

## ПОДБОРКА РАБОТ, ДОЛОЖЕННЫХ НА СИМПОЗИУМЕ MPLP-2018

# Описание обобщенного гиперрэмсиевского резонанса на основе спинорного формализма<sup>\*,\*\*</sup>

Т.Занон-Виллет, А.В.Тайченачев, В.И.Юдин

*С использованием спиноров в параметризации Кэли–Клейна получена обобщенная формула для гиперрэмсиевского резонанса, впервые представленная в статье, опубликованной в журнале Phys. Rev. A, 92, 023416 (2015). Выражения для формы интерферометрического резонанса и связанного с ней составного фазового сдвига переформулированы с учетом всех параметров каждого лазерного импульса. Потенциальная устойчивость контраста сигнала и фазового сдвига картины полос волновой функции теперь может быть исследована при любых искажениях формы пробного импульса из-за систематических эффектов в зондирующем лазерном излучении. Точное и простое аналитическое выражение, описывающее метод Рэмси для разделенных осциллирующих лазерных полей с контролем квантового состояния, позволяет точно моделировать все последние протоколы опроса часов при различных дефектах пробных импульсов.*

**Ключевые слова:** спектроскопия Рэмси, оптические часы, композитные импульсы, спинор, фазовый сдвиг, квантовая механика, атомная интерферометрия.

## 1. Введение

В 1949 году Рэмси разработал метод разделенных осциллирующих полей для использования в экспериментах по магнитному резонансу, чтобы усовершенствовать импульсную методику Раби для измерения частот атомных переходов с более высокой точностью [1, 2]. Метод Рэмси нашел широкое применение в метрологии времени и частоты, развитие которой привело к созданию современных атомных часов, имеющих высочайшую точность [3]. Этот метод был также распространен на интерферометрию волн материи с использованием лазерно-индуцированного эффекта атомной отдачи для реализации делителей пучка и зеркал [4]. Атомные гравитационно-инерционные датчики на основе интерферометров Рэмси–Борде позволили быстро улучшить чувствительность измерений к внешним полям или вращениям [5].

Настоящая работа посвящена квантовой инженерии лазерного импульсного резонанса Рэмси в отсутствие эф-

фектов Доплера и отдачи, связанного с фазовым сдвигом атомного состояния, который вызывается последовательностью трех импульсов, действующих в течение времени свободной эволюции атома [6, 7]. Первоначальная схема, получившая название гиперрэмсиевской (ГР) спектроскопии, демонстрирует весьма высокую эффективность снижения чувствительности к индуцированному пробным полем остаточному световому сдвигу частоты в часах на одиночных ионах  $^{171}\text{Yb}^+$  [8]. Новый стандарт частоты на основе электрического октупольного (E3) перехода с очень узкой линией приводит к беспрецедентной относительной точности  $\sim 3 \times 10^{-18}$  [9].

Такой замечательный результат стимулировал интенсивные исследования в области рэмсиевской спектроскопии, которые привели к обнаружению других последовательностей импульсов, обеспечивающих еще большую устойчивость к остаточному световому сдвигу [10]. Точное аналитическое выражение для вероятности перехода в случае так называемого обобщенного гиперрэмсиевского (ОГР) резонанса было приведено в работе [7]. Такая схема резонанса является обобщением исходной ГР схемы путем модификации ряда параметров лазерного излучения в процессе зондирования. Однако при этом не было достаточно хорошо исследовано влияние шага переключения фазы лазерного излучения на каждый импульс и не учитывался эффект остаточной когерентности.

В настоящей работе мы впервые приводим новый вывод формул для описания того же резонанса с помощью спинорного формализма. Найдено точное и простое решение в замкнутом виде как для формы резонанса, так и для фазового сдвига центральной полосы, включающее в себя все лазерные параметры каждого импульса. Формализм спинорных матриц может служить точной теоретической основой квантового моделирования с целью проверки других последовательностей составных импульсов в спектроскопии Рэмси, предназначенных для следующего поколения атомных часов и спектрометров, устойчи-

\* Эта и последующие статьи доложены на VIII Международном симпозиуме «Modern Problems of Laser Physics» (Новосибирск, 25 августа – 1 сентября 2018 г.).

