

Решетки населенностей, создаваемые в квантовой системе с помощью пары субцикловых импульсов

Р.М.Архипов, М.В.Архипов, А.В.Пахомов, Н.Н.Розанов

На основании приближенного решения уравнения Шрёдингера изучена возможность наведения светоиндуцированных гармонических решеток населенностей в квантовой системе с помощью пары полуцикловых импульсов. Рассмотрен случай, когда длительность импульсов меньше периодов резонансных переходов в системе и импульсы не перекрываются в среде. Глубина модуляции решеток определяется электрической площадью импульса.

Ключевые слова: светоиндуцированные решетки, аттосекундные импульсы, субцикловые импульсы, сверхбыстрая оптика.

1. Введение

В настоящее время экспериментально получены электромагнитные предельно короткие импульсы (ПКИ) субциклового длительности в аттосекундном диапазоне (1 ас равна 10^{-18} с) [1–6]. Такие импульсы активно используются для контроля динамики волновых пакетов в различных веществах на временах порядка периода колебаний световой волны [2–4]. Совсем недавно стали доступны аттосекундные импульсы полуциклового формы в оптическом диапазоне [4–6]. Получаемые экспериментально полуцикловые импульсы обычно содержат «всплеск» электромагнитного поля (полуволну) одной полярности и длинный затухающий хвост противоположной полярности малой амплитуды [4–6]. Они могут обладать близкой к единице «степенью униполярности», определяемой как [7–9]

$$\xi = \frac{\left| \int E dt \right|}{\int |E| dt} \quad (1)$$

Числитель (1) – это электрическая площадь импульса, определяемая соотношением [10]

Р.М.Архипов. Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034 С.-Петербург, Университетская набережная, 7–9; Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе, Россия, 194021 С.-Петербург, ул. Политехническая, 26; e-mail: arkhipovrostislav@gmail.com

М.В.Архипов. Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034 С.-Петербург, Университетская набережная, 7–9; Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; e-mail: arkhipm@mail.wplus.net

А.В.Пахомов. Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; e-mail: antpakhom@gmail.com

Н.Н.Розанов. Университет ИТМО, Россия, 197101 С.-Петербург, Кронверкский просп., 49; Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе, Россия, 194021 С.-Петербург, ул. Политехническая, 26; АО «ГОИ им. С.И.Вавилова», Россия, 199053 С.-Петербург, Кадетская линия, 5/2; e-mail: nngosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 25 марта 2019 г., после доработки – 17 июля 2019 г.

$$S_E = \int_{t=-\infty}^{+\infty} E(t) dt.$$

Она является важной характеристикой в задачах взаимодействия полуцикловых ПКИ с резонансными средами. Площадь импульса сохраняется при распространении импульса в макроскопических средах с диссипацией в одномерном случае [10, 11] и существенно определяет взаимодействие сверхмощных ПКИ с квантовыми системами (см. [8, 9, 12–16]). Интерес к квазиуниполярным импульсам связан с возможностью однонаправленного воздействия на заряженные частицы, что может быть использовано для эффективного контроля динамики волновых пакетов в веществе и ускорения заряженных частиц (см., напр., обзоры [7–9], а также работы [11–15]). Различные методы генерации квазиуниполярных полуцикловых импульсов описаны в [7–9, 11] и цитируемой там литературе.

Длительность аттосекундных импульсов может быть существенно меньше времен релаксации поляризации T_2 и инверсии в резонансной среде T_1 , что определяет возможность когерентного взаимодействия импульсов с веществом [17], при котором возможны осцилляции Раби – быстрое изменение атомной инверсии на временах порядка периода колебаний световой волны [18, 19]. Данное обстоятельство свидетельствует о возможности сверхбыстрого управления состоянием среды и ставит вопрос о создании решеток инверсии в резонансной среде с помощью последовательности субцикловых импульсов.

На сегодняшний день монохроматическое лазерное излучение используется для создания электромагнитно-индуцированных решеток в средах за счет интерференции двух и более пучков света, перекрывающихся в среде [20–22]. Периодическое распределение освещенности в области перекрытия пучков приводит к изменению населенностей атомных уровней среды, и в среде возникает решетка населенностей. Дифракция пробного излучения на электромагнитно-индуцированных решетках находит многочисленные применения в оптике и спектроскопии (см., напр., [20–22]).

