Динамика и квантовые флуктуации излучения в нестационарных режимах работы волоконного ВКР-усилителя

Л.А.Мельников, Ю.А.Мажирина

Представлены результаты численного моделирования динамики излучения в волоконном ВКР-усилителе с учетом квантовых флуктуаций полей накачки и стоксовых волн. При моделировании использовался подход, основанный на решениях уравнений переноса для комплексных амплитуд и метод «обратного» распространения для операторов, описывающих квантовые флуктуации. Показано, что существует оптимальная длина ВКР-усилителя, соответствующая минимуму уровня флуктуаций усиленного стоксова импульса.

Ключевые слова: *вынужденное комбинационное рассеяние, встречные волны, уравнения переноса, квантовые флуктуации, метод возмущений.*

1. Введение

Динамика волоконных лазеров и усилителей изучается давно, и во многом эти исследования были стимулированы новыми экспериментальными результатами и возможностями, которые предоставляли новые типы волокон и лазерных систем. Важным направлением всегда являлось изучение динамики излучения в волоконных лазерах, где используется ВКР- или ВРМБ-преобразование накачки [1]. В отличие от лазеров на основе активированных волокон, в ВКР- или ВРМБ-лазерах генерация возможна даже в отсутствие обратной связи в резонаторе (на одном проходе), т. к. коэффициенты ВРМБ- и ВКР-усиления велики даже при умеренных мощностях накачки, а потери в волокне незначительны. Основные динамические явления в волоконных ВКР- или ВРМБ-лазерах с линейной несимметричной конфигурацией (волокно, возбуждаемое с одного торца) связаны с релаксационными колебаниями, появляющимися в результате действия волны, распространяющейся навстречу волне накачки при ВРМБ, или стоксовой волны, распространяющейся в попутном с накачкой направлении при ВКР [2–5]. Обычно эти колебания происходят с периодом, равным времени обхода резонатора, длина которого либо совпадает с длиной волокна, либо меньше ее из-за поглощения накачки. Тогда их период определяется временем прохождения излучением некоторой эффективной длины [2]. При этом дисперсия волокна обычно не учитывается, т. к. длительности импульсов достаточно велики.

Существенно то, что уравнения, описывающие генерацию, являются уравнениями в частных производных, которые нельзя свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений малой размерности. Поэтому аналитические результаты можно получить только при достаточно жестких и часто неоправдывающихся в эксперименте приближениях [3]. По этой причине при анализе динамических явлений большую роль играет численный эксперимент [1, 2, 5]. При традиционном подходе уравнения дополняются граничными условиями на торцах волокна – так называемая двухточечная граничная задача, методы интегрирования которой достаточно сложны. В ней часто используются многократные прогонки по длине волокна для удовлетворения граничных условий. Все это требует большого времени для расчетов и изучения сходимости процедур последовательных приближений.

ВКР-лазеры на основе длинных (десятки и сотни километров) волокон нашли применение в телекоммуникационных системах в качестве распределенных усилителей [6]. Кольцевые конфигурации длинных волоконных лазеров представляют особый интерес, т. к. на их основе можно создавать оптические гироскопические устройства. При этом длинное волокно позволяет создать резонатор с большим масштабным коэффициентом, связывающим набег фазы из-за вращения или разность частот встречных волн с угловой скоростью вращения [7]: $\Delta\omega = \Delta\nu \times 8\pi S/(c\lambda)$, где S – площадь волоконного контура; λ – длина волны генерации; $\Delta\nu = 2\pi v_{\rm g}/L$ – частотное расстояние между продольными модами кольцевого резонатора; L – периметр резонатора; $v_{\rm g} = ({\rm d}\beta/{\rm d}\omega)^{-1}$ – групповая скорость; β – постоянная распространения на частоте генерации. Видно, что при малых групповых скоростях масштабный множитель становится очень большим [8].

В обычных кольцевых лазерах вследствие амплитудно-фазовых условий генерации линейная связь встречных волн приводит при малых разностях их частот к захвату частот, препятствующему измерению малых скоростей вращения, когда частота биений сравнивается с шириной зоны захвата. Ширина этой зоны оценивается как Rc/L, где c/L – межмодовый интервал, а R – коэффициент связи встречных волн, который в газовых лазерах составляет $10^{-5}-10^{-6}$. В оптических волокнах из-за рэлеевского рассеяния этот коэффициент равен $\sim 10^{-4}$ км$^{-1}$. Однако, как уже отмечалось, ВКР-генерация не так чувствительна к фазовым соотношениям для поля в резонаторе, поэтому

Л.А.Мельников, Ю.А.Мажирина. Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77; Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; e-mail: lam-pels@ya.ru

Поступила в редакцию 24 октября 2019 г.

можно надеяться на получение информации об угловой скорости вращении даже при таком большом коэффициенте обратного рассеяния.

В последнее время опубликованы работы по исследованию динамики излучения в длинных волоконных лазерах, стимулированные появлением концепции случайной обратной связи в оптическом волокне [9–12], когда генерация может происходить практически на одном проходе в отсутствие зеркал при симметричном возбуждении волокна [5, 13]. Роль рэлеевского рассеяния и спонтанного комбинационного рассеяния заключается в создании затравочных полей для ВКР, что дает возможность развиваться различным неустойчивостям.

