

## НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

# Нормальные моды строго резонансного и квазирезонансного режимов электромагнитно-индуцированной прозрачности

О.М.Паршков

*Приведены результаты теоретического изучения процесса эволюции пробного импульса при электромагнитно-индуцированной прозрачности в  $\Lambda$ -схеме вырожденных неоднородно уширенных квантовых переходов. Предполагается, что взаимодействующие поля эллиптически поляризованы, а их воздействие на среду может быть как строго резонансным, так и квазирезонансным. Показано, что в среде пробное излучение можно представить в виде суммы двух нормальных мод – квазимонохроматических эллиптически поляризованных полей, распространяющихся независимо друг от друга. Большая ось эллипса поляризации нормальной моды первого типа параллельна, а второго типа – перпендикулярна большой оси эллипса поляризации управляющего излучения. Ввиду того что скорости импульсов нормальных мод различны, входящий в среду одиночный импульс пробного излучения распадается внутри среды на отдельные импульсы, каждый из которых переносит энергию одной из нормальных мод. В случае квазирезонанса процесс распада происходит на меньшем расстоянии, чем в случае строгого резонанса. Если нормальные моды не модулированы по фазе на входной поверхности среды, то в случае квазирезонанса моды приобретают фазовую модуляцию при распространении внутри среды, тогда как в случае строгого резонанса этого не происходит. Показано, что в случае квазирезонанса величина фазовой модуляции моды второго из упомянутых выше типов значительно превышает амплитуду фазовой модуляции моды первого типа. Прозрачность среды для нормальной моды первого типа незначительно уменьшается при переходе от случая строгого резонанса к случаю квазирезонанса, тогда как прозрачность среды для моды второго типа при этом уменьшается значительно. Полное пробное поле, являющееся суммой нормальных мод, до распада его на импульсы мод в случаях как строгого резонанса, так и квазирезонанса обладает фазовой модуляцией, даже если оно не имело её на входной поверхности.*

**Ключевые слова:** электромагнитно-индуцированная прозрачность, квазирезонанс, фазовая модуляция, нормальные моды.

## 1. Введение

Деструктивная интерференция амплитуд вероятностей заселения энергетических уровней квантовых переходов в некоторых режимах двойного резонанса [1] лежит в основе ряда широко изучаемых эффектов. Среди них большое значение имеют стимулированный рамановский адиабатический перенос [2] и электромагнитно-индуцированная прозрачность (ЭМИП) [3–5]. В частности, использование явления ЭМИП перспективно для создания систем оптической квантовой памяти [4], систем квантовых коммуникаций [4, 6, 7] и квантовой информации [3–5], устройств для точных магнитных измерений [8] и хронометрии [9]. Тот же эффект лежит в основе методов формирования больших оптических нелинейностей [5, 10] и усиления излучения без инверсии населённостей [11]. Продолжается изучение специфики ЭМИП в различных новых ситуациях. Так, например, исследуются особенности этого явления в сильно коррелированных квантовых газах [12], в радиодиапазоне [13], на примесях в фотонных кристаллах [14], в присутствии нановолокна [15].

Явление ЭМИП приводит к ряду эффектов, связанных с поляризационными характеристиками взаимодей-

ствующих излучений при наличии вырождения энергетических уровней квантовых переходов. В [16, 17] теоретически и экспериментально исследовалось сопровождающее ЭМИП вращение плоскости поляризации пробного поля при изменении напряжённости поля управляющего излучения, а в [18, 19] – влияние постоянного магнитного поля на эволюцию круговых компонент пробного излучения. Линейное и круговое двойное лучепреломление пробного поля при ЭМИП изучалось теоретически и экспериментально в [20]. В теоретической работе [21] предсказана возможность распространения пробного поля ЭМИП в виде двух мод с различными состояниями поляризации.

В [22] приведены результаты теоретического изучения двойного лучепреломления, сопровождающего ЭМИП при эллиптической поляризации пробного и управляющего излучений на входе в резонансную среду. Исследования в этой работе были ограничены условиями строгого резонанса, т.е. совпадением несущих частот пробного и управляющего полей с центральными частотами соответствующих неоднородно уширенных квантовых переходов. Объектом изучения в работе [22] являлась  $\Lambda$ -схема квантовых переходов между вырожденными энергетическими уровнями  $^3P_0$ ,  $^3P_2$ ,  $^3P_1^0$  изотопа  $^{208}\text{Pb}$ . В парах этого изотопа экспериментально наблюдалась ЭМИП поляризованных по кругу лазерных полей [23, 24]. Аналитическими методами в [22] было показано, что пробный импульс в среде может быть представлен как сумма эллиптически поляризованных нормальных мод, распространяющихся независимо друг от друга.

О.М.Паршков. Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77; e-mail: oparshkov@mail.ru

Ниже приводятся результаты аналитического и численного изучения ЭМИП на тех же квантовых переходах и при тех же характеристиках взаимодействующих полей, что и в работе [22], но в случае квазирезонанса. Под квазирезонансом понимается ситуация, когда несущие частоты полей отстроены от центральных частот соответствующих квантовых переходов на величины, сопоставимые с ширинами линий неоднородного уширения этих переходов. Приводятся также новые результаты, относящиеся к строгому резонансному режиму ЭМИП.

## 2. Исходные уравнения

Рассматриваемая  $\Lambda$ -схема показана на рис.1. Уровни 1, 2, 3 отождествляются с невырожденным нижним ( ${}^3P_0$ ), трёхкратно вырожденным верхним ( ${}^3P_1^0$ ) и пятикратно вырожденным средним ( ${}^3P_2$ ) уровнями изотопа  ${}^{208}\text{Pb}$  соответственно. Пусть  $\phi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 9$ ) – ортонормированный базис общих собственных функций операторов энергии, квадрата момента импульса и его проекции на ось  $z$  для изолированного атома, отвечающих уровню 1 ( $k = 1, M = 0$ ), уровню 2 ( $k = 2, 3, 4, M = -1, 0, 1$ ) и уровню 3 ( $k = 5, 6, \dots, 9, M = -2, -1, 0, 1, 2$ ). Буквами  $D_1$  и  $D_2$  обозначим приведённые электродипольные моменты переходов  $1 \rightarrow 2$  и  $3 \rightarrow 2$  соответственно, а буквами  $\omega_{210}$  и  $\omega_{230}$  ( $\omega_{210} > \omega_{230}$ ) – центральные частоты этих переходов. Для учёта теплового движения атомов газа введём величину  $T_1 = 1/\Delta_1$ , где  $\Delta_1$  – полуширина (по уровню  $e^{-1}$  высоты) плотности распределения частот  $\omega_{21}$  квантовых переходов между уровнями 1 и 2 вследствие эффекта Доплера.

Зададим полное электрическое поле двух лазерных импульсов, распространяющихся вдоль оси  $z$ , в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{E}_l &= \mu_l [\mathbf{e}_x \tilde{E}_{xl} \cos(\omega_l t - k_l z + \tilde{\delta}_{xl}) + \\ &+ \mathbf{e}_y \tilde{E}_{yl} \cos(\omega_l t - k_l z + \tilde{\delta}_{yl})], \quad l = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E_l$  и  $\omega_l$  – напряжённости и несущие частоты пробного ( $l = 1$ ) и управляющего ( $l = 2$ ) электрических полей;  $\mu_l = \hbar\sqrt{2l+1}/(|D_l| T_l)$ ;  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  – орты осей  $x$  и  $y$ ;  $\tilde{E}_{xl}$ ,  $\tilde{E}_{yl}$  – амплитуды, а  $\tilde{\delta}_{xl}$ ,  $\tilde{\delta}_{yl}$  – фазовые добавки  $x$ - и  $y$ -компонент пробного и управляющего полей;  $k_l = \omega_l/c$ . Величины  $\tilde{E}_{xl}$ ,  $\tilde{E}_{yl}$ ,  $\tilde{\delta}_{xl}$ ,  $\tilde{\delta}_{yl}$  являются действительными, дифференцируемыми нужное число раз функциями переменных  $s$  и  $w$ . Предполагается квазирезонансность воздействия излучений на среду:  $|\omega_{210} - \omega_1| \ll \omega_{210}$  и  $|\omega_{230} - \omega_2| \ll \omega_{230}$ .