Однако при интерференции ПКИ длительностью порядка периода колебаний световой волны область их пе-

рекрытия будет крайне мала, что не позволит создать в резонансной среде даже несколько интерференционных полос. Тем не менее, если взаимодействие коротких импульсов со средой когерентное, в среде возможно создание светоиндуцированных решеток населеностей, когда импульсы в ней не встречаются [23–29]. Данное обстоятельство было обнаружено уже в первых экспериментах по фотонному эху в работах [23, 24], в которых использовались длинные (в наносекундном диапазоне) импульсы (см. также обзор [25] и приведенные там ссылки). Создание решеток с помощью последовательности импульсов, не перекрывающихся в среде, связано со взаимодействием падающих импульсов с бегущими волнами макроскопической поляризации среды [23–29]. Действительно, если в среду направить короткий импульс (с длительностью $\tau_p < T_2$), то в ней возникает бегущая волна поляризации, которая остается в среде после ухода импульса и существует в течение времени T_2 . Если в промежуток времени меньше T_2 в среду войдет второй ПКИ, то в результате его взаимодействия с этой волной поляризации в среде может возникнуть гармоническая решетка разности населеностей. С помощью дифракции пробного излучения на таких решетках удалось измерить время релаксации поляризации среды T_2 [24, 25]. Однако данный метод создания решеток с использованием не перекрывающихся в среде коротких импульсов так и не нашел широкого применения в оптике.

Недавно, в связи с интересом к получению аттосекундных и квазиуниполярных импульсов, в работах [26–29] теоретически изучена возможность наведения и сверхбыстрого управления решетками разности населеностей при возбуждении резонансной среды с помощью последовательности аттосекундных импульсов (как биполярных [26, 27], так и униполярных [28, 29]), не перекрывающихся в среде. Была показана не только возможность наведения, но и стирания, а также мультиплицирования пространственной частоты решеток. Данное обстоятельство открывает новые перспективы в сверхбыстрой оптике аттосекундных импульсов, т.к. оно позволяет изменять состояние среды на аттосекундных временных масштабах. Во всех предыдущих исследованиях теоретический анализ велся на основе численного и аналитического решения системы уравнений Максвелла–Блоха, а резонансная среда описывалась в двухуровневом приближении. Вопрос о создании решеток в многоуровневых средах детально не рассматривался.

В случае же субцикловых аттосекундных импульсов длительность импульса может быть меньше периодов резонансных переходов в атоме. В этой ситуации использование двухуровневого или малоуровневого приближения является недостаточным для корректного описания взаимодействия ПКИ с атомной системой. В связи с этим возникает вопрос о возможности наведения решеток разности населеностей с помощью субцикловых импульсов в реальных средах с большим числом энергетических уровней. В этом случае одно из лучших описаний взаимодействия ПКИ с атомной системой дает решение уравнения Шрёдингера, описывающего поведение волновой функции атома.

Целью настоящей статьи является анализ возможности сверхбыстрого управления состоянием среды с помощью пары субцикловых униполярных импульсов в многоуровневой среде. Длительность импульса предполагается меньшей обратных частот атомных переходов. Пока-

зана возможность наведения светоиндуцированных гармонических решеток разности населеностей в среде с помощью пары таких импульсов.

2. Теоретическое рассмотрение

Рассмотрим резонансную среду длиной L , размещенную вдоль оси z (рис.1). Концентрацию частиц будет считать малой, чтобы изменением формы падающих импульсов при распространении можно было пренебречь. Пусть импульс 1 входит в среду в начальный момент времени в точке $z = 0$ и распространяется в среде слева направо. Предположим, что, как только он покидает среду, в нее входит импульс 2 и распространяется в ней справа налево. Очевидно, что при такой постановке задачи импульсы не встречаются в среде. Импульс 1, покинув среду, оставляет после себя осцилляции макроскопической поляризации среды, существующей в течение времени T_2 [26–29]. Предположим, что импульс 2 входит в среду спустя промежуток времени, много меньший T_2 . Результат его взаимодействия с данной волной поляризации будет зависеть от фазы колебаний поляризации среды в каждой точке пространства и от момента прихода импульса в заданную точку пространства. Действительно, в зависимости от задержки между импульсами импульс 2 может либо остановить колебания поляризации среды в данной точке пространства, либо наоборот, раскачать их. Поэтому в случае среды с малой концентрацией частиц (рис.1), когда изменением формы импульсов при распространении можно пренебречь, задача о воздействии пары ПКИ на протяженную среду может быть сведена к задаче об отклике единичного атома на пару ПКИ, действующих с некоторой задержкой Δ относительно друг друга. Нас интересует возможность сверхбыстрого управления состоянием среды и возможность создания решеток с помощью очень коротких импульсов субциклового длительности. Предположим, что длительность импульсов меньше обратных частот переходов в системе. В данном случае действие импульса на систему приближенно может быть сведено к действию дельтаобразного импульса, поэтому для простоты расчетов рассмотрим сначала отклик среды на пару импульсов дельтаобразной формы:

$$E(t) = S_{E1}\delta(t) + S_{E2}\delta(t - \Delta), \quad (2)$$

где S_{E1}, S_{E2} – электрические площади импульсов 1 и 2; Δ – задержка между импульсами. Ниже результат вычислений обобщен на случай импульса конечной аттосекундной длительности.

Взаимодействие ПКИ с квантовой системой описывается с помощью временного уравнения Шрёдингера для волновой функции ψ [30]:

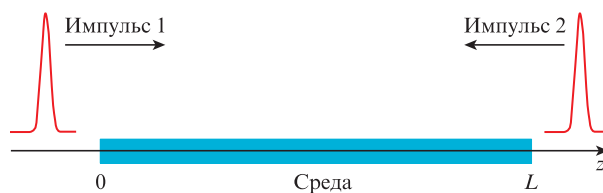


Рис.1. Резонансная среда и пара субцикловых импульсов, распространяющихся навстречу друг другу с некоторой задержкой, но не встречающихся в среде.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + V(t))\psi. \quad (3)$$

Здесь \hbar – приведенная постоянная Планка; \hat{H}_0 – собственный гамильтониан системы; $V(t) = -dE(t)$ – потенциал ее взаимодействия с импульсом излучения, которое в случае не очень сильного поля можно рассматривать как слабое возмущение; d – дипольный момент атома. Ограничимся случаем излучения с фиксированной линейной поляризацией в ситуации, когда дипольный момент ориентирован вдоль падающего поля. Предположим, что возмущение действует в течение конечного, очень короткого промежутка времени, сравнимого с периодом резонансных переходов в атоме или меньшего. Пусть перед началом действия импульса система находилась в основном состоянии ψ_0 . Под действием возмущения система может перейти из основного состояния в любое другое возбужденное состояние. Будем считать падающее поле слабым. В этом случае можно использовать стандартную теорию возмущений для решения волнового уравнения (3) [30]. Вероятность перехода системы из основного состояния дискретного спектра в k -е состояние может быть найдена в первом порядке теории возмущений [30]:

$$w_{0k} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int V_{0k} \exp(i\omega_{0k} t) dt \right|^2. \quad (4)$$

Здесь $V_{0k} = -d_{0k}E(t)$ – матричный элемент оператора возмущения; d_{0k} и ω_{0k} – дипольный момент и частота резонансного перехода.

Предположим далее, что импульсы имеют равную площадь: $S_{E1} = S_{E2} = S_E$. Используя (2) и (4) и проводя интегрирование, нетрудно получить выражение для вероятности перехода под действием двух ПКИ:

$$w_{0k} = 2 \frac{d_{0k}^2 S_E^2}{\hbar^2} (1 + \cos \omega_{0k} \Delta). \quad (5)$$

Из формулы (5) видна периодическая зависимость вероятности перехода (населенности k -го возбужденного состояния) от задержки между импульсами Δ . Формула (5) явно иллюстрирует возможность сверхбыстрого управления состоянием среды с помощью полцикловых импульсов, регулируя задержку между ними. Видно, что результат воздействия импульсов на среду определяется электрической площадью импульса. Последнее обстоятельство еще раз указывает на возможность эффективного воздействия униполярных импульсов на квантовую систему (в отличие от биполярных, обладающих нулевой электрической площадью). Отметим, что возможность эффективного воздействия единичного квазиуниполярного ПКИ (с длительностью, меньшей обратных частот переходов в системе) большой амплитуды на простейшие квантовые объекты изучалась также с использованием приближения внезапных возмущений в [13, 14].

Обратимся теперь к вопросу создания решеток инверсии с помощью пары субцикловых импульсов. Поскольку в случае протяженной среды для ситуации, изображенной на рис.1, задержка $\Delta(z) \sim z/c$ определяет разность между моментами времени прихода импульсов 1 и 2 в точку среды с координатой z , то можно считать, что формула (5) описывает гармоническую решетку разности населенностей (инверсии), созданную с помощью пары ПКИ в протяженной среде. Глубина модуляции решетки про-

порциональна электрической площади импульса и дипольному моменту соответствующего резонансного перехода. Данный вывод был сделан на основе решения уравнения Шрёдингера, поэтому полученный результат показывает возможность создания решеток в многоуровневых средах и обобщает проведенные ранние исследования в двухуровневом приближении.