Достаточно большой круг задач связан с изучением динамики коротких импульсов излучения в длинных волоконных лазерах. Совсем недавно появился ряд работ, в которых получена синхронизация мод в волоконном лазере с использованием элементов резонатора с существенно различающейся дисперсией. Это позволяет получить режимы, обусловленные неустойчивостями, напоминающими фарадеевские (параметрические) неустойчивости [14, 15]. Режимы распространения коротких (пикосекундных) световых импульсов в волокнах с периодически изменяющейся по длине дисперсией интересны также для создания запутанных солитоноподобных импульсов [16]. Известно, что распространение волн с постоянной интенсивностью в оптических волокнах сопровождается неустойчивостью при отрицательной дисперсии групповой скорости [1]. Однако похожие неустойчивости наблюдаются при встречном распространении волн и фазовой кросс-модуляции даже при положительной дисперсии групповой скорости. Модуляция параметров дисперсии волокна также может привести к неустойчивости параметрического типа [5, 17].

Для изучения процессов, происходящих в длинных волоконных лазерах, и построения адекватных физических моделей этих процессов удобно рассматривать упрощенные конфигурации, что и делается в настоящей работе. Кроме того, при численном моделировании решались уравнения переноса для амплитуд полей встречных волн с использованием сеточных методов и алгоритма Куранта–Изааксона–Рис [18]. Это позволило исследовать динамику излучения в лазере на большом числе проходов по волокну без применения итерационных алгоритмов [5, 13].

2. Квантовые уравнения для волоконного ВКР-усилителя

2.1. Уравнения для полей

Будем использовать разложения полей по бегущим волнам:

$$\boldsymbol{E}_X(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}\psi(x,y)\exp(\mathrm{i}\beta_0 z - \mathrm{i}\omega_0 t)\mathcal{E}_X(z,t) + \text{c.c.},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_X(z,t) &= \exp[\mathrm{i}\beta_0 z - \mathrm{i}\omega(\beta_0)t] \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \exp[\mathrm{i}(\beta_k - \beta_0)z - \mathrm{i}(\omega_k - \omega_0)t] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\eta}{2\pi}X(\eta)\exp\{\mathrm{i}(\eta - \beta_0)z - \mathrm{i}[\omega(\eta+\beta_0) - \omega_0]t\}. \quad (1)\end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор поляризации волны; $\psi(x,y)$ – модовая функция [19]; β – постоянная распространения основной моды; $\omega_0 = \omega(\beta_0)$ – частота несущей поля при $\beta = \beta_0$; $\beta_k = \beta_0 + 2\pi v_X k/L$; v_X – фазовая скорость; L – длина волокна; $\eta = \beta - \beta_0$; $X(\eta)$ – фурье-амплитуда пространственного спектра; $X = F, B, F_s, B_s$; F, B – амплитуды волн накачки (амплитуда F соответствует волнам, распространяющимся по оси z, амплитуда B – встречным волнам); F_s, B_s – амплитуды стоксовых волн. Для длинного волокна вместо суммирования используется интегрирование. Заменим классическое поле квантованным и нормируем амплитуды на поле, соответствующее одному кванту в объеме V, который оно занимает [20], тогда получим

$$\hat{\mathcal{E}}_X(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_0\varepsilon V}}\big[\hat{X}(z,t) + \hat{X}^{\dagger}(z,t)\big],$$

где $\hat{X}(z,t)$ и $\hat{X}^{\dagger}(z,t)$ – операторы уничтожения и рождения поля, являющиеся в силу (1) суперпозицией операторов рождения и уничтожения отдельных продольных мод (бегущих волн): ε и ε_0 – диэлектрические проницаемости волокна и вакуума соответственно. Для этих операторов выполняются обычные коммутационные соотношения:

$$[\hat{X}(z,t)\hat{X}^{\dagger}(z',t')] = \delta(t-t')\delta(z-z').$$

Уравнения для операторов полей стоксовых волн и волн накачки при достаточно длинных импульсах, для которых дисперсию можно не учитывать, взяты из работы [13] с соответствующей заменой амплитуд огибающих полей на операторы:

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial t} + v_{\mathrm{g}}\frac{\partial\hat{F}}{\partial z} = -g(\hat{F}_{\mathrm{s}}^{\dagger}\hat{F}_{\mathrm{s}} + \hat{B}_{\mathrm{s}}^{\dagger}\hat{B}_{\mathrm{s}})\hat{F} - \gamma F + \hat{N}_F, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\hat{B}}{\partial t} - v_{\mathrm{g}}\frac{\partial\hat{B}}{\partial z} = -g(\hat{F}_{\mathrm{s}}^{\dagger}\hat{F}_{\mathrm{s}} + \hat{B}_{\mathrm{s}}^{\dagger}\hat{B}_{\mathrm{s}})\hat{B} - \gamma B + \hat{N}_B, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\hat{F}_{\mathrm{s}}}{\partial t} + v_{\mathrm{gs}}\frac{\partial\hat{F}_{\mathrm{s}}}{\partial z} = g_{\mathrm{s}}(\hat{F}_{\mathrm{s}}^{\dagger}\hat{F} + \hat{B}^{\dagger}\hat{B})\hat{F}_{\mathrm{s}} - \gamma_{\mathrm{s}}\hat{F} + \hat{N}_{F_{\mathrm{s}}}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\hat{B}_{\mathrm{s}}}{\partial t} + v_{\mathrm{gs}}\frac{\partial\hat{B}_{\mathrm{s}}}{\partial z} = g_{\mathrm{s}}(\hat{F}^{\dagger}\hat{F} + \hat{B}^{\dagger}\hat{B})\hat{B}_{\mathrm{s}} - \gamma_{\mathrm{s}}\hat{B} + \hat{N}_{B_{\mathrm{s}}}, \quad (5)$$