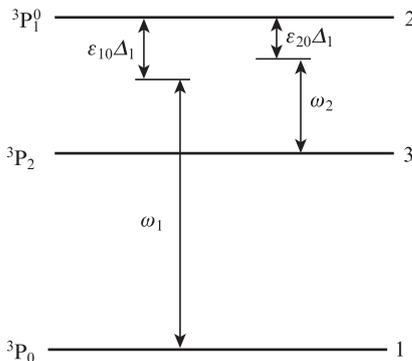


Рис.1.  $\Lambda$ -схема квантовых переходов. Частотные интервалы между уровнями энергии соответствуют покоящемуся атому и случаю  $\epsilon_{10} > 0$ ,  $\epsilon_{20} > 0$ .

Пусть  $f_l$  и  $g_l$  – амплитуды левой и правой круговых компонент [25] пробного и управляющего полей:

$$\begin{aligned} f_l &= \frac{\tilde{E}_{xl} \exp(i\tilde{\delta}_{xl}) - i\tilde{E}_{yl} \exp(i\tilde{\delta}_{yl})}{\sqrt{2}}, \\ g_l &= \frac{\tilde{E}_{xl} \exp(i\tilde{\delta}_{xl}) + i\tilde{E}_{yl} \exp(i\tilde{\delta}_{yl})}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Волновую функцию  $\Psi$  атома в поле (1) представим в виде разложения по базису  $\phi_k$ :

$$\Psi = \bar{c}_1 \phi_1 + \left( \sum_{k=2}^4 \bar{c}_k \phi_k \right) \exp(-i\xi_1) + \left( \sum_{k=5}^9 \bar{c}_k \phi_k \right) \exp[i(\xi_1 - \xi_2)],$$

где  $\bar{c}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 9$ ) – амплитуды вероятности заселения квантовых состояний, а  $\xi_l = \omega_l t - k_l z$ . Определим нормированные независимые переменные  $s$  и  $w$ :

$$s = z/z_0, \quad w = (t - z/c)/T_1,$$

где  $z_0 = 3\hbar c/(2\pi N |D_1|^2 T_1 \omega_{210})$ ;  $N$  – концентрация атомов. Используя уравнения Максвелла и уравнение Шрёдингера, а также вводя обозначения

$$\begin{aligned} c_1 &= p_1^* \bar{c}_1, \quad c_2 = \bar{c}_2, \quad c_4 = \bar{c}_4, \quad c_5 = p_2 \bar{c}_5, \\ c_7 &= (1/\sqrt{6}) p_2 \bar{c}_7, \quad c_9 = p_2 \bar{c}_9, \quad p_l = 2D_l / |D_l|, \end{aligned}$$

получаем в первом приближении метода медленных огибающих следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial s} &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_1 c_2^* \exp[-(\epsilon_1 - \epsilon_{10})^2] d\epsilon_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} &= -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \xi \int_{-\infty}^{+\infty} (c_4^* c_9 + c_2^* c_7) \exp[-(\epsilon_1 - \epsilon_{10})^2] d\epsilon_1, \\ \frac{\partial g_1}{\partial s} &= -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_1 c_4^* \exp[-(\epsilon_1 - \epsilon_{10})^2] d\epsilon_1, \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \xi \int_{-\infty}^{+\infty} (c_2^* c_5 + c_4^* c_7) \exp[-(\epsilon_1 - \epsilon_{10})^2] d\epsilon_1, \\ \frac{\partial c_1}{\partial w} &= -i(f_1 c_2 - g_1 c_4), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial w} + i\epsilon_1 c_2 = -\frac{i}{4} (f_1^* c_1 + g_2^* c_5 - f_2^* c_7) - \gamma c_2,$$

$$\frac{\partial c_4}{\partial w} + i\epsilon_1 c_4 = \frac{i}{4} (g_1^* c_1 - g_2^* c_7 + f_2^* c_9) - \gamma c_4,$$

$$\frac{\partial c_5}{\partial w} + i(\epsilon_1 - \epsilon_2) c_5 = -ig_2 c_2,$$

$$\frac{\partial c_7}{\partial w} + i(\epsilon_1 - \epsilon_2) c_7 = \frac{i}{6} (f_2 c_2 - g_2 c_4),$$

$$\frac{\partial c_9}{\partial w} + i(\epsilon_1 - \epsilon_2) c_9 = if_2 c_4,$$

где

$$\varepsilon_1 = (\omega_{21} - \omega_1)/\Delta_1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} + \beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_{10});$$

$$\xi = 0.6\beta |D_2/D_1|^2; \quad \beta = \omega_{230}/\omega_{210};$$

$\gamma = T_1/(2\tau)$ ;  $\tau$  – радиационное время жизни уровня  ${}^3P_1^0$ . Параметры  $\varepsilon_{10}$  и  $\varepsilon_{20}$  описывают степень нерезонансности воздействия излучений на среду и определяются формулами

$$\varepsilon_{10} = (\omega_{210} - \omega_1)/\Delta_1, \quad \varepsilon_{20} = (\omega_{230} - \omega_2)/\Delta_1 \quad (3)$$

(рис.1). Эти величины именуется далее отстройками резонансов. Резонанс является строгим, если  $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} = 0$ . Система (2) формально идентична системе уравнений, использованной в [22]. Однако связь между параметрами  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  сложнее, чем в работе [22], в которой полагалось выполнение условий строгого резонанса.

Пусть  $a_l, \alpha_l, \gamma_l$  – параметры эллипса поляризации (ЭП) пробного ( $l = 1$ ) и управляющего ( $l = 2$ ) излучений. Здесь  $a_l$  – большая полуось ЭП, измеренная в единицах  $\mu_l$ ;  $\alpha_l$  – угол её наклона к оси  $x$  ( $0 \leq \alpha_l \leq \pi$ );  $\gamma_l$  – параметр сжатия ( $-1 \leq \gamma_l \leq +1$ ) [26]. Величина  $|\gamma_l|$  определяет отношение малой оси ЭП к его большой оси. Отрицательные значения  $\gamma_l$  соответствуют правой эллиптической поляризации, положительные – левой [25].

Величины  $\tilde{E}_{ul}, \tilde{\delta}_{ul}$  ( $u = x, y$ ) в формулах (1) можно представить в виде

$$\tilde{E}_{ul} = E_{ul} \exp(i\varphi_{ul}), \quad \tilde{\delta}_{ul} = \delta_{ul} + \varphi_{ul},$$

где  $E_{ul} = |\tilde{E}_{ul}|$ ;  $\varphi_{ul} = 0$ , если  $\tilde{E}_{ul} \geq 0$ , и  $\varphi_{ul} = -\pi$ , если  $\tilde{E}_{ul} < 0$ . Функция  $\delta_{xl}(\delta_{yl})$  испытывает скачки на  $\pm\pi$  в узловых точках, т. е. в точках  $(s, w)$ , в которых  $\tilde{E}_{xl}(\tilde{E}_{yl})$  меняет знак на противоположный. Между этими точками функция  $\delta_{xl}(\delta_{yl})$  является непрерывной. Величины  $E_{ul}$  и  $\delta_{ul}$  однозначно связаны с параметрами ЭП соответствующего излучения и с одной из фазовых добавок [22]. Поэтому задание параметров  $a_l, \alpha_l, \gamma_l$ , а также одной из величин  $\delta_{xl}$  и  $\delta_{yl}$  эквивалентно определению поля формулой (1).