3. Наведение светоиндуцированных решеток с помощью пары аттосекундных импульсов

Выше для простоты расчетов форма падающих импульсов ввиду их малой длительности предполагалась дельтаобразной. Однако похожий результат можно получить и для импульсов произвольной формы. Для дальнейшей иллюстрации предложенной идеи рассмотрим воздействие на среду пары импульсов конечной аттосекундной длительности. Для наглядности возьмем падающие импульсы прямоугольной формы с амплитудой E_0 , длительностью τ_p и задержкой между ними Δ . Некоторые методы получения квазиуниполярных импульсов прямоугольной и треугольной формы описаны в работах [31–35] и обзорах [7–9]. Используя формулу (4), нетрудно получить выражение для вероятности перехода:

$$w_{0k} = 4 \frac{d_{0k}^2 E_0^2}{\hbar^2 \omega_{0k}^2} (1 - \cos \omega_{0k} \tau_p) \{1 + \cos [\omega_{0k} (\Delta + \tau_p)]\}. \quad (6)$$

Данное выражение показывает, что глубина модуляции решетки зависит от соотношения квадратов частоты Раби падающих импульсов $\Omega_R^2 = d_{0k}^2 E_0^2 / \hbar^2$ и частоты рассматриваемого резонансного перехода ω_{0k}^2 . Отметим, что при $\tau_p \rightarrow 0$, применив формулу Тейлора к косинусу в первых скобках, получим $1 - \cos \omega_{0k} \tau_p \approx \omega_{0k}^2 \tau_p^2 / 2$. При использовании выражения для площади прямоугольного импульса $S_E = E_0 \tau_p$ формула (6) переходит в формулу (5).

Приведем численные оценки. Пусть среда возбуждается импульсами с $\tau_p = 500$ ас прямоугольной формы. Возьмем частоту перехода $\omega_{0k} = 2.4 \times 10^{15}$ рад/с, что соответствует резонансному переходу D_1 в парах рубидия Rb^{87} с длиной волны 794.767 нм ($5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$). Дипольный момент перехода $d_{0k} = 7.6$ Д [36]. На рис.2 иллюстрируется зависимость вероятности перехода от задержки

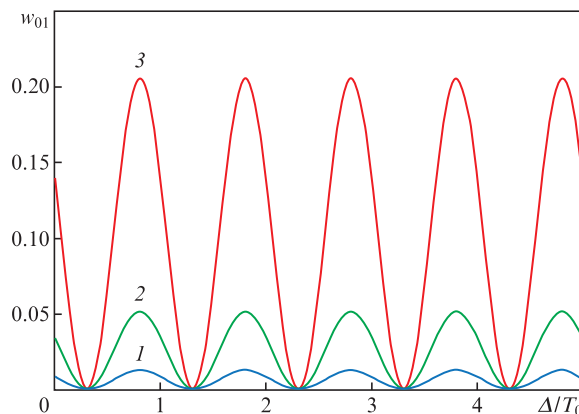


Рис.2. Зависимости вероятности перехода w_{01} от задержки между импульсами Δ для амплитуд поля $E_0 = 0.5 \times 10^7$ (1), 10^7 (2) и 2×10^7 В/см (3); $\tau_p = 500$ ас, $\omega_{0k} = 2.4 \times 10^{15}$ рад/с, $d_{0k} = 7.6$ Д, $T_0 = 2\pi/\omega_{0k} = 2.65$ фс – период резонансного перехода.

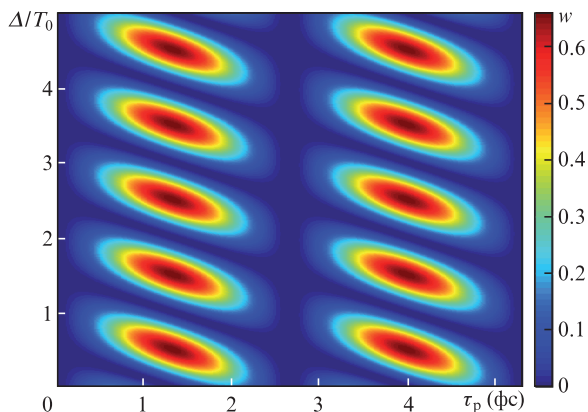


Рис.3. Зависимости вероятности перехода w от длительности τ_p и задержки между импульсами Δ при $E_0 = 2 \times 10^7$ В/см, $T_0 = 2.65$ фс, $d_{0k} = 7.6$ Д. Цветной вариант рис.3 помещен на сайте нашего журнала <http://www.quantum-electron.ru>.

