

Разработка и численное моделирование сферических микрорезонаторов на основе германосиликатных стекол $\text{SiO}_2\text{--GeO}_2$ для генерации оптических частотных гребенок

Е.А.Анашкина, А.А.Сорокин, М.П.Марисова, А.В.Андреанов

Предложена и теоретически исследована возможность использования сферических микрорезонаторов мод шепчущей галереи на основе германосиликатных стекол с различным содержанием GeO_2 для генерации оптических частотных гребенок в режиме диссипативного солитона при накачке на длине волны 1.55 или 2 мкм. Проведен расчет и анализ дисперсии и нелинейности микросфер различных радиусов, определены их оптимальные характеристики и ожидаемые при этом параметры выходного излучения. Показано, что спектральные ширины оптических частотных гребенок, формируемых в микросфере из стекла $0.8\text{SiO}_2\text{--}0.2\text{GeO}_2$ при накачке на $\lambda = 1.55$ мкм и в микросфере из стекла GeO_2 при накачке на $\lambda = 2$ мкм, могут составлять ~ 200 и ~ 300 нм соответственно. В этих случаях, помимо диссипативного солитона длительностью ~ 100 фс, также наблюдается генерация дисперсионных волн.

Ключевые слова: микрорезонатор, микросфера, моды шепчущей галереи, оптические частотные гребенки, дисперсия, керровская нелинейность, германосиликатные стекла.

1. Введение

Оптические частотные гребенки (ОЧГ), представляющие собой последовательности ультракоротких лазерных импульсов с регулярно расположенными спектральными линиями, находят применение в различных приложениях, включая метрологию, спектроскопию, зондирование, дистанционную диагностику, и оказывают огромное влияние на науку и технологию [1]. ОЧГ, формируемые на основе лазеров с синхронизацией мод, применяются, в основном, в научных лабораториях. Открытые в 2007 г. керровские частотные гребенки, генерируемые в высокодобротных оптических микрорезонаторах с модами шепчущей галереи (МШГ) [2], позволяют существенно уменьшить размеры и энергопотребление оптических устройств и создавать новые типы приборов с беспрецедентными характеристиками (разрешение, быстродействие, компактность, энергопотребление). В последние годы достигнут значительный прогресс в разработке компактных микрорезонаторов на микросхемах для генерации ОЧГ в режиме диссипативного солитона. Для существования диссипативных солитонов должен выполняться двойной баланс – керровской нелинейности и аномальной дисперсии, а также диссипации и усиления [3]. В связи с этим при разработке микрорезонаторов для генерации диссипативных солитонов особое внимание уделяется дисперсии, вклад в которую вносят как материальная, так и геоме-

трическая составляющие [4]. В качестве материалов для микрорезонаторов могут быть использованы, например, кристаллические материалы [5] или различные стекла, самым простым из которых является кварцевое [6].

В настоящей работе мы впервые, насколько нам известно, теоретически исследуем возможность использования микросфер на основе германосиликатных стекол для генерации оптических гребенок (в режиме диссипативного солитона). Особое внимание уделяется исследованию нелинейности и дисперсии таких микрорезонаторов, поскольку эти параметры оказывают сильное влияние на нелинейную динамику системы. Отметим, что применение микросфер на основе стекол $(1-x)\text{SiO}_2\text{--}x\text{GeO}_2$ с $x \approx 0.2$ ранее демонстрировалось экспериментально для прецизионного сдвига частоты под действием УФ излучения [7] и для узкополосных фильтров [8]. Существующие в настоящее время технологии позволяют создавать высококачественные стекла $(1-x)\text{SiO}_2\text{--}x\text{GeO}_2$ с любым содержанием диоксида германия x ($0 \leq x \leq 1$) [9, 10]. Германосиликатные стекла обладают более высоким нелинейным показателем преломления, чем кварцевое стекло, и смещенным в длинноволновую область нулем дисперсии. При этом по теплофизическим свойствам германосиликатные стекла близки к кварцевым, что позволяет применять к ним хорошо отработанные технологии изготовления стеклянных микрорезонаторов, например методом нагрева торца световода. Отметим также, что ранее при изготовлении германосиликатных микрорезонаторов использовался метод нанесения пленки из германатного стекла на поверхность кварцевой микросферы [7]. В кварцевых стеклах на длинах волн более 2.2 мкм велики оптические потери, что ограничивает область их использования. Область прозрачности стекол $(1-x)\text{SiO}_2\text{--}x\text{GeO}_2$ при больших значениях x выходит за пределы 3 мкм [9], что обуславливает их потенциальную применимость как в телекоммуникационном диапазоне, так и в диапазоне длин волн 2–3 мкм. Обнадеживающим фактом является и то, что в настоящее время в световодах на основе герма-

Е.А.Анашкина, А.А.Сорокин, М.П.Марисова. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Россия, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; e-mail: elena.anashkina@gmail.com

А.В.Андреанов. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46

Поступила в редакцию 7 февраля 2019 г.