Начальные условия накладывались на значения населённостей квантовых состояний в начальный момент времени ( $w = 0$ ) и имели вид

$$c_1 = 2, \quad c_4 = c_5 = c_7 = c_9 = 0, \quad w = 0, \quad s \geq 0, \quad \varepsilon_1 \in (-\infty, +\infty). \quad (4)$$

Эти условия соответствуют случаю, когда до начала взаимодействия излучения со средой все атомы находятся на нижнем энергетическом уровне  $\Lambda$ -схемы. Граничные условия для системы (2) задавались следующим образом:

$$a_l = a_{l0}, \quad \alpha_l = \alpha_{l0}, \quad \gamma_l = \gamma_{l0}, \quad \delta_{xl} = \delta_{xl0}, \quad s = 0, \quad w \geq 0, \quad (5)$$

где  $a_{l0}, \alpha_{l0}, \gamma_{l0}, \delta_{xl0}$  – функции от  $w$ , описывающие эволюцию величин  $a_l, \alpha_l, \gamma_l, \delta_{xl}$  на входной поверхности ( $s = 0$ ) резонансной среды. При этом предполагалось также, что  $a_{l0}(0) = 0$ . С учётом отсутствия начальной населённости уровней, образующих квантовый переход, квазирезонансный управляющему полю, это означает, что взаимодействие излучения со средой начинается в момент времени  $w = 0$ .

### 3. Нормальные моды и фазовая модуляция

Пусть пробное поле значительно слабее управляющего поля, так что выполняется условие

$$\sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2} / \sqrt{E_{x2}^2 + E_{y2}^2} \ll 1.$$

Пусть также управляющее излучение поляризовано эллиптически. В [22] для случая строгого резонанса показано, что пробное поле в среде, описываемое решением краевой задачи (2), (4), (5) и именуемое далее полным пробным полем, является суммой двух излучений с постоянными поляризационными характеристиками  $\alpha_l, \gamma_l$ . Эти излучения эллиптически поляризованы, причём главная ось ЭП одного из них параллельна, а другого – перпендикулярна главной оси ЭП управляющего поля. Параметры сжатия ЭП мод одинаковы по модулю и противоположны по знаку. Пробное излучение первого типа названо в [22] параллельной нормальной модой, а второго типа – перпендикулярной нормальной модой. Моды не взаимодействуют между собой при распространении в среде. Граничные условия для каждой моды имеют вид (5) при  $l = 1$ , причём величины  $a_{10}, \alpha_{10}, \gamma_{10}, \delta_{x10}$  определяются их значениями для полного пробного поля на входной поверхности ( $s = 0$ ). Процедура нахождения граничных условий для каждой нормальной моды в отсутствие фазовой модуляции (ФМ) полного пробного поля на входной поверхности среды изложена в [22].

Обоснование приведённых выше утверждений, представленное в работе [22], фактически не зависит от вида связи между отстройками резонанса  $\varepsilon_{10}$  и  $\varepsilon_{20}$ . Поэтому эти утверждения остаются верными и для квазирезонансных условий. Однако эволюция нормальных мод, а также полного поля в среде в случае квазирезонанса заметно отличается от их эволюции в случае строгого резонанса. В частности, ниже будет показано, что в случае строгого резонанса нормальные моды не обладают ФМ, хотя полное пробное поле на некоторых этапах имеет ФМ. В случае квазирезонанса ФМ присутствует и у излучения мод, и у полного пробного поля.

При представлении полей в виде (1) наличие ФМ  $x$ -компоненты параллельной моды в среде означает, что функция  $\tilde{\delta}_{x1}^{(1)}$  не является постоянной величиной. Рассмотрим подробнее условия отсутствия ФМ параллельной нормальной моды. Её эволюцию можно описать следующей системой уравнений [22]:

$$\frac{\partial g_1^{(1)}}{\partial s} = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\kappa^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1^* \exp[-(\varepsilon_1 - \varepsilon_{10})^2] d\varepsilon_1,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial w} + i\varepsilon_1 U_1 = -\frac{i}{2}(1 + \kappa^2)g_1^{(1)*} - \frac{i}{4}g_2^2 V_1 - \gamma U_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) V_1 = -ig_2 q_1 U_1,$$

где  $\kappa$  и  $q_1$  – постоянные величины;

$$U_1 = \kappa c_2 - c_4; \quad V_1 = \kappa c_5 - (\kappa\kappa + 1)c_7 + \kappa_2 c_9;$$

$\kappa_2$  – постоянная величина. (Здесь и ниже характеристикам параллельной нормальной моды соответствует верхний

индекс 1, а перпендикулярной – верхний индекс 2.) Величину  $g_1^{(1)}$  можно представить в виде

$$g_1^{(1)} = \tilde{g}_{x1}^{(1)} \exp(i\tilde{\delta}_{x1}^{(1)}), \quad (7)$$

где  $\tilde{g}_{x1}^{(1)}$  и  $\tilde{\delta}_{x1}^{(1)}$  – действительные, дифференцируемые достаточное число раз функции от  $s$  и  $w$ .

Краевые условия для системы (6) определяются краевыми условиями (4), (5) для полного пробного поля:

$$g_1^{(1)}(0, w) = \tilde{g}_{x10}^{(1)} \exp(i\tilde{\delta}_{x10}^{(1)}), U_1(0, w) = V_1(0, w) = 0, w \geq 0, \quad (8)$$

$$g_1^{(1)}(s, 0) = U_1(s, 0) = V_1(s, 0) = 0, s \geq 0. \quad (9)$$

Здесь  $\tilde{g}_{x10}^{(1)}$ ,  $\tilde{\delta}_{x10}^{(1)}$  – заданные действительные функции аргумента  $w$ .

Предположим, что  $\tilde{\delta}_{x1}^{(1)} = \tilde{\delta}$ , где  $\tilde{\delta}$  – постоянная величина. Это означает, что параллельная нормальная мода лишена ФМ. Введём обозначения

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_{10}, \Delta_0 = \varepsilon_{10} - \varepsilon_{20},$$

где  $\Delta_0$  – отстройка от резонанса типа комбинационного рассеяния, а также положим

$$P = iU_1^* \exp(-i\tilde{\delta}_{x1}^{(1)}), \quad Q = iV_1^* \exp(-i\tilde{\delta}_{x1}^{(1)}).$$

Тогда, используя выражение (7), краевую задачу (6), (8), (9) можно представить в виде

$$\frac{\partial \tilde{g}_{x1}^{(1)}}{\partial s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\kappa^2 + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} P \exp(-\varepsilon^2) d\varepsilon, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial w} - i(\varepsilon + \varepsilon_{10})P = -\frac{1}{2}(1 + \kappa^2)\tilde{g}_{x1}^{(1)} + \frac{1}{4}g_2 Q - \gamma P, \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial w} - i(\beta\varepsilon + \Delta_0)Q = ig_2^* q_1 P, \quad (12)$$

$$\tilde{g}_{x1}^{(1)}(0, w) = \tilde{g}_{x10}^{(1)}(w), \quad P(0, w) = Q(0, w) = 0, w \geq 0, \quad (13)$$

$$\tilde{g}_{x1}^{(1)}(s, 0) = P(s, 0) = Q(s, 0) = 0, s \geq 0. \quad (14)$$

Функции  $P$  и  $Q$  параметрически зависят от  $\varepsilon$ . Однако краевые условия (13) и (14) одинаковы для  $P$  и  $Q$ , соответствующих различным значениям  $\varepsilon$ .