между импульсами, построенная по формуле (6) для трех значений амплитуд падающего поля E_0 . Амплитуды и длительности импульсов сравнимы с экспериментальными результатами работы [4]. Видно, что при $E_0 = 10^7$ В/см вероятность перехода составляет ~ 0.05 .

Из формулы (6) также следует, что глубина модуляции решетки периодически зависит от длительности импульса τ_p . Это наводит на мысль о том, что в многоуровневой среде вклад тех или иных переходов в формирование решеток может быть либо значительным, либо малым (в зависимости от соотношения между длительностью импульса и частотой перехода). Это иллюстрирует рис.3, на котором приведена зависимость вероятности перехода от задержки между импульсами и длительности импульсов. Видна периодическая зависимость глубины модуляции от длительности импульса. Для получения большой глубины модуляции на заданном резонансном переходе рубидия необходимо использовать импульсы длительностью ~ 1 фс. Таким образом, в многоуровневой среде вклад различных резонансных переходов определяется соотношением между длительностью импульса и частотой рассматриваемого перехода.

В заключение отметим, что формула (6) была получена в соответствии с теорией возмущений в случае слабых полей и, следовательно, справедлива при условии, что вероятность переходов $w \ll 1$. Данное условие в общем случае выполняется, когда частота Раби импульса много меньше частоты перехода среды ($\Omega_R \ll \omega_0$), но также остается справедливым и для большой частоты Раби, если длительность импульса достаточно мала ($\omega_0 \tau_p \ll 1$).

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе на основе приближенного решения уравнения Шрёдингера показана возможность сверхбыстрого управления параметрами многоуровневой резонансной среды с помощью пары субцикловых униполярных импульсов. В случае, когда длительность импульса меньше обратных частот переходов в атоме, результат воздействия определяется электрической площадью импульса, что еще раз указывает на перспективность использования квазиуниполярных импульсов для эффективного контроля динамики волновых пакетов в веществе.

Показано, что, как и в двухуровневой среде, возможно создание светоиндуцированных гармонических решеток населенностей, когда импульсы не перекрываются в среде. Глубина модуляции решетки зависит от соотношения частоты Раби импульсов, частоты рассматриваемого перехода и длительности импульса. Ранее возможность наведения решеток с помощью ПКИ изучалась, когда резонансная среда рассматривалась в двухуровневом приближении, которое может быть неприменимо в случае аттосекундных импульсов субциклового длительности. Полученный выше результат обобщает известные ранее результаты в двухуровневой среде на случай многоуровневых систем.

Теоретически изучена возможность наведения решеток с помощью пары аттосекундных импульсов в парах рубидия, что показывает возможность эффективного управления состоянием квантовых систем с помощью последовательности таких импульсов. Дифракция пробного излучения на таких светоиндуцированных решетках может быть использована для измерения времени релаксации поляризации T_2 различных сред, создания сверхбыстрых переключателей и дефлекторов лазерного излучения [23–29].

Для экспериментального наблюдения явления необходимо использовать среды с большими временами релаксации T_2 . К ним относятся, например, газы, атомные пары, а также квантовые точки при низких температурах [37].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-72-00012).