носиликатных стекол продемонстрирована генерация перестраиваемых солитонов в диапазоне 2–3 мкм [11] и суперконтинуумов с длинноволновой границей 3 мкм и более [12–16].

В разд.2 настоящей работы мы численно исследуем дисперсионные и нелинейные свойства сферических микрорезонаторов МШГ на основе германосиликатных стекол с различным содержанием диоксида германия ($0 \leq x \leq 1$) и различных радиусов, а в разд.3 моделируем генерацию диссипативных солитонов при накачке на длинах волн 1.55 и 2 мкм.

2. Расчет дисперсионных и нелинейных характеристик

Собственные частоты микрорезонаторов МШГ могут быть найдены путем численного решения характеристического уравнения, получающегося на основе уравнений Максвелла для заданной системы [1]. Характеристическое уравнение для сферических микрорезонаторов для волн ТМ-типа имеет вид [1, 17]

$$\frac{[(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)]'}{(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)} = n \frac{[(k_0R)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0R)]'}{(kR)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0R)}, \quad (1)$$

а для волн ТЕ-типа –

$$\frac{[(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)]'}{(kR)^{1/2} J_{l+1/2}(kR)} = \frac{1}{n} \frac{[(k_0R)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0R)]'}{(k_0R)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(k_0R)}, \quad (2)$$

где штрих означает полную производную по аргументу; $k = k_0n$ – постоянная распространения в среде; $k_0 = 2\pi\nu/c$ – постоянная распространения в вакууме; c – скорость света; ν – частота излучения; λ – длина волны ($\lambda = c/\nu$); $J_{l+1/2}$ – функция Бесселя порядка $(l + 1/2)$; $H_{l+1/2}^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода порядка $(l + 1/2)$; R – радиус микросферы; n – показатель преломления; l – номер моды, который для МШГ совпадает с азимутальным индексом. Также введен индекс q , указывающий номер корня характеристического уравнения. Мы рассматривали фундаментальные моды с $q = 1$.

Зависимость показателя преломления n германосиликатных стекол $(1-x)\text{SiO}_2-x\text{GeO}_2$ от длины волны λ определялась согласно следующей модели [18]:

$$n^2 = 1 + \sum_1^3 \frac{[SA_i + x(GA_i - SA_i)]\lambda^2}{\lambda^2 - [SI_i + x(GI_i - SI_i)]^2}, \quad (3)$$

где x – молярная доля GeO_2 ; $i = 1-3$; SA_i, SI_i – коэффициенты Сельмейера для SiO_2 , а GA_i, GI_i – коэффициенты Сельмейера для GeO_2 : $SA_1 = 0.6961663$ мкм, $SI_1 = 0.0684043$ мкм, $SA_2 = 0.4079426$ мкм, $SI_2 = 0.1162414$ мкм, $SA_3 = 0.8974794$ мкм, $SI_3 = 9.896161$ мкм, $GA_1 = 0.80686642$ мкм, $GI_1 = 0.068972606$ мкм, $GA_2 = 0.71815848$ мкм, $GI_2 = 0.15396605$ мкм, $GA_3 = 0.85416831$ мкм, $GI_3 = 11.841931$ мкм [18].

Был разработан численный код для нахождения корней характеристического уравнения и определения собственных частот ν_l . Для локализации корней использовались аппроксимационные формулы для собственных частот волн ТМ-типа [17],

$$\nu_l = \frac{c}{2\pi R n} \left[(l + 1/2) + 1.85576(l + 1/2)^{1/3} - \frac{1}{n^2} \frac{n^2}{n^2 - 1} \right], \quad (4)$$

и волн ТЕ-типа:

$$\nu_l = \frac{c}{2\pi R n} \left[(l + 1/2) + 1.85576(l + 1/2)^{1/3} - \frac{n^2}{n^2 - 1} \right]. \quad (5)$$

Приближенные значения ν_l использовались в качестве инициаторов алгоритма поиска корней уравнения (использовался модифицированный метод Пауэлла). Зависимость показателя преломления от частоты учитывалась итерационно.

Было установлено, что собственные частоты МШГ для ТЕ и ТМ мод различаются незначительно, поэтому далее все расчеты приведены для ТМ мод.

