Обратная задача поляриметрии для сред с ортогональными собственными поляризациями

С.Н.Савенков, А.В.Приезжев, Е.А.Оберемок, И.С.Коломиец, А.С.Климов

Рассмотрена проблема неоднозначности обратной задачи поляриметрии для однородной анизотропной среды, характеризующейся ортогональными собственными поляризациями, порождаемая некоммутативностью матриц Джонса и Мюллера элементарных видов анизотропии. Исследованы различия двух вариантов условий ортогональности собственных поляризаций произвольной анизотропной среды, существование которых обусловлено указанной неоднозначностью. Полученные результаты могут быть использованы при анализе адекватности решения обратной задачи данного класса и в задачах синтеза поляризационных элементов с заданными характеристиками.

Ключевые слова: *обратная задача поляриметрии, матрица Джонса, фазовая анизотропия, амплитудная анизотропия, собственные поляризации.*

1. Введение

Важнейшей проблемой современной поляриметрии является решение обратной задачи. Последняя определяется как задача, в которой характеристики излучения до и после взаимодействия со средой частично или полностью известны (или могут быть измерены) и необходимо извлечь максимум информации об исследуемой среде.

В настоящей работе мы обращаемся к классу обратных задач, в которых при взаимодействии поляризованного электромагнитного излучения с исследуемой средой не возникает деполяризации. В этом классе обратных задач максимально возможный объем информации, необходимой для определения характеристик среды, содержится в матрице Джонса размером 2×2 или в матрице Мюллера размером 4×4 [1, 2], между которыми существует взаимно однозначное соответствие [2]. При этом состояния поляризации излучения описываются вектором Джонса 2×1 или вектором Стокса 4×1.

В работах [3–5] данная проблема исследовалась с использованием модели произвольной однородной анизотропной среды на основе обобщенной теоремы эквивалентности, согласно которой [3] любая комбинация поляризационных элементов с линейной и круговой фазовой и амплитудной анизотропией эквивалентна оптической системе, содержащей по одному элементу каждого сорта:

$$T = T^{\mathrm{LP}}(\delta,\alpha)T^{\mathrm{CP}}(\varphi)T^{\mathrm{LA}}(P,\theta)T^{\mathrm{CA}}(R), \qquad (1)$$

где T – результирующая матрица рассматриваемой среды. Матрицы T^{LP}, T^{CP}, T^{LA}, T^{CA} описывают четыре, в соответствии с терминологией Джонса [6], элементарных вида анизотропии: линейную (LP) и круговую (CP) фазовую анизотропию (т. е. случай, когда электромагнитное излучение с двумя собственными ортогональными линейными (циркулярными) поляризациями распространяется в среде с разными фазовыми скоростями), а также линейную (LA) и круговую (CA) амплитудную анизотропию (когда излучение с двумя собственными ортогональными линейными (циркулярными) поляризациями по-разному поглощается). Выражения для этих матриц имеют следующий вид:

$$T^{\mathrm{LP}} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \exp(-\mathrm{i}\delta)\sin^2\alpha & [1-\exp(-\mathrm{i}\delta)]\cos\alpha\sin\alpha \\ [1-\exp(-\mathrm{i}\delta)]\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \exp(-\mathrm{i}\delta)\cos^2\alpha \end{pmatrix},$$

$$T^{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$T^{\mathrm{LA}} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + P\sin^2\theta & (1-P)\cos\theta\sin\theta \\ (1-P)\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + P\cos^2\theta \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$T^{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}R \\ \mathrm{i}R & 1 \end{pmatrix},$$

где δ и α – величина и азимут ориентации линейной фазовой анизотропии; φ – величина круговой фазовой анизотропии; P и θ – величина и азимут ориентации линейной амплитудной анизотропии; R – величина круговой амплитудной анизотропии.

Как известно, матрицы элементарных видов анизотропии (2) не коммутируют [2]. Это порождает один из важнейших контекстов неоднозначности решения обратной задачи поляриметрии для однородных анизотропных недеполяризующих сред.