Величина  $P$  согласно (11) в общем случае не является действительной, так что интеграл в правой части уравнения (10) может оказаться мнимой величиной. При этом левая часть этого уравнения действительна. Это означает, что в общем случае решения вида (7) с постоянным значением фазовой добавки  $\tilde{\delta}_{x1}^{(1)}$  не существует и  $x$ -компонента параллельной нормальной моды будет иметь ФМ.

Одним из возможных исключений является случай выполнения условий строгого резонанса для пробного и управляющего полей:

$$\varepsilon_{10} = \Delta_0 = 0. \quad (15)$$

Для доказательства этого факта запишем уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial \tilde{g}_{x1}^{(1)}}{\partial s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\kappa^2 + 1} \int_0^{+\infty} [P(\varepsilon) + P(-\varepsilon)] \exp(-\varepsilon^2) d\varepsilon. \quad (16)$$

Здесь  $P(\varepsilon)$  и  $P(-\varepsilon)$  – функции, удовлетворяющие уравнениям (11) и (12) и краевым условиям (13), (14) при значениях параметра отстройки  $\varepsilon$  и  $-\varepsilon$ . Нетрудно показать, что краевые задачи для пары функций  $P(-\varepsilon)$  и  $Q(-\varepsilon)$  полностью совпадают с краевой задачей для пары функций  $P^*(\varepsilon)$  и  $Q^*(\varepsilon)$ . Однако это означает, что  $P(-\varepsilon) = P^*(\varepsilon)$ , следовательно

$$P(\varepsilon) + P(-\varepsilon) = P(\varepsilon) + P^*(\varepsilon) = 2\text{Re}P(\varepsilon).$$

Таким образом, правая часть уравнения (16) представляет собой действительную величину. Решение краевой задачи (10) – (14) и использование формулы (7) при  $\tilde{\delta}_{x1}^{(1)} = \tilde{\delta}$  определяет тогда  $x$ -компоненту параллельной моды без ФМ.

Можно показать, что функция  $g_1^{(1)}$ , входящая в уравнение (6), имеет вид

$$g_1^{(1)} = \tilde{g}_{y1}^{(1)} \exp\{i[\tilde{\delta}_{y1}^{(1)} - \delta_1^{(1)}]\},$$

где  $\tilde{g}_{y1}^{(1)}$  и  $\tilde{\delta}_{y1}^{(1)}$  – действительные непрерывные функции от  $s$  и  $w$ ;  $\delta_1^{(1)}$  – постоянная величина. Проводя рассуждения, подобные приведённым выше, приходим к выводу, что при выполнении условий (15)  $y$ -компонента параллельной моды также лишена ФМ. Отсутствие ФМ компонент перпендикулярной нормальной моды обосновывается аналогично.

Перечислим условия, необходимые для отсутствия ФМ нормальных мод в среде. Во-первых, это отсутствие ФМ полного пробного излучения на входной поверхности среды. При этом согласно [22] излучения нормальных мод на входе в среду также не будут иметь ФМ. Во-вторых, нулевая населённость верхних уровней  $\Lambda$ -схемы до момента начала её взаимодействия с полями пробного и управляющего излучений. В-третьих, выполнение условий строгого резонанса (15).

В общем случае излучения нормальных мод обладают ФМ. Используя результаты, изложенные в [22], можно получить соотношения, связывающие фазовые добавки компонент моды каждого типа во всех пространственно-временных точках:

$$\tilde{\delta}_{y1}^{(1)} = \tilde{\delta}_{x1}^{(1)} + \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad \tilde{\delta}_{y1}^{(2)} = \tilde{\delta}_{x1}^{(1)} - \frac{\pi}{2} + 2\pi m', \quad m, m' \in \mathbb{Z}, \quad (17)$$

причём фазовые добавки являются непрерывными функциями переменных  $s$  и  $w$ .

#### 4. Численные результаты

Конкретизируем граничные условия (5) следующим образом:

$$a_{10} = 0.2 \text{sech}[(w - 300)/50], \quad (18)$$

$$\alpha_{10} = \pi/6, \quad \gamma_{10} = -0.5, \quad \delta_{x10} = 0,$$

$$a_{20} = 6.516, \quad \alpha_{20} = 0, \quad \gamma_{20} = 0.3, \quad \delta_{x20} = 0. \quad (19)$$

Условия (18) описывают входной импульс полного пробного излучения с длительностью 15 нс и пиковой интенсивностью 65 Вт/см<sup>2</sup>. Интенсивность управляющего

излучения согласно (19) постоянна и составляет примерно 20 кВт/см<sup>2</sup>. Пиковая интенсивность входного пробного импульса меньше интенсивности управляющего поля более чем в 300 раз, поэтому описываемая формулами (18), (19) ситуация относится к случаю слабого пробного излучения. (Обоснование выбора значений параметров резонансной среды и входных излучений подробно приведено в [27].)

Используя методику, изложенную в [22], получаем граничные условия для нормальных мод на входной поверхности среды:

$$\alpha_{10}^{(1)} = 0.0720 \operatorname{sech}[(w - 300)/50], \tag{20}$$

$$\alpha_{10}^{(1)} = 0, \gamma_{10}^{(1)} = 0.7417, \delta_{x10}^{(1)} = -0.4993$$

для параллельной нормальной моды и

$$\alpha_{10}^{(2)} = 0.1645 \operatorname{sech}[(w - 300)/50], \tag{21}$$

$$\alpha_{10}^{(2)} = \pi/2, \gamma_{10}^{(2)} = -0.7417, \delta_{x10}^{(2)} = 0.2884$$

для перпендикулярной. Для мод обоих типов параметры входного управляющего излучения задаются формулами (19). Помимо условий (19) – (21) эволюция в среде полного пробного поля и полей нормальных мод зависит от величин  $\varepsilon_{10}$  и  $\varepsilon_{20}$ , определяемых формулами (3).

### 4.1. Строгий резонанс

Положим, что выполняются условия строгого резонанса:  $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{20} = 0$ . Эволюция во времени величин  $a_1$ ,  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  полного пробного поля при нескольких фиксированных значениях расстояния  $s$  представлена на рис.2.

Согласно рис.2,б – г распад входного импульса полного пробного поля на два отдельных импульса становится заметным на расстояниях  $s > 1500$ . Поскольку поляризационные характеристики  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  в области нахождения импульса на начальном этапе его распада (рис.2,б) существенно меняются, пробное излучение не является эллиптически поляризованным. (Скачки величины  $\alpha_1$  между значениями  $\pi$  и 0 происходят из-за ограничения области значений  $\alpha_1$ .) На большом расстоянии (рис.2,г) поляризационные характеристики в области нахождения обоих импульсов постоянны, причём для левого импульса  $\alpha_1 = \pi$ ,  $\gamma_1 = 0.7417$ , а для правого импульса  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\gamma_1 = -0.7421$ . Эти значения хорошо совпадают с указанными в формулах (20) и (21) (с учетом того, что  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 = \pi$  описывают одинаковое положение главной оси ЭП). Следовательно, левый импульс на рис.2,г представляет собой излучение параллельной нормальной моды, а правый – перпендикулярной нормальной моды.