где g_{s} – коэффициент усиления стоксовых волн; $g = g_{\mathrm{s}}\omega_{\mathrm{p}}/\omega_{\mathrm{s}}$; ω_{p} и ω_{s} – частоты волны накачки и стоксовой волны; γ и γ_{s} – коэффициенты потерь на частотах накачки и стоксовой волны; v_{g} и v_{gs} – групповые скорости волны накачки и стоксовой волны; $\hat{N}_X$ – источники флуктуаций, связанные с потерями в среде, потерями на зеркалах и ВКР-усилением.

2.2. Метод «обратного» распространения

Решение системы уравнений (2)–(5) для операторов поля представляет собой довольно сложную задачу, т.к. размерность пространства, в котором действует оператор, весьма велика и определяется числом продольных мод и числом квантов в каждой моде. Существует метод, основанный на представлении операторов поля в виде суммы «классической» и квантовых частей, причем квантовая часть рассматривается как малое возмущение [21]. Этот метод успешно применялся в работах по изучению квантовых флуктуаций при распространении оптических солитонов [22–24] и при решении близких задач, которые сводятся к анализу распространения коротких световых импульсов в нелинейных средах с керровской нелинейностью, дисперсией, усилением и потерями [25, 26]. Характерная особенность этих задач – распространение импульсов (одного или нескольких) в одном направлении. Это позволяет ввести систему координат, бегущую вместе с импульсом ($z, t - z/v_g$), и в качестве эволюционной переменной использовать координату z. Поскольку в волоконном лазере с зеркалами на торцах собственными продольными модами служат стоячие волны (или пара встречных бегущих волн, связанных через отражения на зеркалах), то в качестве эволюционной переменной удобно выбрать время t. При этом производные по z не исключаются при замене времени t текущим временем импульса, а также существенными являются граничные условия. Дополнительная сложность – наличие четырех связанных волн, квантовые операторы которых действуют на различные векторы состояний. Поэтому схема с обратным распространением должна быть изменена соответствующим образом.

Согласно результатам работ [21, 24], необходимо выделить в каждом операторе полей $\hat{X}(z,t)$ классическое поле $X(z,t)$ и оператор возмущения $\hat{u}_X(z,t)$: $\hat{X} = X + \hat{u}_X(z,t)$, причем все квантовые свойства описываются $\hat{u}_X$. При условии малости возмущения $\int dz X^* X \gg \langle |\hat{u}_X^\dagger \hat{u}_X| \rangle$ можно перейти к уравнениям для возмущений $\hat{f}, \hat{b}, \hat{f}_s, \hat{b}_s$, в которых следует заменить $\hat{X}$ классическими полями X. Эти классические поля подчиняются уравнениям (2)–(5), где убраны символы операторов и нет источников шумов. Граничные условия можно записать отдельно для линейного и кольцевого резонаторов.

2.3. Линейный резонатор

Предположим, что отрезок волокна длиной L возбуждается слева и справа и на правом и левом концах возможно отражение волн (стоксовых). Тогда

$$F_s(0,t) = \sqrt{R_{\text{left}}}\, B_s(0,t), \quad B_s(L,t) = \sqrt{R_{\text{right}}}\, F_s(L,t), \tag{6}$$

$$F(0,t) = \sqrt{R_{\text{left}}}\, B(0,t) + \sqrt{W_{\text{left}}(t)}\,,$$
$$B(L,t) = \sqrt{R_{\text{right}}}\, F(L,t) + \sqrt{W_{\text{right}}(t)}\,. \tag{7}$$

Здесь R_{left} и R_{right} – коэффициенты отражения по мощности на левом и правом концах волокна соответственно; W_{left} и W_{right} – мощности накачки; β и β_s – постоянные распространения для волн накачки и стоксовых волн.

2.4. Кольцевой резонатор

Предположим, что отрезок волокна длиной L свернут в кольцо и через WDM-ответвитель возбуждается волнами, распространяющимися в кольце по часовой стрелке (волна F) и против нее (волна B). Предположим также, что ответвитель не идеальный, что приводит к связи встречных стоксовых волн, а на частоте накачки отражений нет. Тогда

$$F_s(0,t) = \sqrt{R}\, B_s(0,t) + \sqrt{1-R}\, F_s(L,t),$$

$$B_s(L,t) = -\sqrt{R}\, F_s(L,t) + \sqrt{1-R}\, B_s(0,t), \tag{8}$$

$$F(0,t) = F(L,t) + \sqrt{W_{\text{left}}(t)}, \;\; B(L,t) = B(0,t) + \sqrt{W_{\text{right}}(t)}\,.$$