В работе [5] было показано, что рассматриваемая обратная задача в общем случае имеет два решения, связан-

С.Н.Савенков, Е.А.Оберемок, И.С.Коломиец, А.С.Климов. Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина, 03127 Киев, просп. Глушкова, 4г; e-mail: sns@univ.kiev.ua
А.В.Приезжев. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет и Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, Россия, 119991 Москва, Воробьевы горы; e-mail: avp2@mail.ru

Поступила в редакцию 28 сентября 2018 г., после доработки – 2 ноября 2018 г.

ные с существованием двух различных поляризационных базисов (порядков перемножения матриц элементарных видов анизотропии (2)):

$$T^{\mathrm{CP}}T^{\mathrm{LP}}T^{\mathrm{CA}}T^{\mathrm{LA}}, \tag{3а}$$

$$T^{\mathrm{CP}}T^{\mathrm{LP}}T^{\mathrm{LA}}T^{\mathrm{CA}}. \tag{3б}$$

Опираясь на этот результат, авторы [5] исследовали, как свойства (азимуты и эллиптичности) собственных поляризаций среды зависят от параметров амплитудной анизотропии для случая эрмитова дихроизма.

Еще одной важнейшей проблемой поляриметрии в рассматриваемом контексте неоднозначности решения обратной задачи является исследование условий, при которых собственные поляризации однородной анизотропной среды ортогональны. С одной стороны, как видно из (2), все (!) четыре элементарных вида анизотропии сами по себе характеризуются ортогональными собственными поляризациями. Ситуация же с различными комбинациями элементарных видов анизотропии значительно сложнее и разнообразнее. Ранее самим Джонсом было показано в виде так называемой первой теоремы эквивалентности [6], что произвольная комбинация поляризационных элементов с линейной (T^{LP}) и круговой (T^{CP}) фазовой анизотропией всегда характеризуется ортогональными, в общем случае эллиптическими собственными поляризациями. Поскольку матрицы Джонса и Мюллера круговой и линейной фазовой анизотропии являются унитарными, то подобная теорема существует и в линейной алгебре [7], в том смысле, что произведение унитарных матриц всегда есть матрица унитарная. Примечательно в данном случае то, что подобной теоремы для произведения эрмитовых матриц, каковыми являются матрицы линейного и кругового дихроизма T^{LA} и T^{CA} в (2), не существует. Это означает, что в поляриметрии нет вариантов произведения матриц T^{LA} и T^{CA}, которые характеризовались бы ортогональными собственными поляризациями.

В классе сред, характеризующихся двумя элементарными видами анизотропии, в контексте ортогональности собственных поляризаций исследуемой среды остается еще упомянуть лишь два случая. В первом случае среда характеризуется одновременно круговой фазовой и круговой амплитудной анизотропией, что в рамках мультипликативного моделирования соответствует варианту второй теоремы эквивалентности Джонса [6]. Такая среда или эквивалентная ей комбинация поляризационных элементов всегда, очевидно, характеризуется ортогональными круговыми собственными поляризациями. Во втором случае среда характеризуется линейной фазовой и амплитудной анизотропией с совпадающими азимутами ориентации [1].

В работе [8] для поляризационного базиса (3а) нами получены условия ортогональности собственных поляризаций среды в общем случае, т. е. когда исследуемая среда характеризуется всеми четырьмя элементарными видами анизотропии. Цель настоящей работы – получить подобные общие условия ортогональности собственных поляризаций произвольной анизотропной среды для поляризационного базиса (3б) и провести сравнительный анализ этих условий.

2. Условия ортогональности произвольной анизотропной среды

Как показано в [8] для матричной модели Джонса в базисе (3а), условия ортогональности собственных поляризаций для произвольной однородной анизотропной среды имеют вид

$$\begin{aligned}
&(1-P)\{(1+R^2)\cos[2(\alpha-\theta-\varphi)] \\
&\quad -(1-R^2)\cos[2(\alpha-\theta)]\}=0, \\
&2R\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)=\left(\frac{1-P}{1+P}\right)\{(1-R^2)\sin[2(\alpha-\theta)] \\
&\quad -(1+R^2)\sin[2(\alpha-\theta-\varphi)]\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Используя рассуждения и действия, аналогичные приведенным в работе [8], получаем следующие условия ортогональности собственных поляризаций для базиса (3б):