На рис.3 показана эволюция величин  $a_1$  совместно с эволюцией фазовых добавок  $\delta_{x1}$  и  $\delta_{y1}$  для двух расстояний  $s$ . Из рис.3,а видно, что до распада импульса на нормальные моды фазовые добавки не являются постоянными в области, где сосредоточена энергия пробного поля, и, следовательно, пробное излучение имеет ФМ. Для объяснения этого факта положим, что  $s_0 \geq 0$  – фиксированное расстояние  $s$ . Полное поле в точке  $s_0$  представляет собой сумму полей нормальных мод в той же точке. Поля мод не обладают ФМ (см. разд.3), но модулированы по амплитуде, поскольку главные оси ЭП мод в точке  $s_0$  зависят от  $w$ . Элементарные соображения показывают, что сумма полей мод в точке  $s_0$  будет лишена ФМ только при выполнении условия  $a_1^{(1)}(s_0, w) = \eta a_1^{(2)}(s_0, w)$ , где  $\eta$  – постоянная величина. Данное условие согласно (20), (21) выполняется при  $s_0 = 0$ , что означает отсутствие ФМ полно-

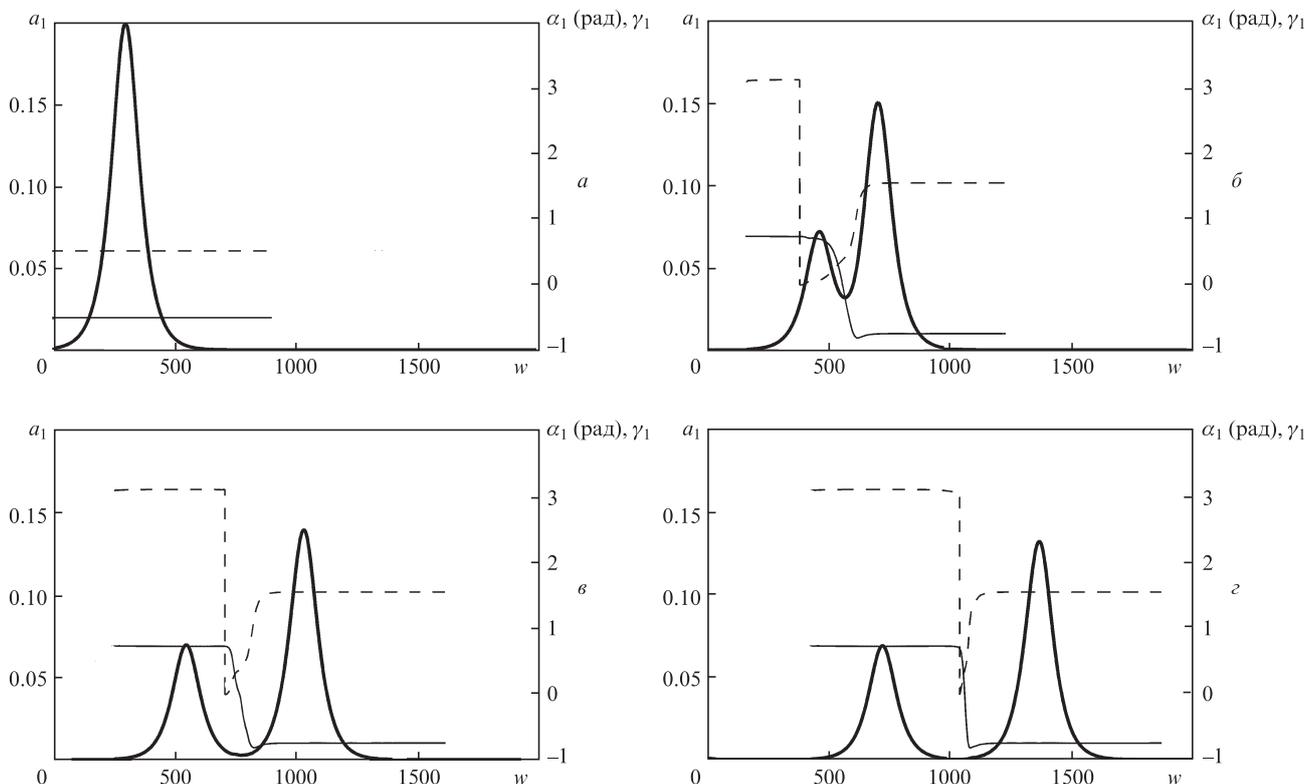


Рис.2. Эволюция характеристик  $a_1$  (толстые линии),  $\alpha_1$  (штриховые линии),  $\gamma_1$  (тонкие линии) полного пробного поля в среде при  $s = 0$  (а), 1500 (б), 3000 (в) и 4000 (г).

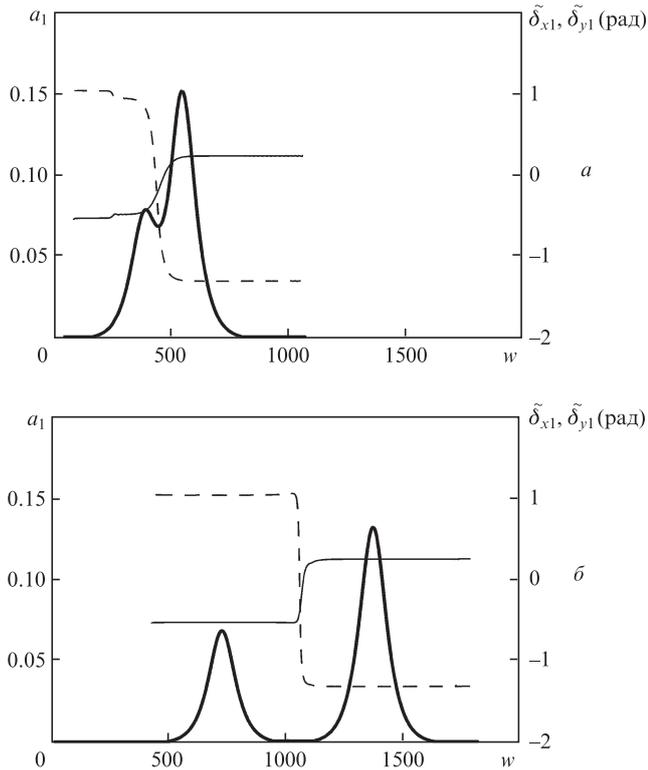


Рис.3. Эволюция величин  $a_1$  (толстые линии),  $\tilde{\delta}_{x1}$  (тонкие линии) и  $\tilde{\delta}_{y1}$  (штриховые линии) полного пробного поля при  $s = 1000$  (а) и 4000 (б).

го пробного поля на входной поверхности в соответствии с постоянством величины  $\tilde{\delta}_{x10}$  в (18). Однако в связи с различием скоростей импульсов нормальных мод и с различ-

ной степенью их деформации при распространении на расстояние  $s_0 > 0$  указанное условие нарушается. А это означает, что сумма нормальных мод, т.е. полное пробное поле, при  $s_0 > 0$  имеет ФМ.

На большом расстоянии, когда распад входного пробного импульса на импульсы нормальных мод завершился (рис.3,б), в области нахождения импульса каждой моды фазовые добавки постоянны. При этом в области левого импульса (параллельная мода)  $\tilde{\delta}_{x1} = -0.5014$ , тогда как в области правого (перпендикулярная мода)  $\tilde{\delta}_{x1} = 0.2793$ . Данные значения близки к указанным в (19), (20) значениям величин  $\tilde{\delta}_{x10}^{(1)}$  и  $\tilde{\delta}_{x10}^{(2)}$ . Кроме того, расчёт подтверждает, что фазовые добавки обеих мод удовлетворяют соотношениям (17) при  $m = m' = 0$ .