\*\* Перевод с англ. В.Л.Дербова.

**T.Zanon-Willette.** Sorbonne Université, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Laboratoire d'Etudes du Rayonnement et de la Matière en Astrophysique et Atmosphères, LERMA, F-75005, Paris, France; e-mail: thomas.zanon@sorbonne-universite.fr

**А.В.Тайченачев.** Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15Б

**В.И.Юдин.** Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15Б; Новосибирский государственный технический университет, Россия, 630073 Новосибирск, просп. К.Маркса, 20; e-mail: viyudin@mail.ru

вых к возмущениям зондирующего лазерного излучения [10, 11].

Приступим к формальному выводу выражения для вероятности ОГР перехода, введя параметризацию Кэли–Клейна для спинорного представления вращений следующим образом [10, 12, 13]:

$$M(\tilde{\vartheta}_l) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\vartheta}_l \exp(i\phi_l) & -i \exp(-i\phi_l) \sin \tilde{\vartheta}_l \\ -i \exp(i\phi_l) \sin \tilde{\vartheta}_l & \cos \tilde{\vartheta}_l \exp(-i\phi_l) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $l = 1', 1, 2$ ; фазовые углы

$$\tilde{\vartheta}_l = \arcsin\left(\frac{\Omega_l}{\omega_l} \sin \tilde{\theta}_l\right), \quad (2a)$$

$$\phi_l = \arcsin\left(\frac{\delta_l}{\omega_l} \tan \tilde{\theta}_l\right). \quad (2b)$$

Здесь  $\tilde{\theta}_l = \theta_l/2$ ;  $\theta_l = \tau_l \omega_l$  – эффективная площадь импульса;  $\omega_l = (\delta_l^2 + \Omega_l^2)^{1/2}$  – обобщенная частота Раби. Такая параметризация очень удобна для моделирования любой составной конфигурации из трех импульсов типа показанной на рис.1. Применяя спиноры к уравнению Шредингера с начальным состоянием  $c_g(0)$ ,  $c_e(0)$ , получаем следующее решение для комплексной ОГР амплитуды в замкнутой форме:

$$\begin{pmatrix} c_g \\ c_e \end{pmatrix} = M(\tilde{\vartheta}_2) M(\tilde{\vartheta}_1) \begin{pmatrix} \exp(i\delta T/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\delta T/2) \end{pmatrix} \times M(\tilde{\vartheta}_1) \begin{pmatrix} c_g(0) \\ c_e(0) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

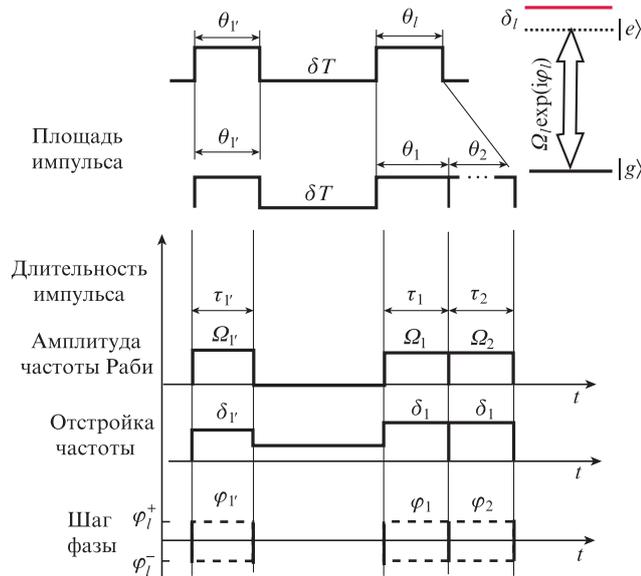


Рис.1. Трехимпульсная спектроскопия сверхзкого рабочего перехода атомных часов между компонентами сверхтонкого расщепления. Оптические импульсы определяются обобщенной площадью  $\theta_l$  ( $l = 1', 1, 2$ ), отстройкой частоты  $\delta_l$ , частотой Раби  $\Omega_l \exp(i\phi_l)$  с учетом шага переключения фазы лазера, длительностью импульса  $\tau_l$  и временем свободной эволюции  $T$ . В общем случае отстройка частоты  $\delta_l = \delta - \Delta_l$ , где  $\Delta_l$  – остаточный сдвиг частоты, вызванный пробным лазерным излучением, а  $\delta$  – отстройка частоты от частоты невозмущенного перехода.