$$\begin{aligned}
&(1-P)\{(1+R^2)\cos[2(\alpha-\theta)] \\
&\quad -(1-R^2)\cos[2(\alpha-\theta-\varphi)]\}=0, \\
&2R\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)=\left(\frac{1-P}{1+P}\right)\{(1+R^2)\sin[2(\alpha-\theta)] \\
&\quad -(1-R^2)\sin[2(\alpha-\theta-\varphi)]\}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Видно, что условия ортогональности (4) и (5) структурно весьма близки, их отличия заключаются в следующем: разные аргументы косинусов в первых уравнениях (там, где в одном базисе есть величина $-\varphi$, в другом базисе она отсутствует) и разные знаки перед величиной R^2 во вторых уравнениях.

3. Сравнительный анализ полученных решений

Дальнейший анализ проведем для двух случаев: $\alpha=\theta$ и $\alpha\neq\theta$, т. е. равенства и неравенства азимутов ориентации линейной фазовой и амплитудной анизотропии.

3.1. Случай $\alpha=\theta$

В этом случае системы уравнений (4) и (5) принимают вид

$$\begin{aligned}
&(1-P)[-1+R^2+(1+R^2)\cos 2\varphi]=0, \\
&-\frac{(-1+P)(1+R^2)\cos\varphi\sin\varphi}{1+P}-R\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)=0,
\end{aligned} \tag{6а}$$

$$\begin{aligned}
&-(1+P)[1+R^2+(-1+R^2)\cos 2\varphi]=0, \\
&\frac{(-1+P)(-1+R^2)\cos\varphi\sin\varphi}{1+P}-R\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)=0.
\end{aligned} \tag{6б}$$

Общее (в том смысле, что рассматриваемая среда характеризуется всеми четырьмя элементарными видами анизотропии одновременно) решение системы (6а) относительно параметров фазовой анизотропии было получено в работе [9] и имеет следующий вид:

$$\delta = \pm 2\arctan\left(\frac{|P-1|}{1+P}\right),$$
$$\varphi = \pm \arccos\left(\mp\frac{1}{\sqrt{1+R^2}}\right). \qquad (7)$$

В то же время, как показывает анализ системы (6б), аналогичный проведенному нами для системы (6а) в работе [9], подобного общего решения для нее не существует.

В качестве примера, иллюстрирующего данный результат, рассмотрим решение обратной задачи в базисах (3а) и (3б) для следующей матрицы Джонса:

$$T = \begin{pmatrix} 0.96 - \mathrm{i}0.2 & -0.23 - \mathrm{i}0.47 \\ 0.36 + \mathrm{i}0.37 & 0.6 + \mathrm{i}0.05 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

В базисе (3а) имеем $\delta = -20°$, $\alpha = 10°$, $\varphi = 26.6°$, $P = 0.7$, $\theta = 10°$, $R = 0.5$, а в базисе (3б) $\delta = -31.3°$, $\alpha = -14.4°$, $\varphi = -24.4°$, $P = 0.56$, $\theta = 10°$, $R = 0.45$. Таким образом, в первом случае $\alpha = \theta$ и существующее решение соответствует условиям (7). Во втором случае решение тоже существует, но при этом $\alpha \neq \theta$.