### 4.2. Случай квазирезонанса

Положим, что  $\epsilon_{10} = -0.3$ ,  $\epsilon_{20} = 0.6$ , сохранив неизменными граничные условия (18), (19). Эта ситуация соответствует квазирезонансному взаимодействию полей и среды и будет описана ниже более подробно. Эволюция величин  $a_1$ ,  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  для полного пробного поля при нескольких фиксированных расстояниях  $s$  представлена на рис.4. Вблизи входной поверхности (рис.4,б), как и при строгом резонансе, полное пробное излучение не является эллиптически поляризованным. Однако в случае квазирезонанса распад импульса полного пробного излучения на импульсы полей нормальных мод происходит на значительно меньших расстояниях ( $s = 500$ , рис.4,б), чем в случае строгого резонанса ( $s = 1500$ , см. рис.2,б). При распаде возникают три импульса: импульс 1 и плохо разделённые импульсы 2, 3 (рис.4,б-г). Значения  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  в области импульса 1 и импульсов 2, 3 близки к значениям, характерным для нормальных мод, указанным в формулах (20),

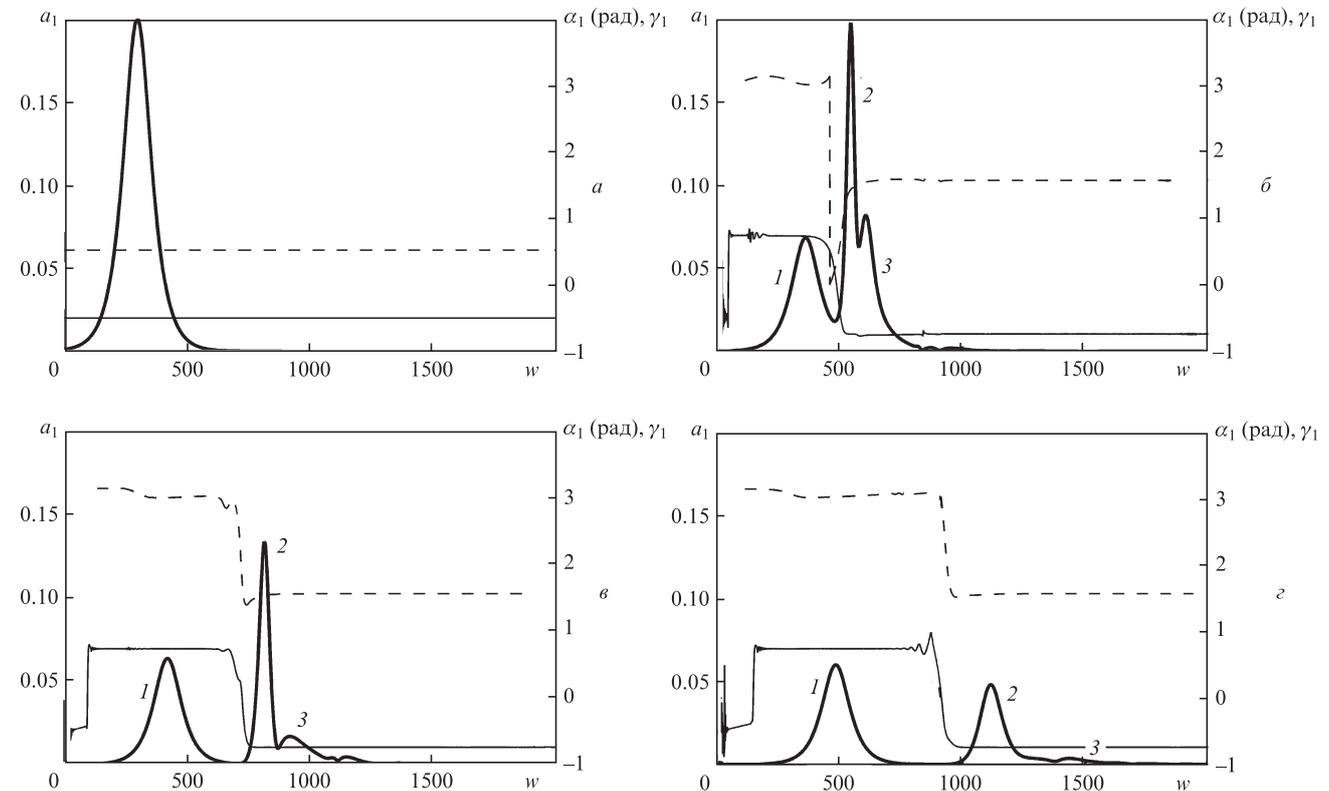


Рис.4. Эволюция характеристик  $a_1$  (толстые линии),  $\alpha_1$  (штриховые линии),  $\gamma_1$  (тонкие линии) полного пробного поля в среде при  $s = 0$  (а), 500 (б), 1000 (е) и 1500 (з). Кривая 1 – параллельная мода, кривые 2, 3 – перпендикулярная мода.

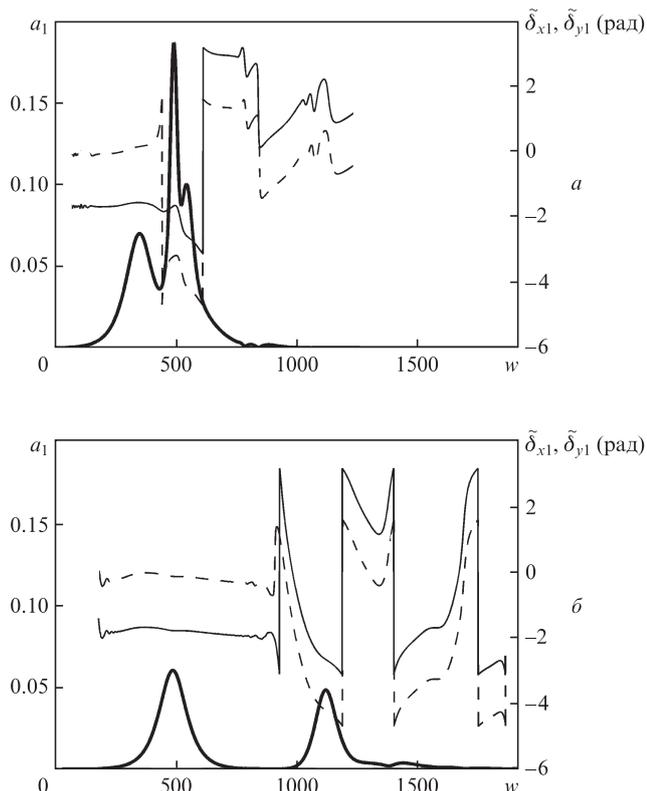


Рис.5. Эволюция величин  $a_1$  (толстые линии),  $\tilde{\delta}_{x1}$  (тонкие линии) и  $\tilde{\delta}_{y1}$  (штриховые линии) полного пробного поля при  $s = 400$  (a) и  $1500$  (б).

(21). Отсюда следует, что импульс 1 на рис.4,б –  $z$  представляет собой поле параллельной нормальной моды, а импульсы 2 и 3 относятся к перпендикулярной нормальной моде. Напомним, что в случае строгого резонанса

каждая нормальная мода представлялась в виде одного колоколообразного импульса (см. рис.2).

На рис.5 показана эволюция величин  $a_1$  совместно с эволюцией фазовых добавок  $\tilde{\delta}_{x1}$  и  $\tilde{\delta}_{y1}$  для двух расстояний  $s$ . Скачки величин  $\tilde{\delta}_{x1}$  и  $\tilde{\delta}_{y1}$  равны  $\pm 2\pi$  и связаны с ограничением области значений этих величин отрезком длиной  $2\pi$ .

Изменение фазовых добавок с течением времени, демонстрируемое на рис.5, означает наличие ФМ полного пробного излучения как на малых, так и на больших расстояниях внутри среды. При этом на расстояниях  $s$ , достаточных для полного распада входного пробного импульса (рис.5,б), в области нахождения нормальных мод величины  $\tilde{\delta}_{x1}$  и  $\tilde{\delta}_{y1}$  связаны соотношениями (17) при  $m = m' = 0$ . Этот факт согласуется с выводами аналитической теории нормальных мод. Однако на малых расстояниях (рис.5,а) в области импульса полного пробного поля соотношения (17) не выполняются.