Рабочий переход атомных часов может быть обнаружен путем измерения доли атомной населенности в основном,  $P_g = |c_g|^2$ , или в возбужденном,  $P_e = |c_e|^2 = 1 - P_g$ , состоянии.

## 2. Точная формула для ОГР резонанса

Населенность основного состояния при начальных условиях  $c_g(0) = 1$ ,  $c_e(0) = 0$  можно представить в каноническом виде:

$$P_g = |\alpha|^2 \{1 - |\beta| \exp[-i(\delta T + \Phi)]\}^2, \quad (4a)$$

включающем в себя составной фазовый сдвиг, накопленный в результате действия всей последовательности лазерных импульсов,

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_{1'} + \phi \quad (4b)$$

с дополнительным вкладом комплексного сдвига

$$\phi = \phi_1 + \phi_{1'} - \arg \beta. \quad (4b)$$

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , задающие общую огибающую и составной фазовый сдвиг, определяются двумя вкладами: от левого импульса с параметром  $\tilde{\vartheta}_1$  и двух правых импульсов с параметрами  $\tilde{\vartheta}_1$ ,  $\tilde{\vartheta}_2$ , действующих после свободной эволюции атома (рис.1). Введем сокращенные обозначения:

$$\alpha \equiv \alpha(\tilde{\vartheta}_1) \alpha(\tilde{\vartheta}_{12}), \quad (5a)$$

$$\beta \equiv \beta(\tilde{\vartheta}_1) \beta(\tilde{\vartheta}_{12}), \quad (5b)$$

где

$$\alpha(\tilde{\vartheta}_1) = \cos \tilde{\vartheta}_1; \quad (6a)$$

$$\alpha(\tilde{\vartheta}_{12}) = \cos \tilde{\vartheta}_1 \cos \tilde{\vartheta}_2 [1 - \exp(-i\Xi_{12}) \tan \tilde{\vartheta}_1 \tan \tilde{\vartheta}_2]; \quad (6b)$$

$$\beta(\tilde{\vartheta}_1) = \tan \tilde{\vartheta}_1; \quad (6b)$$

$$\beta(\tilde{\vartheta}_{12}) = \frac{\tan \tilde{\vartheta}_1 + \exp(-i\Xi_{12}) \tan \tilde{\vartheta}_2}{1 - \exp(-i\Xi_{12}) \tan \tilde{\vartheta}_1 \tan \tilde{\vartheta}_2}; \quad (6b)$$

$$\Xi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 + \phi_1 + \phi_2.$$

Из формулы (4b) непосредственно вытекают выражения для фазового сдвига в ряде частных случаев: рэмсиевский сдвиг фазы для двух идентичных импульсов

$$\phi = 2\phi_1, \quad (7a)$$

рэмсиевский сдвиг фазы для двух разных импульсов

$$\phi = \phi_1 + \phi_{1'}, \quad (7b)$$

ОГР фазовый сдвиг

$$\phi = \phi_1 + \phi_{1'} = \arg[\beta(\tilde{\vartheta}_{12})]. \quad (7b)$$

Эти аналитические выражения обобщают полученные ранее с использованием теории возмущений или точные