Для операторов $\hat{f}, \hat{b}, \hat{f}_s, \hat{b}_s$ граничные условия те же. Для этих операторов получаются линейные уравнения, которые можно записать в компактном виде:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \hat{P}\hat{u} + \hat{Q}\hat{u}^\dagger + \hat{N}\,, \tag{9}$$

где

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_s \\ \hat{b}_s \end{pmatrix}; \;\; P_s = |F_s|^2 + |B_s|^2, \;\; P = |F|^2 + |B|^2; \;\; \hat{P} =$$

$$\begin{pmatrix} -v_g \frac{\partial}{\partial z} - \gamma - gP_s & 0 & -gFF_s^* & -g_s FB_s^* \\ 0 & v_g \frac{\partial}{\partial z} - \gamma - gP_s & -gBF_s^* & -g_s BB_s^* \\ g_s F^* F_s & gB^* F_s & -v_{gs}\frac{\partial}{\partial z} - \gamma_s + gP & 0 \\ g_s F^* B_s & gB^* B_s & 0 & v_{gs}\frac{\partial}{\partial z} - \gamma_s + gP \end{pmatrix};$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -gFF_s & -g_s FB_s \\ 0 & 0 & -gBF_s & -g_s BB_s \\ gFF_s & g_s BF_s & 0 & 0 \\ gFB_s & g_s BB_s & 0 & 0 \end{pmatrix}; \;\; \hat{N} = \begin{pmatrix} \hat{N}_F \\ \hat{N}_B \\ \hat{N}_{F_s} \\ \hat{N}_{B_s} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что вследствие граничных условий между операторами $\hat{f}, \hat{b}$ и $\hat{f}_s, \hat{b}_s$ существует линейная связь. Матрица $\hat{P}$ – антиэрмитова, а $\hat{Q}$ – антисимметрична.

Для выполнения стандартных коммутационных соотношений для операторов, как обычно [20, 21], нужно ввести ограничение на источники шума. Следуя [21], нетрудно получить выражения

$$\left[\hat{N}_X(t,z_1), \hat{N}_Y^\dagger(t',z_2)\right] = M_X(t,z_1,z_2)\delta(t-t')\delta_{XY}\,,$$

$$\left[\hat{N}_X(t,z_1), \hat{N}_X(t',z_2)\right] = \left[\hat{N}_X^\dagger(t,z_1), \hat{N}_X^\dagger(t',z_2)\right] = 0\,,$$

$$\left[\hat{N}_X(t,z_1), \hat{N}_Y(t',z_2)\right] = \left[\hat{N}_X^\dagger(t,z_1), \hat{N}_Y^\dagger(t',z_2)\right] = 0\,, \tag{10}$$

$$M_X(t,z_1,z_2) = -\left[\hat{P}(t,z_1) - \hat{P}^*(t,z_2)\right]_{XX}\delta(z_1 - z_2)\,,$$

$$X, Y = F, B, F_s, B_s\,.$$

Кроме коммутаторов, для расчета квантовых флуктуаций нужно знать корреляционные функции

$$\langle \hat{N}_X(t_1,z_1)\hat{N}_Y^\dagger(t_2,z_2)\rangle, \;\; \langle \hat{N}_X(t_1,z_1)\hat{N}_Y(t_2,z_2)\rangle\,,$$

$$\langle \hat{N}_X^\dagger(t_1,z_1)\hat{N}_Y(t_2,z_2)\rangle, \;\; \langle \hat{N}_X^\dagger(t_1,z_1)\hat{N}_Y^\dagger(t_2,z_2)\rangle\,,$$

которые можно определить, если есть информация о физической природе шумов в рассматриваемой задаче. Например, для внутриимпульсного ВКР источники шума рассчитаны в [21].

Измеряемые в момент времени $t = T$ квантово-механические средние значения могут быть привязаны к определенной точке волокна или усреднены по всей его длине либо по выбранному отрезку. В этих случаях необходимо будет вычислять скалярные произведения вида

$$\{\mathcal{F}\,|\,u_X\} = \frac{1}{2}\int_0^L \mathrm{d}z\big[\mathcal{F}^*(z,T)\hat{u}_X(z,T) + \mathcal{F}(z,T)\hat{u}_X^\dagger(z,T)\big], \quad (11)$$

где $\mathcal{F}(z,T)$ характеризует пространственную фильтрацию в процессе измерений, причем предполагается, что эта функция нормирована. Например, оператор числа квантов в волне X есть

$$\hat{X}^\dagger\hat{X} = X(z,T)X^*(z,T) + [X(z,T)\hat{u}_X^\dagger(z,T) + \mathrm{h.c.}].$$

Отсюда следует, что нужно взять $\mathcal{F}(z,T) = X(z,T)$.

