# Ангармонические блоховские осцилляции в каплере из двух параллельных массивов световодов

О.В.Коровай, П.И.Хаджи, Д.А.Марков

Эффекты распространения лазерного излучения в каплере, состоящем из двух параллельных массивов световодов, изучены методом связанных мод с учетом связи данного световода с ближайшими соседями и линейной зависимости постоянной распространения от номера световода. Показано, что благодаря сложной структуре каждой из подсистем в исследуемой системе наблюдается существенное усложнение структуры пространственного распределения интенсивности света. Предсказано возникновение ограниченной в пространстве поперечной дифракции света.

Ключевые слова: ангармонические блоховские осцилляции, массив световодов, метод связанных мод.

### 1. Введение

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию линейных и нелинейных оптических эффектов в массивах связанных световодов. Эти исследования проводятся с использованием метода связанных мод с учетом связи данного световода как с ближайшими, так и с более удаленными соседями. Указанные связи приводят к появлению в системе световодов поперечной дискретной дифракции. При больших уровнях возбуждения, когда в игру вступают нелинейные эффекты, свет может распространяться вдоль световодов в виде дискретных солитонных импульсов. В таких системах возникает ряд интересных явлений, в частности блоховские осцилляции [1-13], зенеровское тунеллирование [12-14], динамическая локализация [15-19] и др. В [1,8-11] изучены блоховские осцилляции в массиве световодов при учете линейно изменяющейся в зависимости от номера световода поправки к постоянной распространения. В [12] исследованы особенности распространения света в планарных полубесконечных массивах световодов с переменной константой связи между световодами. Была предсказана возможность создания массивов Чебышева I и II рода, Лагерра, Лежандра, Якоби, Гегенбауэра.

В последнее время большой интерес представляет исследование свойств зигзагообразных массивов световодов [8–11], где важную роль в эффектах дифракции играет связь второго порядка. В [8–11] обобщены результаты работы [1] на случай зигзагообразных массивов световодов, в которых изучены ангармонические блоховские осцилляции с использованием системы уравнений для связанных мод. В этих работах найдено аналитическое выражение для траектории пучка, которая имеет осциллирующую форму. Полученные решения для траектории пучка позволяют определить периоды его осцилляций и положение точек поворота траектории.

Ангармонические блоховские осцилляции, по-видимому, могут иметь место и в более сложных оптических объектах, например в оптических волноводных массивах с произвольным законом связи световода с ближайшими и дальними соседями, в массивах массивов световодов, в системах, обладающих РТ-симметрией, и др. Из представленного краткого обзора литературы видно, что исследование особенностей распространения света в сложных системах световодов вызывает интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения и вследствие этого является актуальной задачей. Сложные геометрии массивов и использование новых материалов, таких как графен, метаматериалы, фотонные структуры, предоставляют уникальные возможности для управления распространением света и контроля за ним. Ниже мы приводим основные результаты теоретического исследования эффектов распространения света в одной из таких систем, а именно в направленном ответвителе (каплере), состоящем из двух параллельно расположенных массивов световодов, с учетом их связи с ближайшими соседями и линейной зависимости постоянной распространения от номера световода.

#### 2. Постановка задачи. Основные уравнения

Исходной для нашего рассмотрения является система уравнений для амплитуд связанных мод двух параллельных бесконечных массивов световодов (рис.1):

$$i\frac{df_n}{dz} + \beta nf_n + f_{n-1} + f_{n+1} + (\gamma + \alpha n)g_n = 0,$$
(1)
$$i\frac{dg_n}{dz} + \beta ng_n + g_{n-1} + g_{n+1} + (\gamma + \alpha n)f_n = 0,$$

где для простоты слагаемое с постоянной распространения  $\beta_0$  убрано простым экспоненциальным преобразованием;  $z = \kappa x$ ;  $\kappa$  – константа связи данного световода с ближайшими соседями; x – координата вдоль световода;  $\gamma$  – константа связи между массивами;  $\beta$  – ангармоническая поправка к постоянной распространения  $\beta_0$  в каждом из