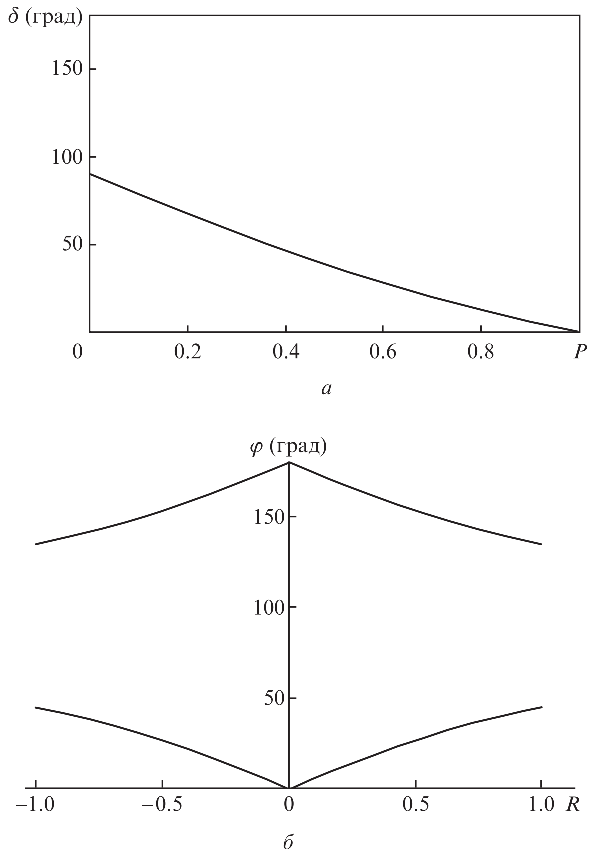


Рис.1. Условия ортогональности собственных поляризаций (7): зависимости величины линейной фазовой анизотропии δ от величины линейной амплитудной анизотропии P (*а*) и величины круговой фазовой анизотропии φ от величины круговой амплитудной анизотропии R (*б*).

Для обеих систем, (6а) и (6б), решений в случае, когда рассматриваемая среда одновременно характеризуется любыми тремя элементарными видами анизотропии из (2), также не существует.

Теперь обратимся собственно к условиям (7). Видно, что при совпадении азимутов ориентации фазовой и амплитудной анизотропии величина фазовой линейной анизотропии δ полностью определяется только значением параметра P, т. е. величиной амплитудной линейной анизотропии, а величина круговой фазовой анизотропии φ полностью определяется только значением параметра R, т. е. величиной круговой амплитудной анизотропии. Графическая интерпретация условий (7) представлена на рис.1.

Важным в данном случае является то, что, как следует из рис.1,*а*, величина линейной фазовой анизотропии δ при изменении величины линейной амплитудной анизотропии P во всем диапазоне ее физически приемлемых значений может достигать значений только в интервале 0–90°, значения же δ, превышающие 90°, получить нельзя. Из рис.1,*б* следует, что при изменении параметра R во всем диапазоне физически приемлемых значений величина φ может изменяться только в интервалах 0–45° и 135°–180°. Таким образом, для параметров δ и φ для ортогональности собственных поляризаций существуют «запрещенные зоны» значений в интервалах 90°–180° и 45°–135° соответственно. Следует отметить, что ширины запрещенных зон равны π в обоих случаях.

Отметим, что условия (6а) и (6б) описывают, очевидно, все среды, характеризующиеся двумя видами анизотропии, о которых шла речь в разд.1, в том числе и такие среды, которые характеризуются линейной фазовой и амплитудной анизотропией с совпадающими азимутами ориентации.

3.2. Случай $\alpha \neq \theta$

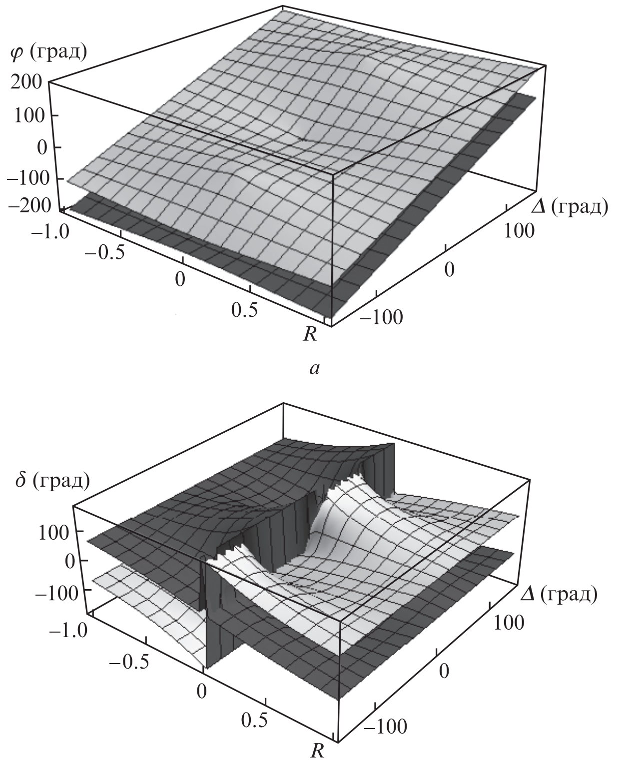
В этом случае общие решения систем (4) и (5) приобретают соответственно следующий вид:

$$\varphi = \varDelta \mp \frac{1}{2}\arccos\left[-\frac{(R^2-1)\cos 2\varDelta}{R^2+1}\right],$$
$$\delta = 2\arctan\left\{\frac{(P-1)\{(R^2-1)\sin 2\varDelta + (R^2+1)\sin[2(\varDelta-\varphi)]\}}{2R(P+1)}\right\}, \qquad (9)$$

$$\varphi = \varDelta \mp \frac{1}{2}\arccos\left[-\frac{(R^2+1)\cos 2\varDelta}{R^2-1}\right],$$
$$\delta = -2\arctan\left\{\frac{(P-1)\{(R^2+1)\sin 2\varDelta + (R^2-1)\sin[2(\varDelta-\varphi)]\}}{2R(P+1)}\right\}, \qquad (10)$$

где $\varDelta = \alpha - \theta$.

Таким образом, в случае $\alpha \neq \theta$ в обоих базисах, (3а) и (3б), существуют общие решения обратной задачи, которые представлены системами уравнений (9) и (10). Эти решения различаются знаком между R^2 и 1, а также знаком параметра δ. Графическая интерпретация условий (9) и (10) представлена на рис.2 и 3. Видно, что для базиса (3а)



а

б

Рис.2. Условия ортогональности (9): зависимости величины круговой фазовой анизотропии φ (*а*) и величины линейной фазовой анизотропии δ (*б*) от величины круговой амплитудной анизотропии R и $\Delta = \alpha - \theta$ при $P = 0.2$.

значения параметров φ и δ являются физически приемлемыми для любых значений пары параметров R и Δ, тогда как для базиса (3б) существуют запрещенные зоны значений параметров φ и δ, как и в случае $\alpha = \theta$.

Добавим, что системы (4) и (5) в случае, когда рассматриваемая среда одновременно характеризуется любыми тремя элементарными видами анизотропии из (2), имеют единственные решения [4, 5]

$$\begin{gathered}\varphi = 0, \pi, \\ \alpha = \theta \pm \frac{\pi}{4}, \\ \delta = 2\arctan\left\{\frac{R[\mp(1-P)]}{1+P}\right\},\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\varphi = 0, \pi, \\ \alpha = \theta \pm \frac{\pi}{4}, \\ \delta = 2\arctan\left\{\frac{R[\pm(1-P)]}{1+P}\right\}.\end{gathered} \tag{12}$$

Эти решения соответствуют так называемому эрмитовому дихроизму и могут рассматриваться как дихроичные полярные формы в модели анизотропной среды, основывающейся на теореме полярного разложения [10].

4. Выводы

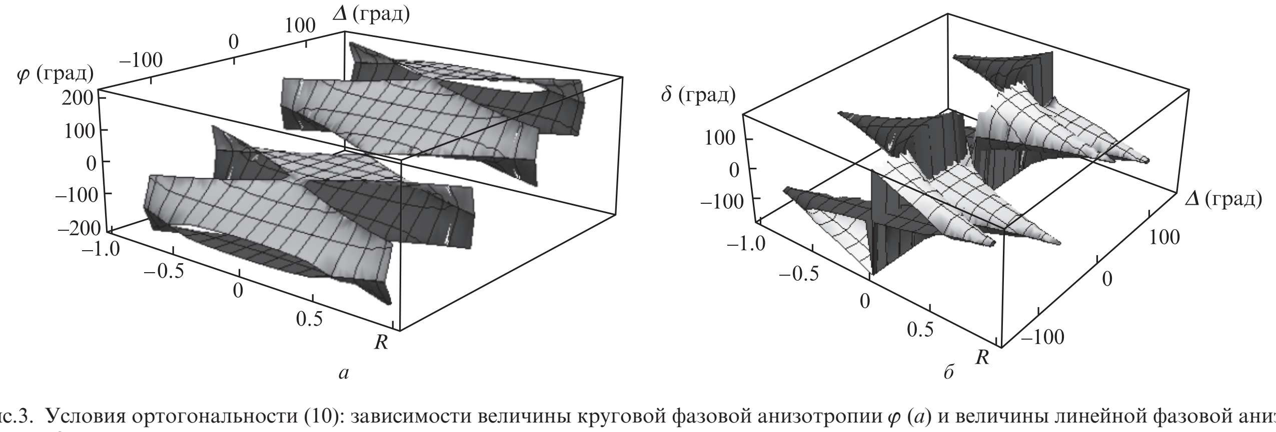
В настоящей работе рассмотрена проблема неоднозначности обратной задачи поляриметрии для однородной анизотропной среды, характеризующейся ортогональными собственными поляризациями, порождаемая некоммутативностью матриц Джонса и Мюллера элементарных видов анизотропии (2). Некоммутативность матриц Джонса и Мюллера приводит к наличию двух решений обратной задачи поляриметрии, связанных с существованием двух различных поляризационных базисов (3а) и (3б) [5].