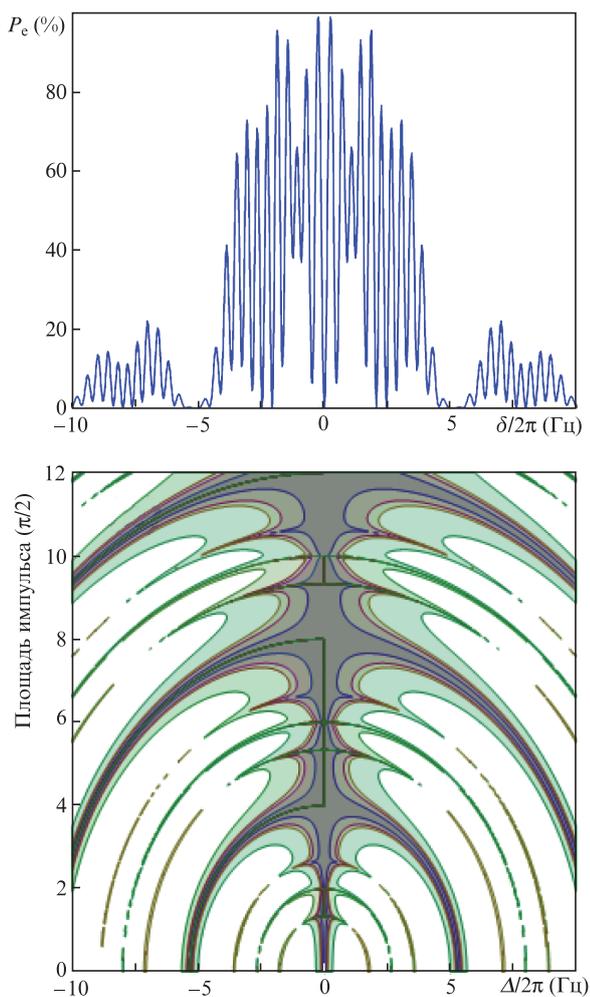


Рис.2. Населенность возбужденного уровня  $P_e$  как функция отстройки частоты поля от частоты часового перехода и соответствующий сдвиг часовой частоты: ГР резонанс (а) и двумерная карта сдвига ГР часовой частоты  $\delta v_2$  как функция остаточного некомпенсированного светового сдвига  $\Delta/2\pi$ , вносимого пробным полем, и площади первого импульса  $\tau_1 \Omega_1$  (в единицах  $\pi/2$ ) при начальных условиях  $c_g(0) = 1, c_e(0) = 0$  (б). Цветная контурная карта построена путем наложения слоев, соответствующих различным частотным сдвигам, начиная с 10 мГц (светлая зона) до менее 0.05 мГц (темная зона с очень низкой чувствительностью к остаточному световому сдвигу). Использовались следующие спектроскопические параметры: частота Раби  $\Omega = \pi/(2\tau)$  при длительности импульса  $\tau = 3/16$  с, время свободной эволюции  $T = 2$  с, остаточный сдвиг частоты  $\Delta_1 \equiv \Delta_2 = \Delta$ . Цветные варианты рис.2 и 3 помещены на сайте нашего журнала <http://www.quantum-electron.ru>.

решения, касающиеся формы рэмсиевских и ГР линий [2, 7, 11]. Зависимость  $P_e(\delta)$  в исходной ГР схеме (формулы (4)–(6)) от частотной отстройки показана на рис.2,а.

Отметим, что для привязки частоты излучения лазера к частоте атомного перехода можно также применять ступенчатую модуляцию фазы с противоположными знаками  $\varphi_l^\pm$  к вероятности перехода в основное или в возбужденное состояние [14], генерируя сигнал ошибки

$$\Delta E = P_g(\varphi_l^+) - P_g(\varphi_l^-). \tag{8}$$

Индекс  $l = 1', 1, 2$  относится к любому виду ступенчатого изменения фазы, применяемого во время действия левого или правых импульсов. Было предложено несколько последовательностей переключения фазы с различной чув-

ствительностью сигнала ошибки к составному фазовому сдвигу. Согласно [6, 7] исходная ГР схема основана на использовании фаз  $\varphi_l^\pm = \pm \pi/2$  во время действия левого импульса и  $\varphi_1 = \pi$  во время действия среднего импульса. Другой способ, называемый модифицированной ГР техникой, заключается в использовании  $\varphi_l^\pm = + \pi/2$  во время действия левого импульса, в сохранении  $\varphi_1 = \pi$  во время действия среднего импульса и применении противоположного фазового сдвига  $\varphi_2^- = -\pi/2$  во время действия последнего импульса [15]. Альтернативный протокол ОГР схемы подразумевает переключения фазы только во время действия среднего импульса с фазой  $\varphi_1 = \pm \pi/4$  или  $\varphi_1 = \pm 3\pi/4$  [16]. Все сигналы ошибок легко находятся в рамках спинорного формализма в соответствии с перечисленными выше протоколами фазовых переключений и полностью согласуются с результатами, представленными в обзорной работе [10].