Для проведения квантово-механических усреднений будем использовать когерентные состояния, соответствующие классическим состояниям $X(z,t)$, смещенным на амплитуду классического поля [24]. Таким образом получается многомодовое вакуумное состояние $|0_X\rangle$, для которого $\langle 0_X\,|\,\hat{u}_X(z,t)\,|\,0_X\rangle = 0$. В то же время квантово-механическое среднее значение поля равно его классической части, а среднее число квантов

$$\langle n_X\rangle = \int_0^L \mathrm{d}z\,|\,X(z,t)\,|^2.$$

Для существенного упрощения вычислений интегралов вида (11) можно ввести сопряженный оператор [21, 27], используя определение

$$\{\tilde{F}\,|\,\hat{P}\hat{u}\} + \{\tilde{F}\,|\,\hat{Q}\hat{u}^\dagger\} = \{\hat{P}^{\mathrm{A}}\tilde{F}\,|\,\hat{u}\} + \{\hat{Q}^{A}\tilde{F}\,|\,\hat{u}^\dagger\},$$

где $\tilde{F}$ – диагональная матрица с элементами главной диагонали $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_b, \mathcal{F}_{f_s}, \mathcal{F}_{b_s}$. Тогда вместо решения операторного уравнения (9) со стохастическим источником необходимо решать уравнение для матрицы $\tilde{F}$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \hat{P}^{\mathrm{A}}\tilde{F} + \hat{Q}^{\mathrm{A}}\tilde{F}^*. \quad (12)$$

При этом начальное условие для нее задано при $t = T$, но ее значения должны быть известны начиная с $t = 0$, т. к. они нужны для вычисления квантовых поправок. Следовательно, это уравнение необходимо решать в обратном по t направлении. При нахождении выражений для сопряженного оператора можно использовать интегрирование по частям. Нетрудно получить, что $\hat{P}^{\mathrm{A}} = \hat{P}$ с одновременной заменой знаков у производных по z и $\hat{Q}^{\mathrm{A}} = -\hat{Q}$, причем нужно выбирать $\mathcal{F}_X(0,T) = \mathcal{F}_X(L,T) = 0$. В силу определенной произвольности выбора функций это сделать нетрудно. При таком выборе сопряженного оператора, если F удовлетворяет уравнению (12), выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\tilde{F}(z,t)\tilde{u}(z,t)\} = 0.$$

Из него следует выражение для измеряемых средних:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\mathcal{F}_X\,|\,\hat{u}_X\} = \{\mathcal{F}_X\,|\,\hat{N}_X\}. \quad (13)$$

Это дает соотношение

$$\{\mathcal{F}_X(z,T)\,|\,\hat{u}_X(z,T)\} = \{\mathcal{F}_X(z,0)\,|\,\hat{u}_X(z,0)\} + \int_0^T \mathrm{d}t\,\{\mathcal{F}_X(z,t)\,|\,\hat{N}_X(z,t)\}. \quad (14)$$

С помощью (13), (14) можно получить все необходимые для вычисления квантовых флуктуаций выражения, аналогичные полученным в [21]:

$$\langle \Delta n_X^2\rangle|_{t=T} = \langle \Delta n_X^2(z,0)\rangle|_{t=0} + \frac{1}{4}\int_0^T\int_0^T\int_0^L\int_0^L \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \times[\mathcal{F}_{1X}^*\mathcal{F}_{2X}^*\langle N_{1X}N_{2X}\rangle + \mathcal{F}_{1X}\mathcal{F}_{2X}^*\langle N_{1X}^\dagger N_{2X}\rangle] + \mathrm{h.c.} \quad (15)$$

Здесь индексами 1 и 2 в подынтегральном выражении отмечены аргументы z_1, t_1 и z_2, t_2, а выражения для $\mathcal{F}$ соответствуют нормированным классическим амплитудам полей. Например

$$\mathcal{F}_f(z,T) = \frac{F(z,T)}{\sqrt{\int \mathrm{d}z\,|\,F(z,T)\,|^2}}.$$

3. Метод интегрирования

Аналитических решений уравнений для классических полей в общем случае нет, поэтому в работе применялось численное моделирование для расчета как классической части поля, так и квантовых неопределенностей (15). В расчетах удобно использовать нормированные координаты $Z = z/L$ и $T = tv_{\mathrm{g}}/L$, а также нормировать амплитуды на $\sqrt{W}$. Тогда в уравнениях появляются безразмерные линейные усиление и поглощение: $gL, \gamma L, \gamma_{\mathrm{s}}L$.

Уравнения (2)–(5) представляют собой уравнения переноса: $(\partial/\partial t \pm \partial/\partial z)\,U(z,t) = V(z,t)$ (знак «+» относится к волне, распространяющейся в положительном направлении, знак «–» – в отрицательном), которые удобно интегрировать численно с использованием схемы Куранта–Изааксона–Рис [18]:

$$U(z,t) \to U(z_m,t_n) = U_{m\,n},$$

$$z_m - z_{m-1} = \mathrm{d}z,\;\; t_n - t_{n-1} = \mathrm{d}t,\;\; \sigma = \mathrm{d}t/\mathrm{d}z,\;\; \sigma \le 1,$$

$$U_{m\,n+1} = (1-\sigma)\,U_{m\,n} + \sigma U_{m\pm1\,n} + V_{m\,n}\mathrm{d}t.$$