**О.В.Коровай, Д.А.Марков.** Приднестровский государственный университет им. Т.Г.Шевченко, Молдова, MD 3300 Тирасполь, ул. 25 Октября, 128; e-mail: olesya-korovai@mail.ru

**П.И.Хаджи.** Институт прикладной физики АНМ, Молдова, МД 2028 Кишинев, ул. Академическая, 5 г

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г., после доработки – 29 мая 2018 г.



Рис.1. Схема расположения световодов двух связанных параллельных бесконечных массивов.

массивов, которая определяет разность фаз между соседними световодами массива;  $\alpha$  – аналогичная поправка, учитывающая ангармонизм связи между массивами;  $f_n$  и  $g_n$  – нормированные амплитуды полей распространяющихся мод в *n*-м световоде. Система уравнений (1) является обобщением соответствующей системы из работы [10]. В нашем случае два одинаковых массива световодов вза-имодействуют друг с другом, формируя таким образом направленный ответвитель. Будем считать, что свет с амплитудой поля  $f_0$  направляется только в нулевой световод первого массива. Поэтому начальные условия для системы (1) можно записать в виде

$$f_n|_{z=0} = f_0 \delta_{n0}, \quad g_n|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

где  $\delta_{n0}$  – символ Кронекера. Вводя далее новые функции  $u_n = f_n + g_n$  и  $v_n = f_n - g_n$ , из (1) получаем для них два независимых дифференциально-разностных уравнения:

$$i\dot{u}_{n} + (\gamma + \alpha n + \beta n)u_{n} + u_{n-1} + u_{n+1} = 0,$$

$$i\dot{v}_{n} - (\gamma + \alpha n - \beta n)v_{n} + v_{n-1} + v_{n+1} = 0,$$
(3)

с начальными условиями

$$u_n|_{z=0} = v_n|_{z=0} = f_0 \delta_{n0}.$$
 (4)

Рассмотрим сначала решение первого уравнения из (3) для функции *u<sub>n</sub>*(*z*). Полагая

$$u_n(z) = F_n(z) \exp[i(\gamma + \alpha n + \beta n)z],$$
(5)

из (3) получаем для  $F_n(z)$  уравнение вида

$$i\frac{dF_n}{dz} + F_{n-1}(z)\exp[-i(\alpha + \beta)z] + F_{n+1}(z)\exp[i(\alpha + \beta)z] = 0$$
(6)

с начальным условием  $F_n(z)|_{z=0} = f_0 \delta_{n0}$ . Воспользуемся далее фурье-преобразованием для функции  $F_n(z)$ :

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta, z) \exp(-in\theta) d\theta.$$
(7)

Подставляя (7) в (6), для фурье-образа  $F(\theta, z)$  получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}F(\theta,z)}{F(\theta,z)} = 2\mathrm{i}\cos[\theta - (\alpha + \beta)z]\mathrm{d}z,\tag{8}$$

решение которого с учетом начальных условий имеет вид

$$F(\theta, z) = \exp\left[\frac{4\mathrm{i}}{\alpha + \beta} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}z\right) \cos\left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2}z\right)\right].$$
(9)

Подставляя (9) в (7) и используя известное соотношение [20,21]

$$\exp(iz\cos\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i^k J_k(z) \exp(ik\varphi), \qquad (10)$$

где  $J_k(z)$  – функция Бесселя *k*-го порядка, находим следующее решение для функции  $F_n(z)$ :

$$F_n(z) = i^n J_n\left(\frac{4}{\alpha+\beta}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}z\right)\right) \exp\left(-in\frac{\alpha+\beta}{2}z\right).$$
(11)