### 3. Вероятность ОГР перехода при произвольных начальных условиях

Получим общее выражение для вероятности перехода при произвольных начальных амплитудах  $c_g(0), c_e(0)$ , удовлетворяющих условию нормировки  $|c_g(0)|^2 + |c_e(0)|^2 = 1$ . Новые выражения для коэффициентов  $\alpha(\tilde{\vartheta}_l)$  и  $\beta(\tilde{\vartheta}_l)$ , управляющих действием левого лазерного импульса, теперь имеют вид

$$\alpha(\tilde{\vartheta}_l) = \cos \tilde{\vartheta}_l \{c_g(0) + ic_e(0) \exp[i(\varphi_l - \varphi_{l'})] \tan \tilde{\vartheta}_l\}, \tag{9a}$$

$$\beta(\tilde{\vartheta}_l) = \frac{c_g(0) \tan \tilde{\vartheta}_l - ic_e(0) \exp[i(\varphi_l - \varphi_{l'})]}{c_g(0) + ic_e(0) \exp[i(\varphi_l - \varphi_{l'})] \tan \tilde{\vartheta}_l}. \tag{9б}$$

Огибающая и фазовый сдвиг, управляющие полной вероятностью ОГР перехода, заменяются сложными тригонометрическими функциями, учитывающими несовершенство приготовления исходного квантового состояния. Обобщенное выражение для составного фазового сдвига приобретает вид

$$\phi = \phi_1 + \phi_l - \{ \arg[\beta(\tilde{\vartheta}_{12})] + \arg[\beta(\tilde{\vartheta}_l)] \}, \tag{10}$$

где  $\beta(\tilde{\vartheta}_{12})$  и  $\beta(\tilde{\vartheta}_l)$  задаются формулами (6г) и (9б) соответственно. Сдвиг часовой частоты, связанный с этим фазовым сдвигом, определяется следующим соотношением:

$$\delta v = - \frac{\phi \pm k\pi}{2\pi T}, \tag{11}$$

где  $k$  – целое число, обеспечивающее непрерывность этого выражения путем коррекции скачков между квадрантами.

На рис.2,б показан сдвиг часовой ГР частоты (11), соответствующий минимуму центрального резонанса, в зависимости от остаточного некомпенсированного светового сдвига, индуцированного пробным полем, и площади импульса. Такая картина характерна для идеальной ГР схемы, описанной в работе [17] с помощью формализма матрицы плотности. Искажения данной картины из-за неточного задания начального состояния представлены на рис.3,а и б. Для упрощенного моделирования использовались шаги переключения фазы лазерного излучения  $\varphi_l = 0, \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$ . Модификация относительного фазового сдвига между композитными импульсами обу-