4. Результаты расчетов

При проведении численных расчетов использовались следующие параметры: $g_{\mathrm{s}} = 0.6$ км$^{-1}\cdot$Вт$^{-1}$, $\gamma = 0.055$ км$^{-1}$, $\gamma_{\mathrm{s}} = 0.046$ км$^{-1}$, $L = 22.5$ км [13]. При такой длине волокна и умеренных интенсивностях накачки, не превышающих порога возникновения стоксовых волн второго порядка, можно достичь значений $g_{\mathrm{s}}P/\gamma$, примерно равных 100. Также можно получить режимы, в которых излучение накачки практически полностью поглощается в волокне и, кроме того, указанная длина волокна соответствует использованной в эксперименте [13]. При меньших длинах волокна для появления релаксационных колебаний [2] необходимы бо́льшие интенсивности накачки. При бо́льших длинах волокна наблюдаемые режимы качественно подобны режимам при $L = 22.5$ км. Поскольку спонтанное комбинационное рассеяние существенно только в областях, где интенсивности стоксовых волн малы (т.е. на концах волокна), то его вклад моделировался подсветкой с мощностью 10^{-5} Вт соответствующих торцов: для волны F – левого торца волокна, для волны B – правого. Было проверено, что вариации подсветки на этом уровне мощности не влияют на динамику системы. Также было обнаружено, что рассеяние $\sim 10^{-4}$ км$^{-1}$ не влияет существенно на динамику и влияние рассеяния аналогично влиянию подсветки. Поэтому рассеяние не учитывалось. В то же время существенным для динамики оказывается наличие отражений на торцах волокна. Во-первых, если излучение накачки не полностью поглотилось на длине волокна, то появляются отраженная волна накачки и соответствующее ей усиление на встречной волне. Во-вторых, интенсивность отраженной от торца стоксовой волны может превышать интенсивность подсветки, что существенно для развития релаксационных колебаний.

Предполагалось, что при $t = 0$ происходит мгновенное включение поля накачки. Волна накачки распространяется вдоль оси z. Вместе с ней распространяется, непрерывно усиливаясь, стоксова попутная волна. В тех местах, до которых дошла волна накачки, появляется встречная стоксова волна. Обе стоксовы волны истощают накачку. Переходный процесс продолжается в течение ~ 10 проходов по волокну.

Поскольку характерные времена и пространственные масштабы изменения полей в длинных волокнах (порядка 1 км и более) с накачкой излучением с постоянной интенсивностью на входе в волокно лежат в диапазонах микросекунд и сотен метров, то дисперсией можно пренебречь.

4.1. Частный случай. ВКР-усилитель

Рассмотрим упрощенную ситуацию, когда в волокно длиной L вводятся импульс накачки и импульс на стоксовой частоте. В этом случае отражений на границах нет, а граничные условия таковы:

$$F(0,t) = \sqrt{W(t)}, \quad F_{\mathrm{s}}(0,t) = \sqrt{W_{\mathrm{s}}(t)}.$$

Уравнения для классических полей представим в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t} + v_{\mathrm{g}}\frac{\partial F}{\partial z} = -\gamma F - g_{\mathrm{s}}|F_{\mathrm{s}}|^2 F, \\ &\frac{\partial F_{\mathrm{s}}}{\partial t} + v_{\mathrm{gs}}\frac{\partial F_{\mathrm{s}}}{\partial z} = -\gamma_{\mathrm{s}}\hat{F} + g|F|^2 F_{\mathrm{s}}, \end{aligned} \qquad (16)$$