Коэффициент квадратичной дисперсии β_2 с учетом материального и геометрического вкладов рассчитывался по формуле

$$\beta_2 = -\frac{1}{4\pi^2 R} \frac{\Delta(\Delta\nu_l)}{(\Delta\nu_l)^3}, \quad (6)$$

где

$$\Delta\nu_l = \frac{1}{2}(\nu_{l+1} - \nu_{l-1}), \quad \Delta(\Delta\nu_l) = \nu_{l+1} - 2\nu_l + \nu_{l-1}. \quad (7)$$

Мы рассчитали дисперсию микросфер с различными радиусами R из стекол $(1-x)\text{SiO}_2-x\text{GeO}_2$ для $0 \leq x \leq 1$. На рис.1 приведены зависимости длины волны нулевой дисперсии λ_0 , а на рис. 2 – зависимости коэффициента β_2 от x и R на предполагаемых длинах волн излучения накачки $\lambda_p \approx 1.55$ и 2 мкм. Здесь и далее мы находили номер моды, соответствующей наиболее близкой к λ_p длине волны, и предполагали, что длина волны лазера накачки может быть подстроена нужным образом. Нас интересовали области небольшой аномальной дисперсии, необходимой для потенциальной генерации диссипативных солитонов. Для фундаментальной моды в микрорезонаторах МШГ наблюдается смещение нуля дисперсии в длинноволновую область относительно нуля материальной дисперсии, обусловленное волноводным вкладом. Чем меньше размер микросферы, тем больше волноводный вклад в дисперсию МШГ и сильнее ее отличие от дисперсии стекла. Из рис. 1 и 2 видно, что при использовании накачки на $\lambda_p = 1.55$ мкм следует выбирать микросферы из кварцевого стекла или германосиликатного стекла с низким содержанием диоксида германия ($x \leq 0.2$), а при использовании накачки на $\lambda_p = 2$ мкм для изготовления микросфер, наоборот, следует выбирать германатное стекло (GeO_2) или германосиликатное стекло с высоким содержанием

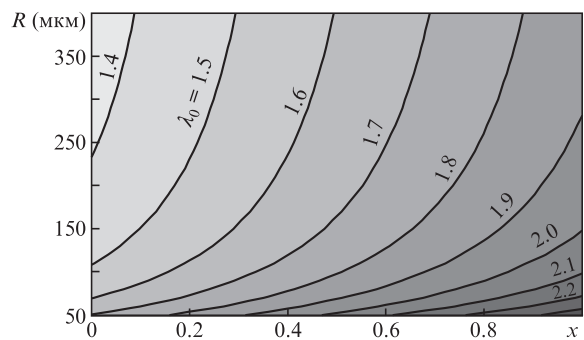


Рис.1. Длины волн нулевой дисперсии λ_0 (мкм) в зависимости от молярной доли диоксида германия в стекле x и радиуса микросферы R на основе этого стекла.

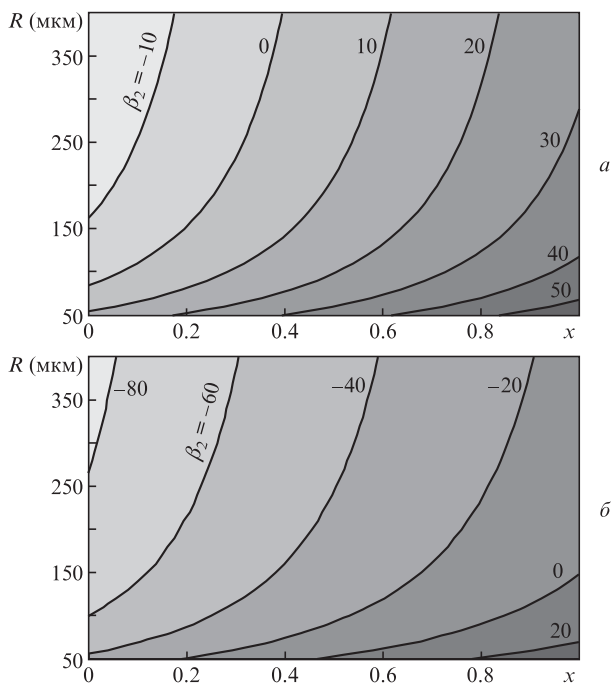


Рис.2. Коэффициент квадратичной дисперсии β_2 (пс²/км) в зависимости от молярной доли диоксида германия в стекле x и радиуса микросферы R на основе этого стекла на длине волны 1.55 (а) и 2 мкм (б).

диоксида германия ($x \geq 0.7$). В обоих случаях предпочтительно использовать микросферы с $R \approx 150-250$ мкм. На рис.3 показаны рассчитанные дисперсионные зависимости МШГ микросфер радиусом 200 мкм для различных x . Также для сравнения здесь приведены материальные дисперсионные зависимости кварцевого и германатного стекол (SiO₂ и GeO₂). Кварцевые микросферы на длине волны 2 мкм обладают большой аномальной дисперсией, что является фактором, ограничивающим их применение.

Для оценки эффективных объемов МШГ использовалась аппроксимационная формула [19]:

$$V_{\text{eff}} \approx 3.4\pi^{3/2}[\lambda/(2\pi n)]^3 l^{11/6}. \tag{8}$$

Рассчитанные эффективные объемы МШГ на $\lambda_p = 1.55$ и 2 мкм показаны на рис.4. Следует отметить слабую зависимость V_{eff} от x .