Граничные условия для нормальных мод, образующих полное пробное излучение в среде, имеют вид (20), (21). Расчёт показал, что в согласии с выводами аналитической теории поляризационные характеристики  $\alpha_1^{(i)}$  и  $\gamma_1^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) нормальных мод не изменяются в процессе их распространения, оставаясь равными своим значениям на входе в среду. Поэтому кривые, описывающие результаты расчёта этих характеристик, не приводятся. На рис.6 приведены кривые, демонстрирующие эволюцию амплитудных ( $a_1^{(i)}$ ) и фазовых ( $\tilde{\delta}_{x1}^{(i)}$ ) характеристик нормальных мод. На рис.6,а представлены моды на входной поверхности среды, где они, согласно (20), (21), не имеют ФМ (см. кривые 2 на рис.6,а). Внутри среды, как следует из рис.6,б –  $z$ , фазовые добавки  $\tilde{\delta}_{x1}^{(i)}$  являются переменными в области излучения каждой моды. Однако изменение фазовой добавки  $\tilde{\delta}_{x1}^{(1)}$  параллельной моды чрезвычайно мало

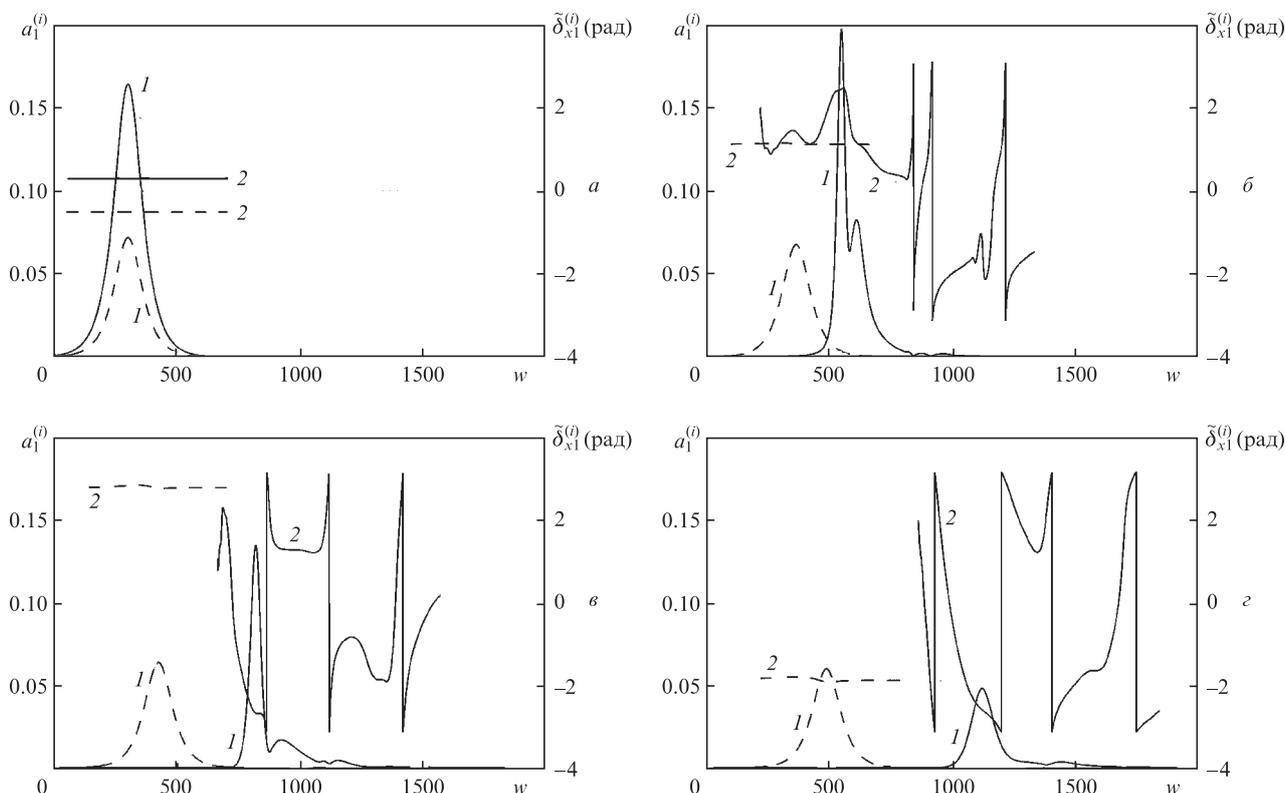


Рис.6. Эволюция амплитуд  $a_1^{(i)}$  (1) и фазовых добавок  $\tilde{\delta}_{x1}^{(i)}$  (2) нормальных параллельной (штриховые линии) и перпендикулярной (сплошные линии) мод в среде при  $s = 0$  (a),  $500$  (б),  $1000$  (в) и  $1500$  (г).

(штриховые кривые 2 на рис.6,  $\bar{b} - z$ ), так что параллельную моду практически можно считать лишённой ФМ на каждом фиксированном расстоянии  $s$ .

Фазовая модуляция перпендикулярной нормальной моды проявляется значительно сильнее, чем ФМ параллельной моды. Это демонстрирует сравнение сплошных и штриховые кривых 2 на рис.6,  $\bar{b} - z$ . Энергия перпендикулярной моды заключена в двух плохо разделённых импульсах, о которых упоминалось выше. Будем называть больший из них основной частью моды, а меньший – второстепенной. Рассмотрим основную часть моды на расстоянии  $s = 1500$ . Согласно рис.6,  $z$  в области основной части моды величина  $\partial\bar{\delta}_{x1}^{(2)}/\partial w$  отрицательна и, следовательно,  $x$ -компонента основной части моды имеет отрицательный chirp. Второе из условий (17) даёт  $\partial\bar{\delta}_{y1}^{(2)}/\partial w = \partial\bar{\delta}_{x1}^{(2)}/\partial w$ . Следовательно, мгновенные частоты  $x$ - и  $y$ -компонент основной части перпендикулярной моды одинаковы в каждой пространственно-временной точке  $(s, w)$ , так что обе компоненты имеют одинаковый отрицательный chirp.

Для оценки величины chirp отметим, что мгновенная интенсивность  $I_1^{(2)}$  перпендикулярной нормальной моды при фиксированных значениях  $s$  и  $w$  пропорциональна квадрату величины  $a_1^{(2)}(s, w)$  [22]. Расчёты показали, что при  $s = 1500$  зависимость интенсивности  $I_1^{(2)}$  основного импульса от  $w$  представляет собой колоколообразную кривую и описывает возмущение с длительностью 85 (в единицах  $w$ ) по уровню  $e^{-1}$  максимальной интенсивности  $I_{1m}^{(2)}$ . Аппроксимируем зависимость  $I_1^{(2)}$  от  $w$  при  $s = 1500$  функцией Гаусса, описывающей импульс с такой длительностью. Тогда можно показать, что за промежуток времени, в течение которого выполняется условие  $I_1^{(2)} \geq 0.1 I_{1m}^{(2)}$ , изменение мгновенной частоты  $\bar{\omega}_1^{(2)}$ , определяемой формулой

$$\bar{\omega}_1^{(2)} = \omega_1 + \frac{1}{T_1} \frac{\partial\bar{\delta}_{x1}^{(2)}}{\partial w},$$

составляет по модулю примерно 15% от ширины спектрального контура основной части перпендикулярной моды по уровню  $e^{-1}$  высоты. Такая величина девиации мгновенной частоты означает, что ФМ основной части нормальной моды вносит заметный вклад в формирование контура её спектральной интенсивности.