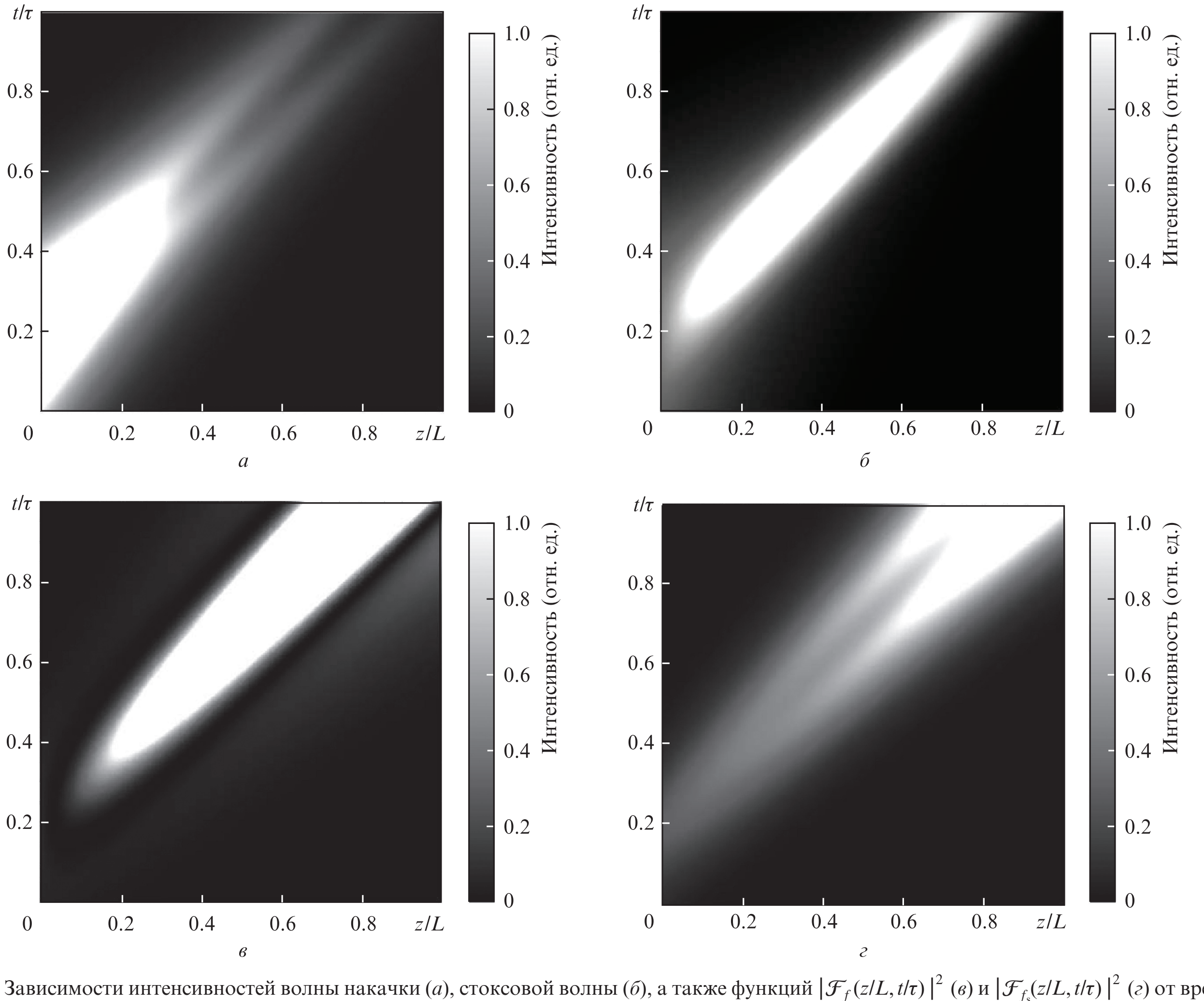

Рис.1. Зависимости интенсивностей волны накачки (*а*), стоксовой волны (*б*), а также функций $|\mathcal{F}_f(z/L, t/\tau)|^2$ (*в*) и $|\mathcal{F}_{f_s}(z/L, t/\tau)|^2$ (*г*) от времени и координаты при $g = 0.6$ км$^{-1}\cdot$Вт$^{-1}$, $g_{\mathrm{s}} = 0.553$ км$^{-1}\cdot$Вт$^{-1}$, нормированных мощностях волны накачки и стоксовой волны $W(t/\tau) = \mathrm{sech}(t/\tau)$ и $W_{\mathrm{s}}(t/\tau) = 0.1\mathrm{sech}(t/\tau)$, $\gamma = 0.055$ км$^{-1}$, $\gamma_{\mathrm{s}} = 0.046$ км$^{-1}$, $L = 22.5$ км.

уравнения для $\hat{f}, \hat{f}_s$ – в виде

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = -v_g \frac{\partial \hat{f}}{\partial z} - \gamma \hat{f} - g_s |F_s|^2 \hat{f} - g_s F F_s^* \hat{f}_s - g_s F F_s \hat{f}_s^{\dagger},$$

$$\frac{\partial \hat{f}_s}{\partial t} = -v_{gs} \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial z} - \gamma \hat{f}_s + g |F|^2 \hat{f}_s - g F_s F^* \hat{f} + g F_s F \hat{f}^{\dagger}, \qquad (17)$$

а уравнения для $\mathcal{F}_f, \mathcal{F}_{f_s}$ – в виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}_f}{\partial t} = v_g \frac{\partial \mathcal{F}_f}{\partial z} - \gamma \mathcal{F}_f - g_s |F_s|^2 \mathcal{F}_f - g_s F F_s^* \mathcal{F}_{f_s} + g_s F F_s \mathcal{F}_{f_s}^*,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{f_s}}{\partial t} = v_{gs} \frac{\partial \mathcal{F}_{f_s}}{\partial z} - \gamma \mathcal{F}_{f_s} + g |F|^2 \mathcal{F}_{f_s} + g F_s F^* \mathcal{F}_f - g F_s F \mathcal{F}_{f_s}^*. \qquad (18)$$

В качестве начальных условий для (18) выберем условия $\mathcal{F}_f(z,T) = F(z,T)$, $\mathcal{F}_{f_s} = F_s(z,T)$ и численно определим зависимости $\mathcal{F}_f(z,t)$ и $\mathcal{F}_{f_s}(z,t)$.

На рис.1 показаны пространственно-временные зависимости интенсивностей волны накачки, стоксовой волны, а также функций $|\mathcal{F}_f(z/L,t/\tau)|^2$ и $|\mathcal{F}_{f_s}(z/L,t/\tau)|^2$, где τ – длительность импульса накачки. Видно, что появление стоксова импульса приводит к истощению накачки, что выражается в возникновении провала на хвосте импульса накачки.