1. Krausz F., Ivanov M. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 163 (2009).
2. Calegari F. et al. *J. Phys. B: Atom., Molec. Opt. Phys.*, **49**, 062001 (2016).
3. Ramasesha K., Leone S.R., Neumark D.M. *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **67**, 41 (2016).
4. Hassan M.T., Luu T.T., Moulet A., Raskazovskaya O., et al. *Nature*, **530**, 66 (2016).
5. Wu H.-C., Meyer-ter-Vehn J. *Nature Photon.*, **6**, 304 (2012).
6. Xu J., Shen B., Zhang X., et al. *Sci. Rep.*, **8**, 2669 (2018).
7. Архипов Р.М., Пахомов А.В., Архипов М.В., Бабушкин И., Толмачев Ю.А., Розанов Н.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **105** (6), 388 (2017) [*JETP Lett.*, **105** (6), 408 (2017)].
8. Розанов Н.Н., Архипов М.В., Архипов Р.М., Веретенков Н.А., Пахомов А.В., Федоров С.В. *Оптика и спектроскопия*, **127** (1), 82 (2019) [*Opt. Spectrosc.*, **127** (1), 77 (2019)].
9. Архипов Р.М., Архипов М.В., Шимко А.А., Пахомов А.В., Розанов Н.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **110** (1), 9 (2019) [*JETP Lett.*, **110** (1), 15 (2019)].
10. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **107** (5), 761 (2009) [*Opt. Spectrosc.*, **107** (5), 721 (2009)].
11. Розанов Н.Н., Архипов Р.М., Архипов М.В. *УФН*, **188** (12), 1347 (2018) [*Phys. Usp.*, **61** (12), 1227 (2018)].
12. Dimitrovski D., Solov'ev E.A., Briggs J.S. *Phys. Rev. A*, **72**, 043411 (2005).
13. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **124** (1), 75 (2018) [*Opt. Spectrosc.*, **124** (1), 72 (2018)].
14. Arkhipov R.M., Pakhomov A.V., Arkhipov M.V., Babushkin I., Demircan A., Morgner U., Rosanov N.N. *Opt. Lett.*, **44** (5), 1202 (2019).
15. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **125** (6), 818 (2018) [*Opt. Spectrosc.*, **125** (6), 1012 (2018)].
16. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **126** (2), 211 (2019) [*Opt. Spectrosc.*, **126** (2), 140 (2019)].
17. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
18. Hughes S. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3363 (1998).
19. Mücke O.D., Tritschler T., Wegener M., Morgner U., Kärtner F.X. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 057401 (2001).
20. Eichler H.J., Günter E., Pohl D.W. *Laser-Induced Dynamic Gratings* (Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag, 1981).

21. Mitsunaga M., Imoto N. *Phys. Rev. A*, **59**, 4773 (1999).
22. Scholes G.D., Kim J., Wong C.Y. *Phys. Rev. B*, **73**, 195325 (2006).
23. Abella I.D., Kurnit N.A., Hartmann S.R. *Phys. Rev.*, **141**, 391 (1966).
24. Штырков Е.И., Лобков В.С., Ярмухаметов Н.Г. *Письма в ЖЭТФ*, **27** (12), 685 (1978) [*JETP Lett.*, **27** (12), 648 (1978)].
25. Штырков Е.И. *Оптика и спектроскопия*, **114** (1), 105 (2013) [*Opt. Spectrosc.*, **114** (1), 96 (2013)].
26. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Babushkin I.V., Demircan A., Morgner U., Rosanov N.N. *Opt. Lett.*, **41**, 4983 (2016).
27. Arkhipov R.M., Pakhomov A.V., Arkhipov M.V., Babushkin I., Demircan A., Morgner U., Rosanov N.N. *Sci. Rep.*, **7** (1), 12467 (2017).
28. Архипов Р.М., Архипов М.В., Пахомов А.В., Бабушкин И., Розанов Н.Н. *Квантовая электроника*, **47** (7), 589 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (7), 589 (2017)].
29. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Pakhomov A.V., Babushkin I., Rosanov N.N. *Las. Phys. Lett.*, **14** (9), 1 (2017).
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989).
31. Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Belov P.A., Tolmachev Yu.A., Babushkin I. *Las. Phys. Lett.*, **13**, 046001 (2016).
32. Arkhipov R.M., Pakhomov A.V., Babushkin I.V., Arkhipov M.V., Tolmachev Yu.A., Rosanov N.N. *J. Opt. Soc. Am. B*, **33**, 2518 (2016).
33. Pakhomov A.V., Arkhipov R.M., Babushkin I.V., Arkhipov M.V., Tolmachev Yu.A., Rosanov N.N. *Phys. Rev. A*, **95**, 013804 (2017).
34. Pakhomov A.V., Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Demircan A., Morgner U., Rosanov N.N. *Sci. Rep.*, **9** (1), 7444 (2019).
35. Sazonov S.V., Ustinov N.V. *Phys. Rev. A*, **98**, 063803 (2018).
36. D.A. Steck, <http://steck.us/alkalidata> (revision 2.1.1) (2009).
37. Bayer M., Forchel A. *Phys. Rev. B*, **65**, 041308 (2002).