Для поляризационного базиса (3б) найдены условия (5), при которых произвольная анизотропная среда характеризуется ортогональными собственными поляризациями. Для условий (5) и условий (4), которые были нами получены в работе [8], был проведен сравнительный анализ.

Для случая $\alpha = \theta$ показано, что общего решения для условий (5) не существует. В то же время для условий (4) такое решение есть [9]. Это означает, что если для среды с ортогональными собственными поляризациями, анизотропные свойства которой описываются некоторой матрицей Джонса, в рамках поляризационного базиса (3а) существует решение обратной задачи, содержащее все четыре элементарных вида анизотропии, то в рамках базиса (3б) всегда (!) найдется решение для данной матрицы Джонса, содержащее только три элементарных вида анизотропии.

Показано также, что в случае $\alpha = \theta$ не существует решений обратной задачи рассматриваемого класса, одновременно содержащих в базисах (3а) и (3б) по три элементарных вида анизотропии.

Получены общие решения обратной задачи (9) и (10) для случая $\alpha \neq \theta$. Характерными особенностями этих решений является то, что в них, если считать дихроичные



а *б*

Рис.3. Условия ортогональности (10): зависимости величины круговой фазовой анизотропии φ (*а*) и величины линейной фазовой анизотропии δ (*б*) от величины круговой амплитудной анизотропии R и $\Delta = \alpha - \theta$ при $P = 0.2$.

параметры P и R произвольными, величина круговой фазовой анизотропии φ зависит только от R и разности Δ азимутов ориентации линейной фазовой и амплитудной анизотропии. Величина линейной фазовой анизотропии δ зависит от всех параметров – двух, указанных выше, и P. При этом, однако, показано, что в базисе (3а) для любой пары значений параметров R и Δ могут быть найдены физически приемлемые значения параметров φ и δ, тогда как в базисе (3б) далеко не для каждой пары параметров R и Δ такие значения φ и δ существуют.

Полученные в работе результаты, с одной стороны, представляют несомненный интерес для адекватной интерпретации данных поляриметрических измерений, а с другой стороны, они могут быть использованы в задаче синтеза поляризационных элементов с заданными характеристиками.

1. Azzam R.M.A., Bashara N.M. *Elipsometry and Polarized Light* (New-York: North-Holland, Publishing Comp., 1977).
2. Gil J.J., Ossikovski R. *Polarized Light and the Mueller Matrix Approach* (New York: CRC Press, 2016).
3. Savenkov S.N., Marienko V.V., Oberemok E.A., Sydoruk O. *Phys. Rev. E*, **74**, 056607 (2006).
4. Savenkov S.N., Sydoruk O.I., Muttiah R.S. *Appl. Opt.*, **46**, 6700 (2007).
5. Савенков С.Н., Оберемок Е.А., Кущенко А.Г., Коломиец И.С., Климов А.С. *ЖПС*, **82**, 744 (2015).
6. Hurwitz H., Jones R.C. *J. Opt. Soc. Am.*, **31**, 493 (1941).
7. Воеводин В.В. *Вычислительные основы линейной алгебры* (М.: Наука, 1977).
8. Savenkov S.N., Oberemok Y.A. *Proc. SPIE*, **6272**, 697210 (2008).
9. Savenkov S., Oberemok Ye., Kolomiets I., et al. *Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti (AAPP)*, **89**, C1V89S1P082 (2011).
10. Lu S.–Y., Chipman R.A. *J. Opt. Soc. Am. A*, **13**, 1106 (1996).