Тогда функция  $u_n(z)$  в соответствии с (5) принимает вид

$$u_n(z) = i^n J_n\left(\frac{4}{\alpha+\beta}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}z\right)\right) \exp\left[i\left(\gamma+n\frac{\alpha+\beta}{2}z\right)z\right].$$
(12)

Аналогичным образом, используя второе уравнение из (3), можно получить решение и для  $v_n(z)$ :

$$v_n(z) = i^n J_n\left(\frac{4}{\alpha - \beta} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}z\right)\right) \exp\left[-i\left(\gamma + n\frac{\alpha - \beta}{2}\right)z\right].$$
(13)

Тогда окончательно решения исходных уравнений (1) для функций  $f_n(z)$  и  $g_n(z)$  будут иметь вид

$$f_n(z) = \frac{1}{2} i^n \left\{ J_n \left( \frac{4}{\alpha + \beta} \sin\left( \frac{\alpha + \beta}{2} z \right) \right) \exp\left[ i \left( \gamma + n \frac{\alpha + \beta}{2} \right) z \right] + J_n \left( \frac{4}{\alpha - \beta} \sin\left( \frac{\alpha - \beta}{2} z \right) \right) \exp\left[ -i \left( \gamma + n \frac{\alpha - \beta}{2} \right) z \right] \right\}, \quad (14)$$

$$g_n(z) = \frac{1}{2} i^n \left\{ J_n \left( \frac{4}{\alpha + \beta} \sin\left( \frac{\alpha + \beta}{2} z \right) \right) \exp\left[ i \left( \gamma + n \frac{\alpha + \beta}{2} \right) z \right] - J_n \left( \frac{4}{\alpha - \beta} \sin\left( \frac{\alpha - \beta}{2} z \right) \right) \exp\left[ -i \left( \gamma + n \frac{\alpha - \beta}{2} \right) z \right] \right\}.$$
(15)

Что касается интенсивностей распространяющихся волн  $|f_n(z)|^2$  и  $|g_n(z)|^2$ , то для них получаем выражения

$$|f_n|^2 = \frac{1}{4} \left\{ J_n^2 \left( \frac{4}{\alpha + \beta} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} z\right) \right) + J_n^2 \left( \frac{4}{\alpha - \beta} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2} z\right) \right) \\ + 2J_n \left( \frac{4}{\alpha + \beta} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} z\right) \right) J_n \left( \frac{4}{\alpha - \beta} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2} z\right) \right) \\ \times \cos[(2\gamma + n\alpha)z] \right\},$$

$$|g_n|^2 = \frac{1}{4} \left\{ J_n^2 \left( \frac{4}{\alpha + \beta} \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} z\right) \right) + J_n^2 \left( \frac{4}{\alpha - \beta} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2} z\right) \right) \right\}$$

$$(16)$$

$$-2J_n\left(\frac{4}{\alpha+\beta}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}z\right)\right)J_n\left(\frac{4}{\alpha-\beta}\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}z\right)\right)$$
$$\times\cos[(2\gamma+n\alpha)z]\Big\}.$$

Используя (16) и соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(x) = 1$$

из [22, 23], легко показать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|f_n|^2 + |g_n|^2) = f_0^2.$$
(17)

Это соотношение представляет собой закон сохранения энергии в системе: в любой точке, независимо от координаты z, сумма энергий по всем световодам обоих массивов сохраняется и равна энергии, поступающей в торец (z = 0) нулевого световода.