Нелинейные коэффициенты микросфер γ определялись по формуле [5]

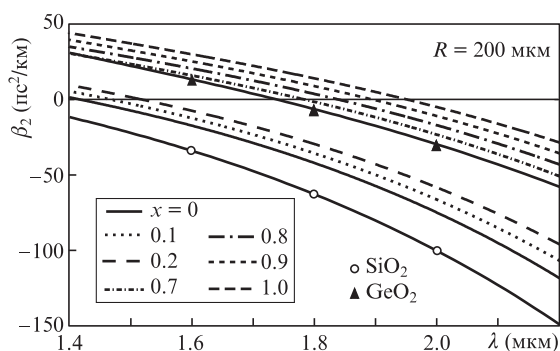


Рис.3. Спектральные зависимости коэффициента квадратичной дисперсии β_2 для микросфер радиусом 200 мкм на основе стекол $(1-x)\text{SiO}_2-x\text{GeO}_2$ при $0 \leq x \leq 1$ и стекол SiO₂ и GeO₂.

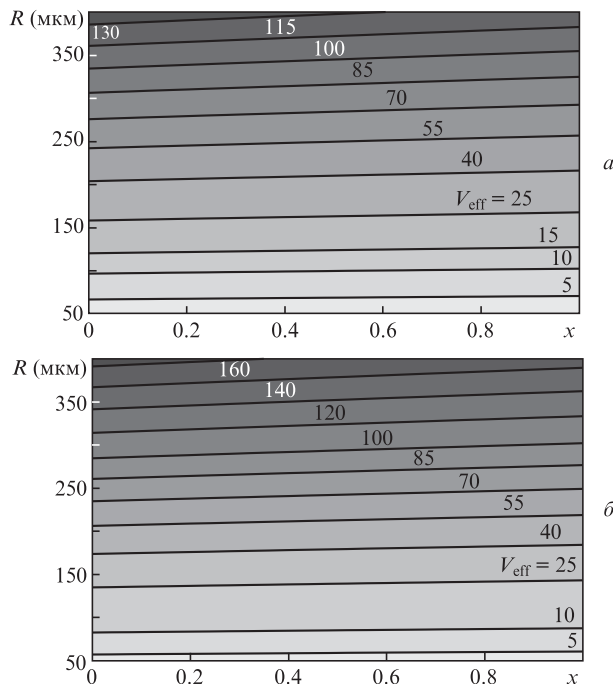


Рис.4. Эффективные объемы МШГ V_{eff} (10^3 мкм³) в зависимости от молярной доли диоксида германия в стекле x и радиуса микросферы R на основе этого стекла на $\lambda_p = 1.55$ (а) и 2 мкм (б).

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_2}{V_{\text{eff}}/(2\pi R)}. \tag{9}$$

При расчете γ мы взяли экспериментально измеренные значения нелинейного показателя преломления n_2 стекол $(1-x)\text{SiO}_2-x\text{GeO}_2$ для различных x [20] и аппроксимировали их линейной функцией:

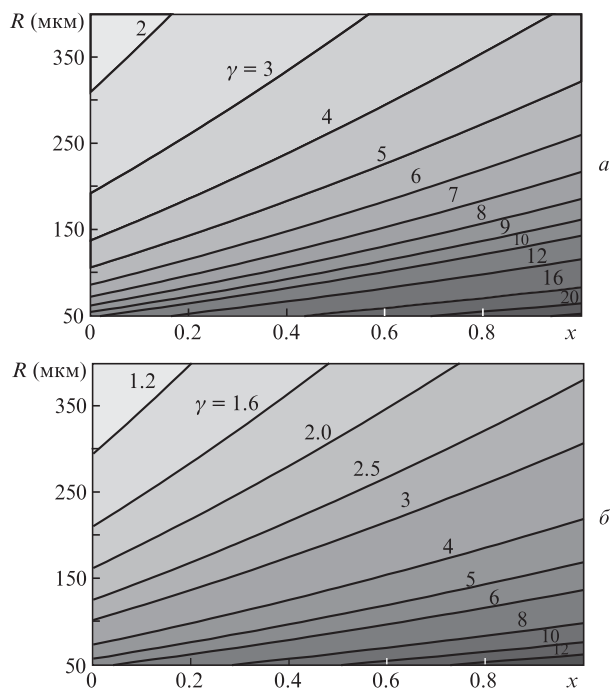


Рис.5. Нелинейные коэффициенты резонаторов МШГ γ ($\text{Вт}^{-1}\cdot\text{км}^{-1}$) в зависимости от молярной доли диоксида германия в стекле x и радиуса микросферы R на основе этого стекла на $\lambda_p = 1.55$ (а) и 2 мкм (б).

$$n_2 = n_2(\text{SiO}_2) + xK(\text{GeO}_2), \tag{10}$$

где $n_2(\text{SiO}_2) = 2.2 \times 10^{-20} \text{ м}^2/\text{Вт}$; $K(\text{GeO}_2) = 2.9 \times 10^{-20} \text{ м}^2/\text{Вт}$.