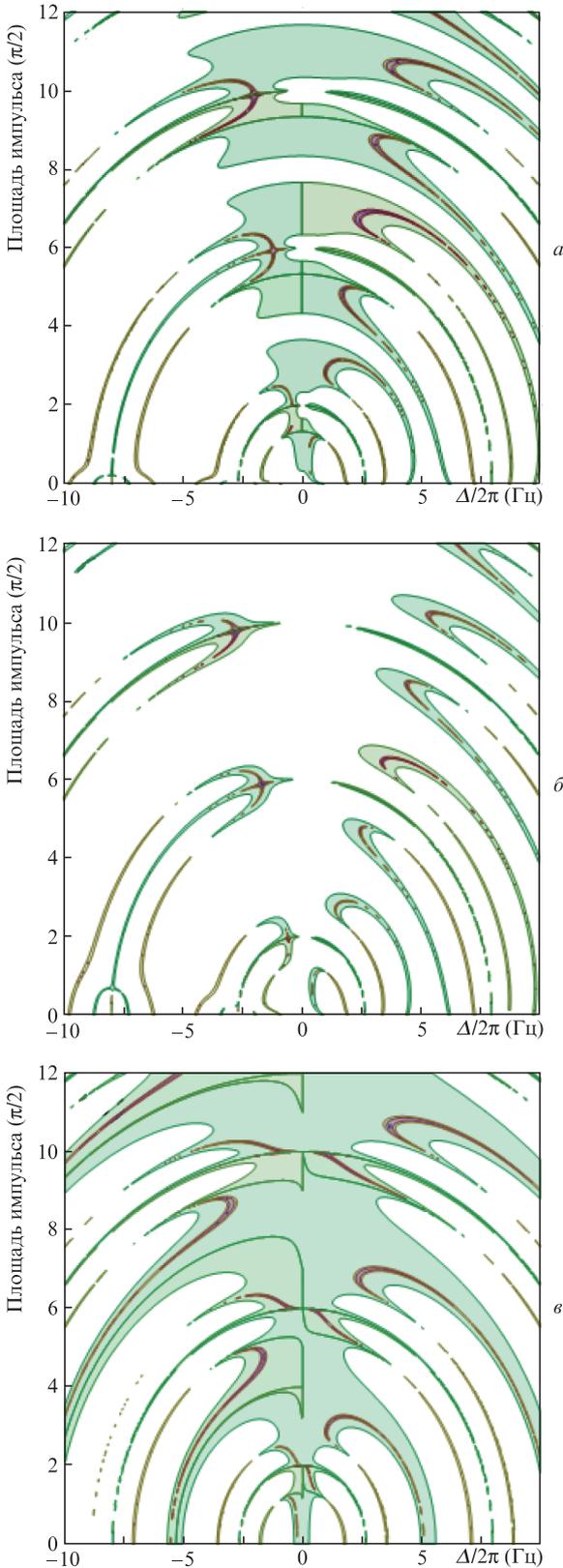


Рис.3. Искажения двумерной карты сдвига ГР часовой частоты  $\delta\nu$  за счет неточности задания начального состояния (а, б) или шага переключения фазы (в): сдвиг частоты, описываемый формулой (11), в зависимости от индуцированного пробным световым полем остаточного некомпенсированного сдвига  $\Delta/2\pi$  и площади импульса (в единицах  $\pi/2$ ) при  $c_g(0) = \sqrt{0.999}$ ,  $c_e(0) = \sqrt{0.001}$  (а),  $c_g(0) = \sqrt{0.99}$ ,  $c_e(0) = \sqrt{0.01}$  (б) и при фазовой погрешности  $\varphi_1 = 0.99\pi$  во время действия среднего импульса (в). Остальные параметры и цветовая контурная карта те же, что и для рис.2.

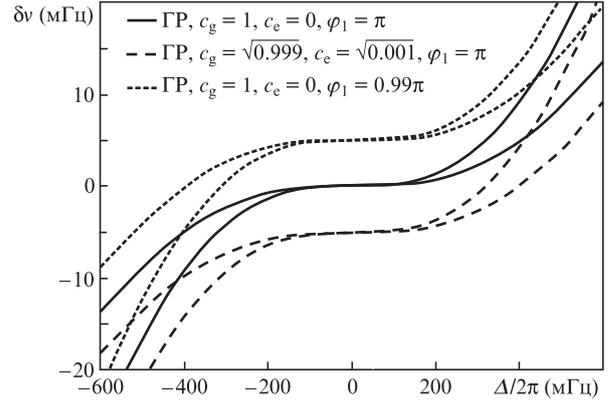


Рис.4. Сдвиг ГР часовой частоты  $\delta\nu$ , определяемой по населенности  $P_e$ , как функция остаточного некомпенсированного светового сдвига  $\Delta/2\pi$ , индуцированного пробным полем, имеющий небольшое смещение из-за неточного задания начального состояния и скачка фазы. Разные линии одного вида соответствуют относительным площадям импульсов, различающимся на  $\Delta\theta/\theta = 20\%$ . Остальные параметры те же, что и для рис.2.