Полагая в (14), (15)  $\gamma = 0$  и  $\alpha = 0$  (связь первого массива со вторым отсутствует), приходим к решению для отдельного массива, полученному ранее в [1]:

$$|f_n(z)|^2 = J_n^2 \left(\frac{4}{\beta} \sin\left(\frac{\beta}{2}z\right)\right), \quad |g(z)|^2 = 0.$$
 (18)

В другом частном случае, когда только  $\alpha = 0$  (ангармонизм связи между массивами отсутствует, однако ангармонизм для каждого массива сохраняется), выражения для интенсивностей излучения в световодах имеют вид

$$\binom{|f_n|^2}{|g_n|^2} = J_n^2 \left(\frac{4}{\beta} \sin\left(\frac{\beta}{2}z\right)\right) \binom{\cos^2(\gamma z)}{\sin^2(\gamma z)}.$$
(19)

Если  $\beta = 0$  (ангармонизм связи между световодами в массиве отсутствует), для интенсивностей излучения получим выражения

$$\binom{|f_n|^2}{|g_n|^2} = J_n^2 \left(\frac{4}{\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}z\right)\right) \binom{\cos^2\left[\left(\gamma + \frac{\alpha n}{2}z\right)\right]}{\sin^2\left[\left(\gamma + \frac{\alpha n}{2}z\right)\right]}.$$
(20)

Наконец, если  $\alpha = \beta$  (ангармонизм связи между массивами и для каждого массива одинаков), имеем выражения

$$\binom{|f_n|^2}{|g_n|^2} = \frac{1}{4} \left\{ J_n \left( \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha z) \right) + J_n(2z) + 2J_n \left( \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha z) \right) J_n(2z) \begin{pmatrix} \cos[(2\gamma + \alpha n)z] \\ \sin[(2\gamma + \alpha n)z] \end{pmatrix} \right\}^2.$$
(21)

## 3. Обсуждение результатов

Рассмотрим сначала простейший случай, когда связь со световодами соседнего массива отсутствует ( $\gamma = \alpha = 0$ ). При этом накачка осуществляется только в торец нулевого световода первого массива. В данном случае излучение в световоды второго массива не поступает и, следовательно,  $|g_n(z)|^2 = 0$ . Свет распространяется только в световодах первого массива. Интенсивность света, распространяющегося в *n*-м световоде, как следует из (18), зависит от координаты *z* и от номера световода *n*. Пространственное распределение интенсивности поля *n*-го световода периодически изменяется с ростом координаты *z* вдоль оси световода (рис.2).

На рис.3 представлен первый период пространственного распределения интенсивности света в световодах массива. В нулевом (накачиваемом) световоде интенсивность света равна  $f_0^2$  в точках  $z_k = k\pi/\beta$  (k = 0, 2, 4, ...) (рис.2), т.е. пространственное распределение интенсивности света в данном световоде периодически повторяется с пространственным периодом  $T = 2\pi/\beta$ . В пределах



Рис.2. Пространственное распределение интенсивности света в первом массиве в зависимости от координаты *z* при  $\gamma = \alpha = 0, \beta = 0.01$ .

одного периода интенсивность в этом световоде осциллирует, так что огибающая осцилляций сначала медленно убывает от точки  $z_0 = 0$  до точки с координатой  $z_1 = \pi/\beta$ , после чего монотонно растет до конца периода,  $z_2 = T = 2\pi/\beta$  (рис.3). Это обусловлено тем, что благодаря связи между соседними световодами имеет место перекачка света от накачиваемого световода к его ближайшим соседям, от них к следующим световодам и т.д.

Такое распространение света можно рассматривать как диффузию в направлении, перпендикулярном оси световода. Периодичность распределения интенсивности обусловлена периодичностью функции  $sin(\beta z/2)$  в аргументе функции Бесселя. В начале периода синус растет с ростом z от нуля до единицы, затем убывает от единицы до нуля, при этом функция Бесселя на первом полупериоде является осциллирующей, с монотонно убывающей амплитудой осцилляций, а на втором полупериоде функция Бесселя повторяет эволюцию первого полупериода, но в обратном порядке. При больших *п* функция Бесселя долго остается равной нулю и лишь при больших значениях аргумента (при больших z) она быстро растет, возможно, совершает несколько осцилляций, после чего снова изменяется в обратном порядке. Из рис.3 видно, что амплитуды осцилляций интенсивности света в середине периода меньше, чем в начале и в конце периода. Если величина 4/β меньше амплитуды первого максимума функции Бесселя *n*-го порядка, то заметное возмущение *n*-го световода практически не возникает, и именно этим об-



Рис.3. Пространственные распределения интенсивности поля для ряда световодов с разными номерами *n* в массиве в области первого периода. Для наглядности нулевые значения функций  $|f_n|^2$  смещены.



