Моделирование анизотропии усиления, наведенной линейно поляризованным излучением накачки, в биполяризационном Nd:YAG-лазере

Н.Д.Миловский, П.А.Хандохин

Предложена модель биполяризационного твердотельного Nd:YAG-лазера, учитывающая реальную ориентацию поглощающих и излучающих диполей активных центров Nd^{3+} в элементарной ячейке алюмоиттриевого граната, которая описывает экспериментально наблюдавшийся эффект анизотропии усиления, наведенной линейно поляризованным излучением накачки. Модель предсказывает новый вид неустойчивости, обусловленный наличием двух конкурирующих каналов накачки, не обсуждавшийся ранее в литературе.

Ключевые слова: *лазер, поляризационная мода, наведенная анизотропия усиления, релаксационные колебания.*

1. Введение

Создание твердотельных лазеров с полупроводниковой накачкой линейно поляризованным излучением позволило провести детальное исследование их поляризационных свойств. При малой амплитудной анизотропии и достаточно большом превышении накачкой порогового значения, как правило, наблюдается одновременная генерация на ортогонально поляризованных модах. Эти режимы генерации были обнаружены при исследовании первых микрочиповых Nd:YAG-лазеров [1] и волоконных лазеров, активированных ионами неодима [2, 3] и эрбия [4]. Изучение режимов генерации на ортогонально поляризованных модах в биполяризационных лазерах способствует решению различных фундаментальных и прикладных задач. В частности, такие лазеры могут применяться в телекоммуникациях, спектроскопии, доплеровских измерителях скорости, виброметрии, при создании оптических компьютеров и оптико-микроволновых систем, для засекречивания данных и т. д. [5]. Эти примеры указывают на важность и актуальность исследований влияния взаимодействия поляризационных мод на динамику лазерной генерации [6].

Особый интерес представляет случай, когда доминирующий тип анизотропии обусловлен анизотропией усиления, наведенной линейно поляризованным излучением накачки. Такая наведенная анизотропия усиления наблюдается в лазерах на красителях [7–9] и в твердотельных лазерах [1–3, 10–18]. Этот эффект проявлялся в зависимости порогов генерации и интенсивностей поляризационных мод от ориентации поляризации излучения накачки. «Сильной» поляризационной моде соответствовало положение анализатора, при котором интенсивность прошедшего излучения была максимальной, а «слабой» – ортогональное положение анализатора, при котором интенсивность прошедшего излучения была минимальной. Вращение плоскости поляризации накачки приводит к противофазному изменению интенсивностей поляризационных мод I_1 и I_2 с периодом, равным 180°.

Для объяснения экспериментальных результатов в работах [12–16] была предложена модель лазера с инерционной активной средой (лазеры класса B по классификации Арекки [19]), в основу которой легли упрощающие предположения о равномерном угловом распределении линейно поляризованных дипольных моментов активных центров в ортогональной оси резонатора плоскости. В рамках этой модели удалось интерпретировать экспериментально обнаруженные нами зависимости интенсивностей ортогонально поляризованных мод волоконного лазера и Nd:YAG-лазера от поляризации поля лазерной накачки и объяснить наличие противофазных колебаний интенсивностей ортогонально поляризованных мод. В работах [20, 21] рассматривалась альтернативная модель, в которой предлагалось считать эти диполи линейно поляризованными и ориентированными по кристаллографическим осям. Несмотря на хорошее согласие теории с экспериментом остается сомнение относительно полной адекватности этих моделей описанию динамики Nd:YAG-лазеров.

Поскольку в целом кристалл является кубическим, то каждая его элементарная ячейка содержит ионы иттрия, локализованные в шести четко ориентированных состояниях с D_2-симметрией. Каждый из указанных ионов может быть замещен ионом неодима Nd^{3+}. Симметрия этих состояний схематично представлена на рис.1, где p_i, q_i и r_i (i = 1,2,3) – локальные ортогональные оси C_2-симметрии [22, 23]. Дипольные моменты ориентированы вдоль данных осей в соответствии с правилами отбора для магнито- и электродипольных переходов. Это согласуется с работами Феофилова [24, 25], в которых показано, что излучающие и поглощающие диполи ориентируются по осям симметрии активных центров, которые не всегда совпадают с кристаллографическими осями.

Все поглощающие и лазерные (излучающие) электродипольные переходы формируются между мультиплета-

Н.Д.Миловский. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Россия, 603950 Н.Новгород, просп. Гагарина, 23; e-mail: mil1940@mail.ru
П.А.Хандохин. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: khando@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 31 августа 2018 г., после доработки – 22 ноября 2018 г.