На рис.5 приведены рассчитанные зависимости нелинейных коэффициентов γ от x и R на длинах волн накачки $\lambda_p = 1.55$ и 2 мкм. Чем больше x , тем больше γ , что обусловлено зависимостью $n_2(x)$.

3. Моделирование оптических частотных гребенок

Динамика формирования оптических частотных гребенок в микросферах на основе германосиликатных стекол моделировалась в рамках уравнения Луджиато–Лефевра [21, 22]:

$$t_R \frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} = \sqrt{\theta} E_{in} + \left[-\alpha - i\delta_0 + i2\pi R \sum_{k \geq 2} \frac{\beta_k}{k!} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^k + i\gamma 2\pi R |E|^2 \right] E, \tag{11}$$

где $E(t, \tau)$ – комплексная огибающая поля внутри микрорезонатора; t и τ – медленное и быстрое время; $t_R = 2\pi Rn/c$ – время обхода микрорезонатора; $t = mt_R$; m – номер обхода микрорезонатора; δ_0 – отстройка частоты поля накачки E_{in} от ближайшего резонанса; θ – коэффициент связи; α – коэффициент потерь как сумма собственных потерь и потерь связи. В расчетах мы использовали значение добротности $Q = 10^7$, чтобы продемонстрировать саму возможность генерации оптических частотных гребенок. Коэффициент потерь на длине волны накачки связан с параметрами микросферы следующим образом: $\alpha = (2\pi)^2 R \times (Q\lambda_p)^{-1}$. Зависимостью потерь от длины волны мы пренебрегали. Предполагалось, что мощность узкополосных источников накачки как на $\lambda_p = 1.55$ мкм, так и на $\lambda_p = 2$ мкм может составлять 100 мВт . Характерные отстройки от резонанса δ_0 составляли $\sim 10^{-3}$, радиус микросфер $R = 200$ мкм. Коэффициент связи был равен коэффициенту потерь [23]: $\theta = \alpha = 5 \times 10^{-4}$ на $\lambda_p = 1.55$ мкм и $\theta = \alpha = 4 \times 10^{-4}$ на $\lambda_p = 2$ мкм. При накачке на длине волны 1.55 мкм рассматривались составы стекол с молярной долей диоксида германия $x = 0-0.2$, а при накачке на 2 мкм – с $x = 0.7-1$ в соот-