Рис.4. Пространственное распределение интенсивности света в первом массиве в зависимости от координаты *z* при  $\gamma = \alpha = 0, \beta = 0.2$ .

стоятельством определяется максимальный поперечный размер области возмущенных световодов массива.

Пространственное распределение интенсивности в остальных (ненакачиваемых) световодах также представляет собой последовательность максимумов, разделенных нулями поля. Координаты  $z_{nk}$  нулевых значений интенсивности определяются выражением

$$z_{nk} = \frac{2}{\beta} \left[ \arcsin\left(\frac{\beta}{4} j_{nk}\right) + k\pi \right],$$

где *j<sub>nk</sub> – k*-й нуль функции Бесселя *n*-го порядка.

Из выражений (18) и рис.4 видно, что при  $\beta \to 0$  характерный период изменений пространственного распределения поля стремится к бесконечности. Это означает, что при  $\beta \to 0$  возмущенная область массива находится между прямыми, расположенными симметрично относительно накачиваемого световода, т.к.  $|f_{-n}(z)|^2 = |f_n(z)|^2$  (рис.4). При  $\beta \neq 0$  наибольшее расстояние между нулевым световодом и световодом, до которого доходит свет, определяется выражением  $z = z_1 = \pi/\beta$ . Таким образом, с ростом  $\beta$ максимальный поперечный размер области возмущенных световодов монотонно убывает (рис.4).

Рассмотрим теперь пространственное распределение интенсивности света в световодах в случае, когда присутствует только линейная связь ( $\gamma \neq 0, \alpha = 0$ ) между массивами. Из выражений (19) видно, что функции  $|f_n(z)|^2$  и  $|g_n(z)|^2$  характеризуются двумя пространственными периодами (рис.5). Один из периодов функций  $|f_n(z)|^2$  и  $|g_n(z)|^2$  обусловлен, как и в предыдущем случае, изменением аргумента функции Бесселя  $\sin(\beta z/2)$ , а другой – множителем  $\cos^2(\gamma z)$  для функции  $|f_n(z)|^2$  либо  $\sin^2(\gamma z)$  для функции  $|g_n(z)|^2$ . Эти множители определяют скорость перекачки света с периодом  $T_1 = \pi/\gamma$ , что свойственно каплеру (ответвителю), состоящему из двух параллельно расположенных световодов с константой связи  $\gamma$ . Поэтому пространственное распределение интенсивности света в первом массиве световодов представляет собой распределение, полученное для  $f^2(z) = J_n^2((4/\beta)\sin(\beta z/2))$  при  $\gamma = 0$  (рис.2), но модулированное дополнительно функцией  $\cos^2(\gamma z)$  (рис.5,*a*). Следовательно, пространственное распределение интенсивности света в массиве представляет собой функцию  $|g_n(z)|^2$  при  $\gamma = 0$ , модулированную функцией  $\sin^2(\gamma z)$  при  $\beta = \gamma$  (рис.5,*b*).

Положения нулей и экстремумов множителей  $\cos^2(\gamma z)$ и  $\sin^2(\gamma z)$ , определяющих скорость перекачки света между массивами, не зависит от номера световода *n*. Пространственное распределение интенсивности света в массивах зависит от положений максимумов интенсивности, определяющихся значением функции Бесселя,  $z = z_1 = \pi/\beta$ , которые совпадают с положениями минимумов  $z = z_2 = \pi/2\gamma$  функции  $\sin^2(\gamma z)$ ,  $z_1 = z_2$  при  $\beta = 2\gamma$  (рис.5). Темные поперечные полосы соответствуют нулевым значениям поля в световодах. Центры этих темных полос располагаются в точках  $z_k = (k + 1/2)\pi/\gamma$  в первом массиве и в точках  $z_k = k\pi/\gamma$  для второго массива.