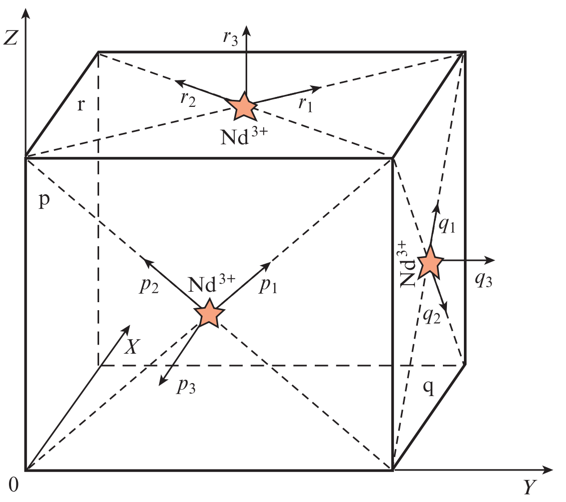

Рис.1. Схема возможных положений активных ионов в элементарной ячейке кристаллической матрицы алюмоиттриевого граната (YAG).

ми: $^4I_{9/2}$–$^2H_{9/2}$, $^4I_{9/2}$–$^4F_{5/2}$ и $^4F_{3/2}$–$^4I_{11/2}$ [26]. Они имеют определенные поляризационные состояния в соответствии с правилами отбора и определенные пространственные ориентации относительно кристаллографических осей. При лазерной накачке на длине волны 810 нм в процессе возбуждения активной среды участвуют мультиплеты $^4F_{5/2}$ и $^2H_{9/2}$. На рис.2 изображены все возможные переходы, отвечающие процессу поглощения излучения накачки. Ширина зоны поглощения в области 810 нм составляет примерно 10 нм [27]. Несмотря на отсутствие точной информации о величине вклада каждого перехода в процесс поглощения накачки, можно с уверенностью утверждать, что в нем могут участвовать переходы с линейно ($\Delta J_z = 0$) и циркулярно ($\Delta J_z = \pm 1$) поляризованными дипольными моментами. Поэтому при вычислении населенностей верхних рабочих уровней [7, 15, 28] необходимо учитывать взаимодействие поляризованного излучения накачки с линейно (π) и циркулярно (σ) поляризованными диполями поглощающих переходов. Несколько иначе обстоит дело с лазерными переходами. На рис.3 показаны оба перехода, дающие вклад в линию излучения на $\lambda = 1064$ нм. Видно, что оба они являются σ-переходами.

Рис.2. Возможные переходы, отвечающие процессу поглощения излучения накачки.

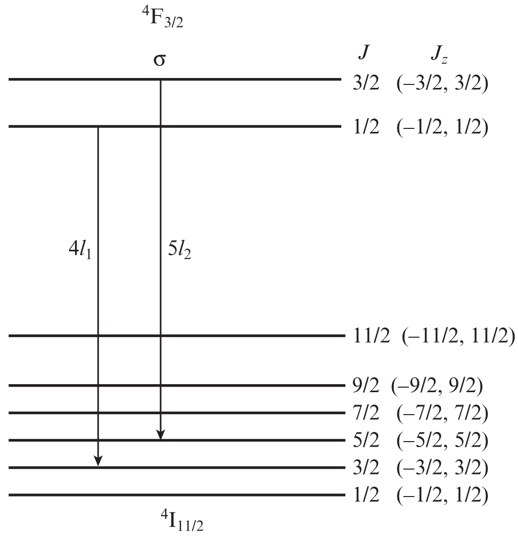

Рис.3. Лазерные переходы, дающие вклад в линию излучения на $\lambda = 1064$ нм.

В Nd : YAG-лазере эллиптически поляризованные ортогональные моды генерируются независимо от пространственной структуры их поля, которая определяется типом используемого резонатора (кольцевого или Фабри–Перо). Причинами этого могут быть неплоскостность контура кольцевого резонатора [29] либо остаточное двулучепреломление рабочего кристалла [30].

В настоящей работе предлагается модель биполяризационного Nd : YAG-лазера на основе резонатора Фабри–Перо, в которой при описании взаимодействий с поляризованным полем накачки и полями эллиптически поляризованных ортогональных мод учитываются реальные поляризационные свойства резонансных переходов девяти различных групп активных ионов в элементарной ячейке кристаллической матрицы (рис.1).