На рис.2 приведены зависимости от времени уровня квантовых флуктуаций волны накачки и стоксовой волны по отношению к начальному уровню флуктуаций на входе в волокно в предположении, что поля на входе находятся в когерентном состоянии. Видно, что на расстояниях, соответствующих времени пробега 0.2τ, стоксова волна имеет уровень квантовых флуктуаций примерно на 3 дБ меньше, чем на входе. При дальнейшем увеличении времени пробега уровень флуктуаций восстанавливается и продолжает расти, достигая уровня, на 3 дБ превышающего уровень начальных флуктуаций, на расстоянии, соответствующем времени пробега 0.35τ. Это означает, что существует оптимальная длина ВКР-усилителя. Появление минимума уровня квантовых флуктуаций можно объяснить тем, что уровень шума увеличивается пропорционально числу фотонов. Относительные флуктуации уменьшаются с ростом числа фотонов, поэтому при истощении накачки уровень квантовых флуктуаций возрастает, что и показано на рис.2. С увеличением числа фотонов в стоксовой волне относительные флуктуации числа квантов уменьшаются, а затем начинают возрастать из-за роста уровня флуктуаций волны накачки. Эти результаты качественно соответствуют результатам работы [28], в которой квантовые флуктуации рассчитывались другими методами.

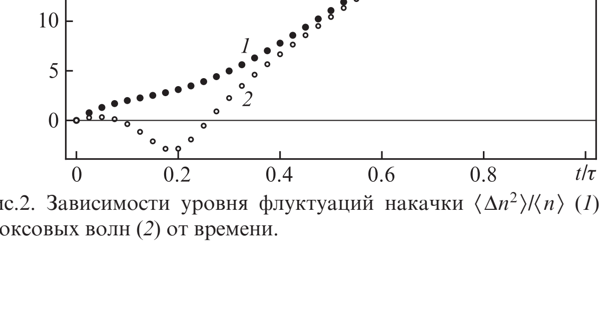

Рис.2. Зависимости уровня флуктуаций накачки $\langle \Delta n^2 \rangle / \langle n \rangle$ (*1*) и стоксовых волн (*2*) от времени.

5. Заключение

В настоящей работе представлены результаты численного моделирования нелинейной динамики излучения в волоконных ВКР-лазерах и особенностей проявления нестабильностей режима ВКР-генерации. Применение при численном моделировании приемов, используемых в теории переноса, позволило предложить и реализовать эффективный численный алгоритм, дающий возможность прослеживать динамику лазерной система на больших временах, соответствующих десяткам и сотням тысяч проходов по резонатору.

Результаты, касающиеся применений длинных кольцевых ВКР-лазеров, получены при частичном финансировании из средств проекта 9.2108.2017/ПЧ, выполняемого по заданию Министерства образования и науки РФ. Исследования квантовых флуктуаций в ВКР-усилителях/ ВКР-лазерах проведены при поддержке РНФ (грант №17-12-01564).

1. Agraval G.P. *Nonliner Fiber Optics* (Waltham: Academic Press, 2013).
2. Jhonson R.V., Marburger J.H. *Phys. Rev. A*, **4**, 1175 (1971).
3. Bar-Joseph I. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2**, 1606 (1985).
4. Narum P. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**, 623 (1988).
5. Мельников Л.А., Мажирина Ю.А. *Квантовая электроника*, **47**, 1083 (2017) [*Quantum Electron*., **47**, 1083 (2017)].
6. Ania-Castañón J.D. et al. *Phys. Rev. Lett*., **101**, 123903 (2008).
7. Melnikov L.A. et al. *Proc. Symposium Gyro Technology* (Karlsruhe, Germany, 2011, Vol. 8, p.7).
8. Desurvire E., Kim B., Fesler K., Shaw H. *J. Lightwave Technol.*, **47**, 481 (1988).
9. Churkin D.V. et al. *Nat. Commun*., **6**, 6214 (2015).
10. Churkin D.V. et al. *Nat. Commun*., **6**, 7004 (2015).
11. Turitsyna E.G. et al. *Nat. Photonics*, **7**, 783 (2013).
12. Aragoneses A. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 033902 (2016).
13. Мажирина Ю.А. и др. *Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика*, **22**, 73 (2014).
14. Perego A.M. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 028701 (2016).
15. Tarasov N. et al. *Nat. Commun*.,**7**, 12441 (2016).
16. Konukhov A.I. et al. *Laser Phys*., **12**, 055103 (2015).
17. Conforti M. el al. *Phys. Rev. Lett*., **116**, 028701 (2016).
18. Courant R., Isaacson E., Rees M. *Commun. Pure Appl. Math*., **5**, 243 (1952).
19. Лав Дж., Снайдер А. *Теория оптических волноводов* (М.: Радио и связь, 1987).
20. Scully M.O., Sargent M.III, Lamb W.E. *Laser Physics* (Deading, Mass.: Addison-Wesley, 1974).
21. Lai Y., Yu S.-S. *Phys. Rev. A*, **51**, 817 (1995).
22. Lai Y., Haus H.A. *Phys. Rev. A*, **40**, 844 (1989).
23. Mecozzi A., Kumar P. *Opt. Lett.*, **22** (16), 1232 (1997).
24. Matsko A.B., Kozlov V.V. *Phys. Rev. A*, **62**, 033811 (2000).
25. Lee R.-K., Lai Y., Malomed B.A. *Phys. Rev. A*, **70** (6), 063817 (2004).
26. Lee R.-K., Lai Y., Malomed B.A. *Phys. Rev. A*, **71** (1), 013816 (2005).
27. Haus H., Islam M. *IEEE J. Quantum Electron.*, **21** (8), 1172 (1985).
28. Miranowicz A., Kielich A., in *Advances in Chemical Physics* (New York: Wiley, 1994, Vol. 85 (III), pp 531 – 626).