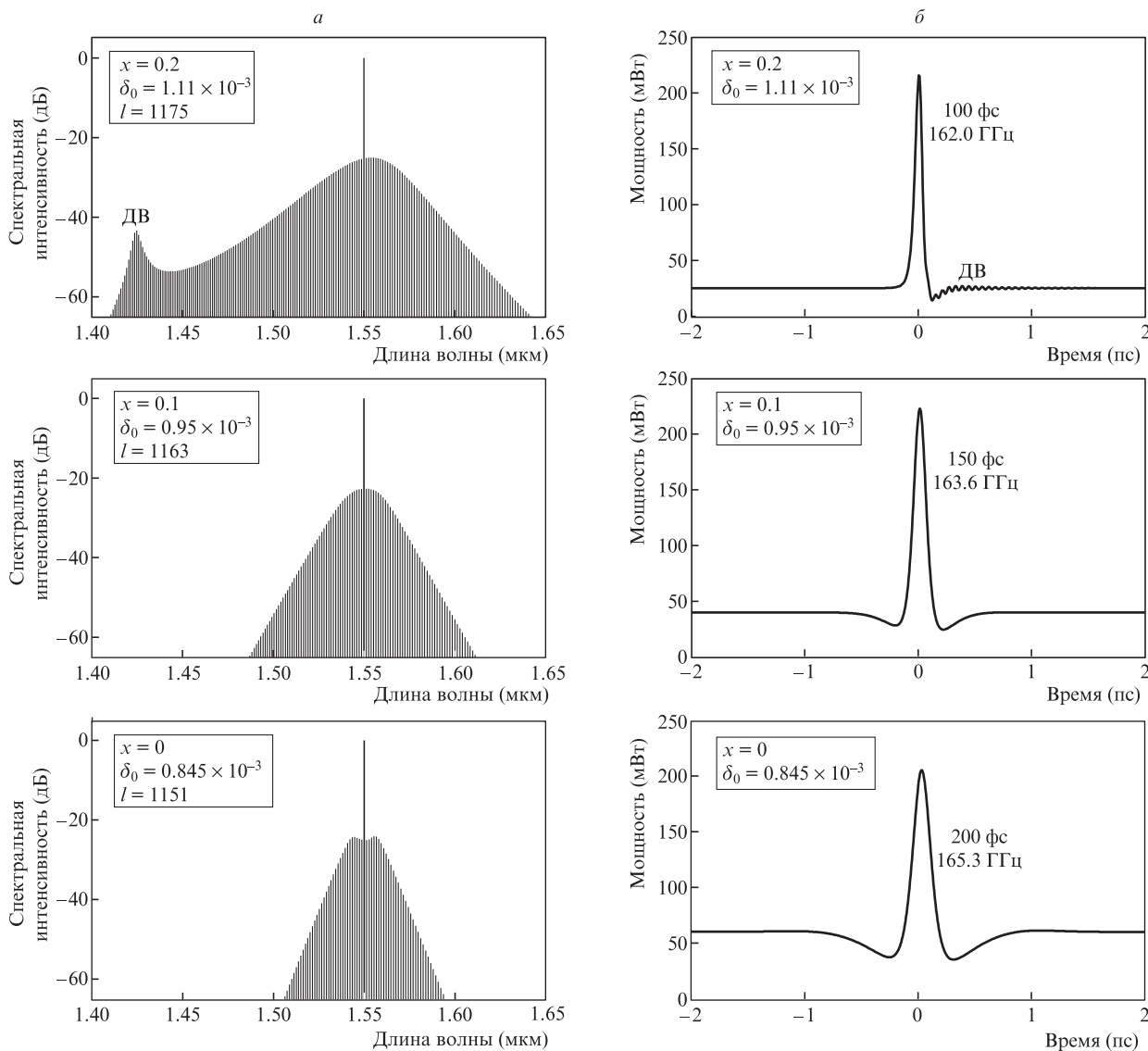


Рис.6. Полученные в результате численного моделирования при накачке на $\lambda_p = 1.55$ мкм спектры оптических частотных гребенок (а) и распределения мощностей во временном представлении (б) на выходе микросфер радиусом 200 мкм на основе германосиликатных стекол с различными молярными долями диоксида германия x . ДВ – дисперсионные волны, l – номер МШГ.

ветствии с требованиями на параметры микросфер, сформулированными в разд.2 при анализе их дисперсионных свойств.

При моделировании уравнения (11) с помощью специально разработанного нами численного кода применялся метод расщепления Фурье по физическим факторам (SSFM) с использованием быстрого преобразования Фурье [24].

Известно, что динамика формирования оптических гребенок может быть очень сложной – в зависимости от па-

раметров системы могут реализовываться различные сценарии [3, 5, 25–27]. Здесь анализируемыми объектами являются диссипативные солитоны [3, 5, 23, 28]. Мы ищем стационарные решения, поэтому в качестве начальных условий для уравнения (11) задаются приближенные аналитические выражения, приведенные в работе [5]. В численном моделировании использовались дисперсионные зависимости, показанные на рис.3. Рассчитанные спектры ОЧГ и распределения мощностей во временном представлении при $\lambda_p = 1.55$ мкм для $x = 0.2, 0.1, 0$ и при $\lambda_p = 2$ мкм

