник 1977*. Сост. У.И.Франкфурт (М.: «Наука», 1980, с. 41).
2. Planck M. *Verh. Deutsch. Phys. Ges*., **2**, 202, 237 (1900); Планк М. *Теория теплового излучения* (М.: ОНТИ, 1935); Планк М. *Избранные труды* (М.: Наука, 1975).
3. Einstein A. *Ann. Phys*., **17**, 132 (1905); **20**, 199 (1906); *Phys. Zeits*., **10**, 185, 817 (1909); Эйнштейн А. *Собрание научных трудов. Том III. Работы по кинетической теории, теории излучения и основам квантовой механики 1901–1955 гг*. (М.: Наука, 1965–1967).
4. Гринштейн Дж., Зайонц А. *Квантовый вызов. Современные исследования оснований квантовой механики* (Долгопрудный: ИД Интеллект, 2008).
5. Клышко Д.Н. *УФН*, **164**, 1187 (1994) [*Phys. Usp*., **37**, 1097 (1994)].
6. Weinberg St. *Sci. Am*., **281** (6), 68 (1999); Вайнберг С. *В защиту науки* (М.: Наука, 2012, № 11, с. 71).
7. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1981).
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963); Heisenberg W. *Zs. Phys.*, **33**, 879 (1925); Born M., Jordan P. *Zs. Phys.*, **34**, 858 (1925).
9. Зельдович Я.Б. *ДАН СССР*, **163** (6), 1359 (1965); Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (М.: Физматлит, 2008).
10. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. *Физическая оптика* (М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004).