Максимальная интенсивность второстепенной части импульса перпендикулярной моды примерно в 170 раз меньше максимальной интенсивности её основной части. Поэтому учёт этой части практически не влияет на вид фурье-спектра излучения всей перпендикулярной моды. Отметим, что в области второстепенной части chirp положительный, а величина девиации мгновенной частоты по модулю примерно такая же, как и у основной части перпендикулярной моды.

Обозначим через  $F(s)$  полную энергию, переносимую пробным полем через единицу площади волнового фронта, на расстоянии  $s$  от входной поверхности. Назовём величину  $T(s) = F(s)/F(0)$  пропусканием пробного излучения на дистанции  $s$ . На рис.7 представлены кривые пропускания для нормальных мод в случаях строгого резонанса и квазирезонанса. Сравнивая кривые 1 и 2, а также кривые 3 и 4 приходим к выводу, что в обоих случаях параллельная нормальная мода испытывает при распространении меньшие энергетические потери, чем перпендикулярная. С другой стороны, из рис.7 следует, что в

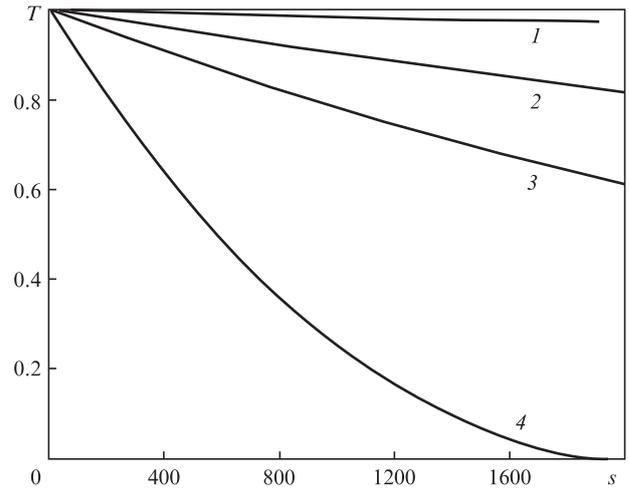


Рис.7. Кривые пропускания для параллельной (1, 3) и перпендикулярной (2, 4) мод в случаях строгого резонанса (1, 2) и квазирезонанса (3, 4).

случае квазирезонанса потери энергии мод при распространении превышают подобные потери в случае строгого резонанса. Снижение пропускания особенно сильно проявляется в эволюции перпендикулярной нормальной моды. В частности, её излучение в случае квазирезонанса (кривая 4 на рис.7) практически полностью поглощается средой на дистанции  $s \approx 2000$ .

Отметим, что в отсутствие управляющего поля слабое излучение, частота которого равна частоте пробного поля, практически полностью поглощается на расстоянии  $s$  порядка нескольких единиц. Поэтому можно считать, что в рассмотренных выше случаях эффективность явления ЭМИП достаточно велика.

## 5. Заключение

Показано, что в случае квазирезонанса при условии достаточно слабого по сравнению с управляющим полем пробного поля полное пробное излучение в среде может быть представлено как сумма нормальных мод, распространяющихся независимо друг от друга. Поляризационные параметры нормальных мод не меняются при их распространении, так что моды являются эллиптически поляризованными излучениями. Главная ось ЭП первой из нормальных мод (параллельной моды) параллельна, а второй (перпендикулярной моды) — перпендикулярна главной оси ЭП управляющего поля, при этом параметры сжатия ЭП мод противоположны по знаку. В случае строгого резонанса и в отсутствие ФМ нормальных мод на входной поверхности среды нормальные моды в среде также лишены ФМ. В случае квазирезонанса обе нормальные моды в среде приобретают ФМ даже в отсутствие ФМ этих мод на входной поверхности среды. При этом величина ФМ параллельной моды в случае импульсов рассмотренной длительности (около 15 нс) оказывается пренебрежимо малой.

Если входное пробное излучение представляет собой импульс, то в среде этот импульс распадается на импульсы, в каждом из которых заключена энергия одной из нормальных мод. Расстояние, пройденное импульсом в среде до его распада на импульсы мод, в случае квазирезонанса меньше, чем в случае строгого резонанса. В случае строгого резонанса импульс полного пробного поля в

среде обладает ФМ вплоть до его распада на лишённые ФМ импульсы мод, даже если этот импульс не имел ФМ на входной поверхности образца. В случае квазирезонанса и в отсутствие ФМ входного импульса пробного излучения импульсы, в которых заключена энергия излучения полного пробного поля, имеют ФМ на всех этапах их распространения.

Показано, что связанная с явлением ЭМИП прозрачность среды уменьшается при переходе от случая строгого резонанса к случаю квазирезонанса. При этом для перпендикулярной нормальной моды данный эффект более значителен, чем для параллельной.

1. Демтрёдер В. *Современная лазерная спектроскопия* (Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2014).
2. Vitanov N.V., Rangelov A.A., Shore B.W., Bergmann K. *Rev. Mod. Phys.*, **89**, 015006 (2017).
3. Harris S.E. *Phys. Today*, **50**, 36 (1997).
4. Lukin M.D. *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 457 (2003).
5. Fleischhauer M., Imamoglu A., Marangos J.P. *Rev. Mod. Phys.*, **77**, 633 (2005).
6. Duan L.-M., Lukin M.D., Cirac J.I., Zoller P. *Nature (London)*, **414**, 413 (2001).
7. Sinatra A. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 253601 (2006).
8. Martinelli M., Valente P., Failache H., Felinto D., Cruz L.S., Nussenzeig P., Lezama A. *Phys. Rev. A*, **69**, 043809 (2004).
9. Godone A., Micalizio S., Levi F. *Phys. Rev. A*, **66**, 063807 (2002).
10. Lukin M.D., Imamoglu A. *Nature (London)*, **413**, 273 (2001).
11. Kocharovskaya O., Mandel P. *Phys. Rev. A*, **42**, 523 (1990).
12. Jen H.H., Daw-Wei Wang. *Phys. Rev. A*, **87**, 061802(R) (2013).
13. Basler C., Grzesiak J., Helm H. *Phys. Rev. A*, **92**, 013809 (2015).
14. Ronggang Liu, Tong Liu, Yingying Wang, Yujie Li, Bingzheng Gai. *Phys. Rev. A*, **96**, 053823 (2017).
15. Fam Le Kien, Rauschenbeutel A. *Phys. Rev. A*, **91**, 053847 (2015).
16. Wielandy S., Gaeta A.L. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3359 (1998).
17. Bo Wang, Shujing Li, Jie Ma, Hai Wang, Peng K.C., Min Xiao. *Phys. Rev. A*, **73**, 051801(R) (2006).
18. Agarwal G.S., Dasgupta S. *Phys. Rev. A*, **67**, 023814 (2003).
19. Sautenkov V.A., Rostovtsev Y.V., Chen H., Hsu P., Agarwal G.S., Scully M.O. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 233601 (2005).
20. Tai Hyun Yoon, Chang Yong Park, Sung Jong Park. *Phys. Rev. A*, **70**, 061803(R) (2004).
21. Kis Z., Demeter G., Janszky J. *J. Opt. Soc. Am. B*, **30**, 829 (2013).
22. Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **48** (11), 1027 (2018) [*Quantum Electron.*, **48** (11), 1027 (2018)].
23. Maneesh Jain, Kasapi A., Yin G.Y. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4385 (1995).
24. Kasapi A., Maneesh Jain, Yin G.Y., Harris S.E. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2447 (1995).
25. Салех Б., Тейх М. *Оптика и фотоника. Принципы и применения* (Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2012, Т.1).
26. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1970).
27. Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **47** (10), 892 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (10), 892 (2017)].