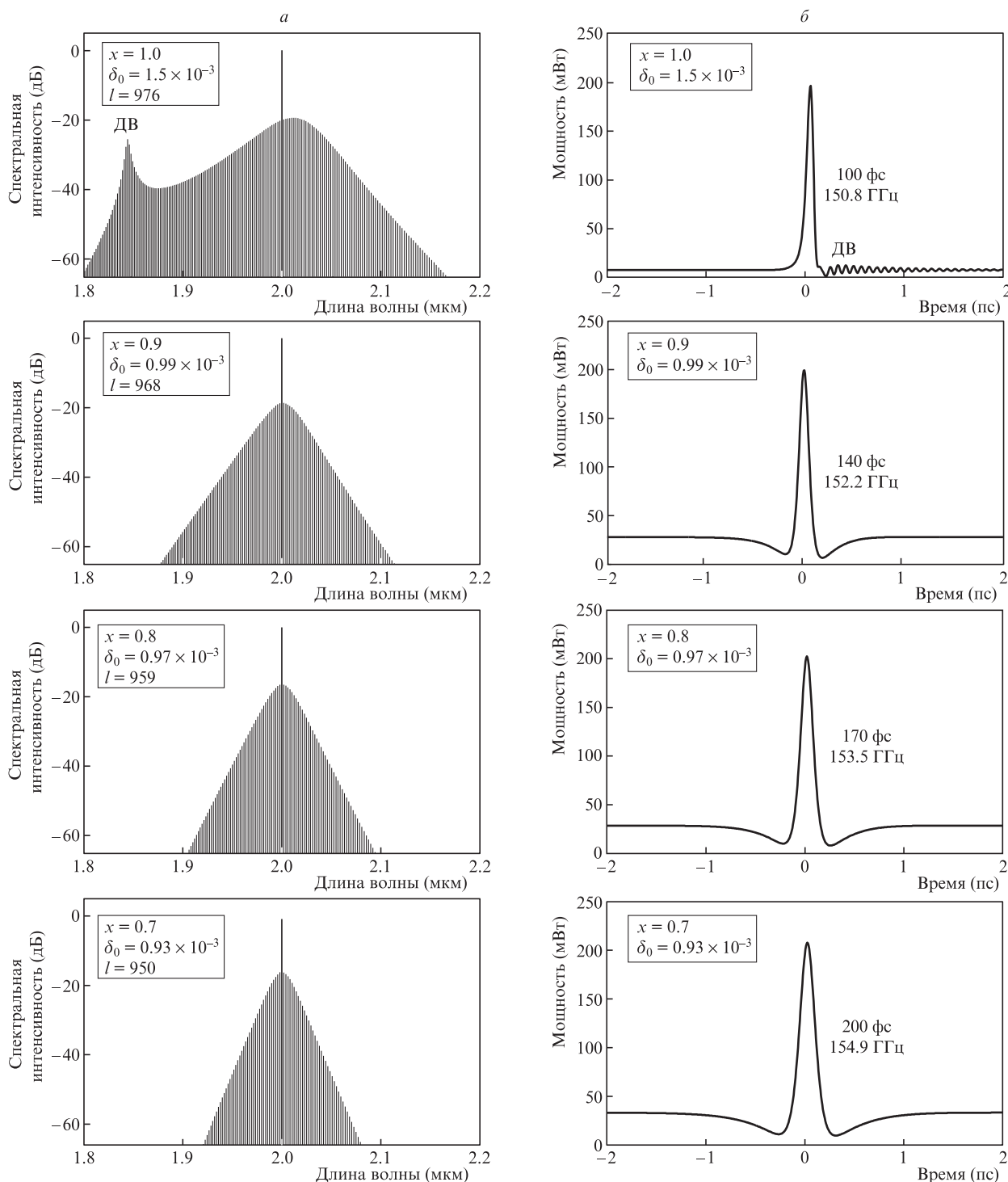


Рис.7. Полученные в результате численного моделирования при накачке на $\lambda_p = 2$ мкм спектры оптических частотных гребенок (a) и распределения мощностей во временном представлении (б) на выходе микросфер радиусом 200 мкм на основе германосиликатных стекол с различными молярными долями диоксида германия x . ДВ – дисперсионные волны, l – номер МШГ.

для $x = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ показаны на рис.6 и 7. На рис.6,а и 7,а приведены длина волны накачки и номер l соответствующей МШГ, на рис.6,б и 7,б – длительность и частота следования ($1/t_R$) диссипативных солитонов во временном представлении. Чем меньше абсолютное значение аномальной дисперсии на длине волны накачки, тем шире спектр диссипативного солитона и меньше его длительность. Так, спектральная ширина ОЧГ, сгенерированной в микросфере из стекла $0.8\text{SiO}_2-0.2\text{GeO}_2$ с $\beta_2 = -3$ пс²/км на длине волны 1.55 мкм, составляет ~ 200 нм при длительности солитона ~ 100 фс, тогда как спектральная ширина ОЧГ, сгенерированной в микросфере из кварцевого стекла с $\beta_2 = -12$ пс²/км на той же длине волны, составляет менее 100 нм при длительности солитона ~ 200 фс. При $\lambda_p = 2$ мкм спектральные ширины оптических частотных гребенок составляют ~ 300 и ~ 150 нм при длительностях солитонов ~ 100 и ~ 200 фс, сгенерированных в микросферах из германатного стекла с $\beta_2 = -5$ пс²/км и из стекла $0.3\text{SiO}_2-0.7\text{GeO}_2$ с $\beta_2 = -23$ пс²/км соответственно.

Отметим интересную особенность оптических частотных гребенок, сгенерированных при $\lambda_p = 1.55$ мкм, $x = 0.2$ и при $\lambda_p = 2$ мкм, $x = 1$, – наличие локальных максимумов спектральных интенсивностей на коротковолновых крыльях (рис.6, 7). Эта особенность имеет простое объяснение. Известно, что если в процессе эволюции импульса в среде с керровской нелинейностью и аномальной дисперсией при наличии кубической дисперсии уширенное крыло спектра попадает в область нормальной дисперсии, то вблизи точки синхронизма с солитоном наблюдается генерация дисперсионных волн (ДВ). Отметим, что этот эффект вначале был открыт и изучен для оптических волокон [24, 29], а позднее исследован для микрорезонаторов [23, 30]. Во временном представлении коротковолновые ДВ расположены на заднем фронте диссипативного солитона, что также отмечено на рис.6, 7.

4. Заключение

Предложена и теоретически исследована возможность использования сферических микрорезонаторов мод шепчущей галереи на основе германосиликатных стекол $(1-x)\text{SiO}_2-x\text{GeO}_2$ с различным содержанием GeO_2 ($0 \leq x \leq 1$) для генерации оптических частотных гребенок в режиме диссипативного солитона при накачке на длине волны 1.55 или 2 мкм. Проведен расчет и анализ дисперсии и нелинейности микросфер различных радиусов, определены их оптимальные характеристики и ожидаемые при этом параметры выходного излучения. Показано, что при использовании накачки на длине волны 1.55 мкм следует выбирать микросферы из кварцевого или германосиликатного стекла с низким содержанием диоксида германия ($x \leq 0.2$), а при использовании накачки на длине волны 2 мкм, наоборот, следует выбирать германосиликатное стекло с высоким содержанием диоксида германия ($x \geq 0.7$). В обоих случаях предпочтительно использовать микросферы радиусом 150–250 мкм. Показано, что при мощности лазерной накачки 100 мВт в оптимальных случаях спектральные ширины оптических частотных гребенок, формируемых в микросфере из стекла $0.8\text{SiO}_2-0.2\text{GeO}_2$ на центральной длине волны 1.55 мкм и