Пространственное распределение интенсивности существенно зависит от соотношения между константами взаимодействия β и γ. Анализ выражения (19) показывает, что распределение максимумов интенсивности света в массивах существенно изменяется по сравнению с приведенным на рис.2 в зависимости от соотношения  $\beta$  и 2 $\gamma$ . В случае  $\beta < 2\gamma$  максимумы интенсивности света в первом массиве по-прежнему расположены в узлах распределения (рис.6,*a*), тогда как максимумы интенсивности света во втором массиве сосредоточены в крайних возбужденных световодах (рис.6, $\delta$ ), что свидетельствует о практически полной перекачке света между массивами. При  $\beta > 2\gamma$ положения максимумов распределения интенсивностей в обоих массивах изменяются. Максимум интенсивности света находится в нулевом световоде первого массива (рис.7,а). На расстоянии в полпериода максимум интенсивности перемещается в нулевой световод второго массива (рис. 7, 6). При этом возбуждаемая область массивов сужается в поперечном направлении по сравнению с показанной на рис.6 из-за диффузии света. При  $\beta \gg 2\gamma$  про-



Рис.5. Пространственные распределения интенсивности света в первом (*a*) и втором (*б*) массивах в зависимости от координаты *z* при  $\alpha = 0, \gamma = \beta = 0.3$ .



Рис.6. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = 0, \gamma = 0.4, \beta = 0.2$ .



Рис.7. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = 0, \gamma = 0.1, \beta = 0.4$ .



Рис.8. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = 0, \gamma = 0.6, \beta = 5$ .

исходит резкое сужение возбуждаемой области в поперечном направлении, практически до одного световода (рис.8). Если  $\beta = 0$ , то пространственное распределение интенсивности  $|f_n(z)|^2$  представляет собой совокупность максимумов и минимумов (нулей) с периодом  $T_1 = \pi/\gamma$ , расположенных между двумя прямыми, на которых лежат первые максимумы функции Бесселя  $J_n^2(2z)$  (рис.9).

Если ангармонизм связи между световодами в массиве отсутствует ( $\beta = 0$ ) и  $\alpha \neq \gamma \neq 0$ , пространственное распределение интенсивности света остается периодическим. Период полной перекачки между массивами  $T = 2\pi/\alpha$ . В пределах этого периода имеют место пространственные осцилляции распределения интенсивности. При этом положения максимумов и минимумов интенсивности как в первом, так и во втором массиве несимметричны относительно нулевого световода (рис.10). В (20) множитель





 $\sin^{2}[(\gamma + \alpha n/2)z]$  определяет наличие невозбужденного световода с номером  $n = -2\gamma/\alpha$  во втором массиве (рис.10,6).

Наконец, на рис.11–13 представлены пространственные распределения интенсивности света в первом и втором массивах световодов. На этих рисунках видна сложная суперпозиция осцилляций с несколькими периодами, число которых зависит от значений параметров системы.

## 4. Заключение

С использованием метода связанных мод изучено пространственное распределение интенсивности излучения, распространяющегося в двух связанных, параллельно расположенных массивах световодов, с учетом их связи с ближайшими соседями и линейной зависимости



Рис.9. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = \beta = 0, \gamma = 0.01$ .



Рис.10. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = 0.2, \gamma = 0.1, \beta = 0.$ 





Рис.11. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = \gamma = \beta = 0.1$ .

0

10

5

0

100

50

0

-30

а

-30

а



Рис.12. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = 0.15, \gamma = 0.5, \beta = 0.02.$ 



Рис.13. То же, что и на рис.5, но при  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\beta = 0.2$ .