словлена остаточной когерентностью между атомными состояниями с амплитудами  $c_g(0)$ ,  $c_e(0) \neq 0$  при квантовомеханическом подходе. Этот новый результат показывает, что слабое искажение формы линии может сосуществовать с дополнительным вкладом в фазовый сдвиг из-за неидеального приготовления квантовых состояний при опросе пробным излучением нескольких последовательностей двухуровневых систем [18]. Наконец, рис.3,в демонстрирует влияние малой систематической ошибки фазовой инверсии  $\varphi_1 = 0.99\pi$  во время действия среднего импульса ГР схемы. Из рис.4 видно, что сдвиг часовой частоты как функция остаточного светового сдвига, индуцированного пробным излучением, испытывает небольшое смещение, если переключения фазы или задание амплитуд начального состояния осуществляются с ошибкой. При этом предполагалось, что во время опроса пробным излучением площадь импульсов может меняться в пределах  $\Delta\theta/\theta = \pm 10\%$ .

#### 4. Заключение

С использованием спинорного формализма проведен вывод выражения для ОГР резонанса. Точные формулы для формы линии и фазового сдвига для центральной полосы переписаны в компактной форме, позволяющей отслеживать любые искажения из-за дефектов импульса. Впервые выражение для составного фазового сдвига получено для случая произвольных начальных амплитуд квантовых состояний. Мы использовали спиноры, чтобы найти точную и удобную для анализа модель ОГР резонанса, которая может быть весьма полезна при учете флуктуаций интенсивности [19]. Совместное применение оригинального метода спектроскопии Рэмси [2] и более сложных последовательностей композитных лазерных импульсов [20, 21] позволило бы оптимально управлять параметрами лазерного излучения в атомной интерферометрии, атомных часах и в прецизионной спектроскопии при проведении экспериментов в области фундаментальной физики с ультрахолодными атомами и ионами.

А.В.Тайченачев и В.И.Юдин благодарят за финансовую поддержку Российский научный фонд (грант № 16-12-10147), Министерство образования и науки РФ (грант

№ 3.1326.2017/4.6) и РФФИ (гранты № 17-02-00570 и 18-02-00822).

1. Ramsey N.F. *Phys. Rev.*, **76**, 996 (1949).
2. Ramsey N.F. *Phys. Rev.*, **78**, 695 (1950).
3. Ramsey N.F. *Rev. Mod. Phys.*, **62**, 541 (1990).
4. Bordé C.J. *Phys. Lett. A*, **140**, 10 (1989).
5. Bordé C.J. *Metrologia*, **39**, 435 (2002).
6. Yudin V.I., Taichenachev A.V., Oates C.W., Barber Z.W., Lemke N.D., Ludlow A.D., Sterr U., Lisdat Ch., Riehle F. *Phys. Rev. A*, **82**, 011804(R) (2010).
7. Zanon-Willette T., Yudin V.I., Taichenachev A.V. *Phys. Rev. A*, **92**, 023416 (2015).
8. Huntemann N., Lipphardt B., Okhapkin M., Tamm Ch., Peik E., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 213002 (2012).
9. Huntemann N., Sanner C., Lipphardt B., Tamm Ch., Peik E. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 063001 (2016).
10. Zanon-Willette T. et al. *Rep. Prog. Phys.*, **81**, 094401 (2018).
11. Zanon-Willette T., Minissale M., Yudin V.I., Taichenachev A.V. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **723**, 012057 (2016).
12. Pauli W. *Z. Phys.*, **43**, 601 (1927).
13. Bloch F., Rabi I.I. *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 0237 (1945).
14. Ramsey N.F., Silsbee H.B. *Phys. Rev.*, **84**, 506 (1951).
15. Hobson R., Bowden W., King S.A., Baird P.E.G., Hill I.R., Gill P. *Phys. Rev. A*, **93**, 010501(R) (2016).
16. Zanon-Willette T., de Clercq E., Arimondo E. *Phys. Rev. A*, **93**, 042506 (2016).
17. Zanon-Willette T., Lefevre R., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *Phys. Rev. A*, **96**, 023408 (2017).
18. Prestage J.D., Chung S.K. *Proc. 2010 IEEE Int. Frequency Control Symp.* (Newport Beach, CA, USA, IEEE, 2010, p. 220).
19. Beloy K. *Phys. Rev. A*, **96**, 031406(R) (2018).
20. Levitt M.H. *Prog. Nucl. Magn. Reson. Spectrosc.*, **18**, 61 (1986).
21. Vandersypen L.M.K., Chuang I.L. *Rev. Mod. Phys.*, **76**, 1037 (2005).