в микросфере из стекла GeO_2 на центральной длине волны 2 мкм, могут составлять ~ 200 и ~ 300 нм соответственно. В этих случаях, помимо диссипативного солитона длительностью ~ 100 фс, также наблюдается генерация дисперсионных волн. Использование микросфер на основе германосиликатных стекол с оптимальными составами позволяет получить оптические частотные гребенки с большей спектральной шириной, чем при использовании кварцевых микросфер.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-72-00176).

1. Городецкий М.Л. *Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью* (М.: Физматлит, 2011).
2. Del'Haye P., Schliesser A., Arcizet O., Wilken T., Holzwarth R., Kippenberg T.J. *Nature*, **450**, 1214 (2007).
3. Kippenberg T.J., Gaeta A.L., Lipson M., Gorodetsky M.L. *Science*, **361**, eaan8083 (2018).
4. Riesen N., Afshar S., François A., Monro T.M. *Opt. Express*, **23**, 14784 (2015).
5. Herr T., Brasch V., Jost J.D., Wang C.Y., Kondratiev N.M., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. *Nature Photon.*, **8**, 145 (2014).
6. Webb K.E., Erkintalo M., Coen S., Murdoch S.G. *Opt. Lett.*, **41**, 4613 (2016).
7. Savchenkov A.A., Ilchenko V.S., Handley T., Maleki L. *Opt. Lett.*, **28**, 649 (2003).
8. Savchenkov A.A., Ilchenko V.S., Handley T., Maleki L. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, **15**, 543 (2003).
9. Dianov E.M., Mashinsky V.M. *J. Lightwave Technol.*, **23**, 3500 (2005).
10. Лихачев М.Е., Бубнов М.М., Семенов С.Л., Хопин В.Ф., Салганский М.Ю., Гурьянов А.Н., Дианов М.Е. *Квантовая электроника*, **34**, 241 (2004) [*Quantum Electron.*, **34**, 241 (2004)].
11. Anashkina E.A., Andrianov A.V., Koptev M.Yu., Muravyev S.V., Kim A.V. *Opt. Lett.*, **39**, 2963 (2014).
12. Anashkina E.A., Andrianov A.V., Koptev M.Yu., Muravyev S.V., Kim A.V. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **20**, 7600608 (2014).
13. Yin K., Zhang B., Yang L., Hou J. *Photon. Res.*, **6**, 123 (2018).
14. Yin K., Zhang B., Yao J., Yang L., Liu G., Hou J. *Opt. Lett.*, **41**, 5067 (2016).
15. Jain D., Sidharthan R., Moselund P.M., Yoo S., Ho D., Bang O. *Opt. Express*, **24**, 26667 (2016).
16. Jain D., Bang O., Yoo S., Sidharthan R., Moselund P., Bowen P., Woyessa G. *J. Opt. Soc. Am. B*, **36**, 86 (2019).
17. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **32**, 377 (2002) [*Quantum Electron.*, **32**, 377 (2002)].
18. Fleming J.W. *Appl. Opt.*, **23**, 4486 (1984).
19. Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Phys. Lett. A*, **137**, 393 (1989).
20. Yatsenko Y., Mavritsky A. *Opt. Lett.*, **32**, 3257 (2007).
21. Lugiato L.A., Lefever R. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 2209 (1987).
22. Lugiato L.A., Prati F., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **376**, 20180113 (2018).
23. Agrawal G.P. *Nonlinear Fiber Optics* (New York: Academic Press, 2013).
24. Cherenkov A.V., Kondratiev N.M., Lobanov V.E., Shitikov A.E., Skryabin D.V., Gorodetsky M.L. *Opt. Express*, **25**, 31148 (2017).
25. Xue X., Xuan Y., Liu Y., Wang P.H., Chen S., Wang J., Leaird D.E., Qi M., Weiner A.M. *Nature Photon.*, **9**, 594 (2015).
26. Coen S., Erkintalo M. *Opt. Lett.*, **38**, 1790 (2013).
27. Coen S., Randle H.G., Sylvestre T., Erkintalo M. *Opt. Lett.*, **38**, 37 (2013).
28. Herr T., Brasch V., Jost J.D., Mirgorodskiy I., Lihachev G., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 123901 (2014).
29. Wai P.K.A., Menyuk C.R., Lee Y.C., Chen H.H. *Opt. Lett.*, **11**, 464 (1986).
30. Brasch V., Geiselmann M., Herr T., Lihachev G., Pfeiffer M.H.P., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. *Science*, **351**, 357 (2016).