постоянной распространения от номера световода. Показано, что распределение интенсивности света является периодической функцией координаты. Найдены периоды перекачки света из одного световода в другой в зависимости от параметров системы. Установлено, что в рассматриваемой системе возникает ограниченная в пространстве поперечная дифракция света. Полученные результаты могут найти практическое применение при создании новых приборов квантовой электроники для управления распространением света.

- 1. Peschel U., Pertsch T., Lederer F. Opt. Lett., 23, 1701 (1998).
- 2. Pertsch T., Dannberg P., Elflein W., Bräuer A., Lederer F. Phys. Rev. Lett., 83, 4752 (1999).
- Morandotti R., Peschel U., Aitchison J.S., Eisenberg H.S., 3 Silberberg Y. Phys. Rev. Lett., 83, 4756 (1999).
- 4. Pertsch T., Zentgraf T., Peschel U., Bräuer A., Lederer F. Appl. Phys. Lett., 80, 3247 (2002).
- 5. Chiodo N., Valle G.D., Osellame R., Longhi S., Cerullo G., Ramponi R., Laporta P., Morgner U. Opt. Lett., 31, 1651 (2006). 6.
- Longhi S. Phys. Rev. B, 76, 195119 (2007).
- Zheng M.J., Xiao J.J., Yu K.W. Phys. Rev. A, 81, 033829 (2010). 7.
- Gozman M.I., Polishchuk Yu.I., Polishchuk I.Ya. Opt. Eng., 53 (7), 8. 071806 (2014).
- Wang G., Huang J.P., Yu K.W. Opt. Lett., 35, 1908 (2010). 9.



- 10. Gozman M.I., Guseynov A.I., Kagan Yu.M., Pavlov A.I., Polishchuk I.Ya. arXiv:1501.06492 (2015).
- 11. Коровай О.В., Круковский А.П., Хаджи П.И. Квантовая электроника, 48 (1), 37 (2018) [Quantum Electron., 48 (1), 37 (2018)].
- 12. Хаджи П.И., Ляхомская К.Д., Орлов О.К. Квантовая электроника, 36 (10), 971 (2006) [Quantum Electron., 36 (10), 971 (2006)].
- 13. Dreisow F., Wang G., Heinrich M., Keil R., Tünnermann A., Nolte S., Szameit A. Opt. Lett., 36 (2), 3954 (2011).
- 14. Zheng M.J., Wang G., Yu K.W. Opt. Lett., 35 (23), 3865 (2010).
- 15. Dreisow F., Szameit A., Heinrich M., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Longhi S. Phys. Rev. Lett., 102, 076802 (2009).
- 16. Trompeter H., Pertsch T., Lederer F., Michaelis D., Streppel U.. Bräuer A., Peschel U. Phys. Rev. Lett., 96, 023901 (2006).
- 17. Schwartz T., Fishman S., Segev M. Electron. Lett., 44, (3), 165 (2008).
- 18. Lahini Y., Avidan A., Pozzi F., Sorel M., Morandotti R., Chistodoulides D.N., Silberberg Y. Phys. Rev. Lett., 100, 013906 (2008).
- 19. Garanovich I.I., Szameit A., Sukhorukov A.A., Pertsch T., Krolikowski W., Nolte S., Neshev D., Tünnermann A., Kivshar Y.S. Opt. Express, 15 (15), 9737 (2007).
- 20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (М.: Наука, 1971).
- 21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров (М.: Наука, 1974).
- 22. Dreisow F., Heinrich M., Szameit A., Döring S., Nolte S., Tünnermann A., Fahr S., Lederer F. Opt. Express, 16 (5), 3474 (2008).
- 23. Salerno M., Konotop V.V., Bludov Y.V. Phys. Rev. Lett., 101, 30405 (2008).