2. Модель Nd : YAG-лазера с продольной поляризованной накачкой

В рассматриваемой модели поле поляризованного излучения лазера накачки с частотой ω_p

$$\boldsymbol{E}_p = (1/2)|\boldsymbol{E}_p|\boldsymbol{e}_p^0\exp(\mathrm{i}\omega_p t) + \text{c. c.}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{e}_p^0 = \boldsymbol{y}^0\cos\Psi_p + z^0\sin\Psi_p$, распространяется вдоль оси резонатора, совпадающей с кристаллографической осью X (рис.4). Ориентация кристалла [100]. Будем полагать, что осуществляется одночастотная генерация на двух ортогонально поляризованных продольных модах резонатора,

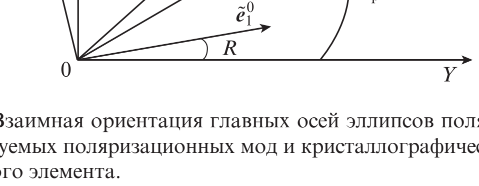

Рис.4. Взаимная ориентация главных осей эллипсов поляризаций генерируемых поляризационных мод и кристаллографических осей активного элемента.

$$\boldsymbol{E} = (1/2)(\tilde{E}_1\tilde{\boldsymbol{U}}_1 + \tilde{E}_2\tilde{\boldsymbol{U}}_2)\exp(\mathrm{i}\omega t) + \text{c. c.}, \quad (2)$$

имеющих одинаковую пространственную структуру поля

$$\tilde{U}_m = \sqrt{2}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_m^0\cos(kx) \quad (3)$$

и ортогональные орты $\tilde{\boldsymbol{e}}_m^0$ двух собственных поляризаций: $\tilde{\boldsymbol{e}}_1^0\tilde{\boldsymbol{e}}_2^{0*} = \tilde{\boldsymbol{e}}_1^{0*}\tilde{\boldsymbol{e}}_2^0 = 0$. Здесь $\tilde{E}_{1,2}$ – медленно меняющиеся комплексные амплитуды ортогонально поляризованных полей; ω и k – несущая частота и волновое число генерируемых колебаний. Каждый орт $\tilde{\boldsymbol{e}}_{1,2}^0$ в общем случае можно представить в виде суммы двух проекций на направления $\boldsymbol{y}^{0\prime}$ и $\boldsymbol{z}^{0\prime}$ главных осей эллипсов собственных поляризаций лазерного поля:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1^0 = \boldsymbol{y}^{0\prime}\cos\vartheta + \mathrm{i}\boldsymbol{z}^{0\prime}\sin\vartheta, \quad (4)$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_2^0 = \mathrm{i}\boldsymbol{y}^{0\prime}\sin\vartheta + \boldsymbol{z}^{0\prime}\cos\vartheta, \quad (5)$$

где угол ϑ определяет параметр эллиптичности поляризационных мод $\varepsilon = |\tan\vartheta|^2$.

Введем угол R между главными осями эллипсов поляризаций генерируемых мод и соответствующими кристаллографическими осями активного элемента (рис.4), так что орты будут связаны соотношениями

$$\boldsymbol{x}^{0\prime} = \boldsymbol{x}^0, \quad \boldsymbol{y}^{0\prime} = \boldsymbol{y}^0\cos R + \boldsymbol{z}^0\sin R, \quad \boldsymbol{z}^{0\prime} = -\boldsymbol{y}^0\sin R + \boldsymbol{z}^0\cos R. \quad (6)$$

В проекциях на кристаллографические оси орты поляризаций генерируемых мод (4) и (5) можно представить в виде

$$\boldsymbol{e}_1^0 = \boldsymbol{y}^0(\cos R\cos\vartheta - \mathrm{i}\sin R\sin\vartheta) + \boldsymbol{z}^0(\sin R\cos\vartheta + \mathrm{i}\cos R\sin\vartheta), \quad (7)$$

$$\boldsymbol{e}_2^0 = \boldsymbol{y}^0(\mathrm{i}\cos R\sin\vartheta - \sin R\cos\vartheta) + \boldsymbol{z}^0(\cos R\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin R\sin\vartheta). \quad (8)$$

Динамика биполяризационного лазера может быть описана следующей системой уравнений [15]:

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{i}(-1)^m E_m\delta - \frac{G}{2}E_m + \frac{G}{L}\sum_s\int_x[(\boldsymbol{e}_{\mathrm{L}}^{\sigma+s}\boldsymbol{E})N_+^s(\boldsymbol{e}_{\mathrm{L}}^{\sigma+s}\tilde{\boldsymbol{U}}_m)^* + (\boldsymbol{e}_{\mathrm{L}}^{\sigma-s}\boldsymbol{E})N_-^s(\boldsymbol{e}_{\mathrm{L}}^{\sigma-s}\tilde{\boldsymbol{U}}_m)^*]\mathrm{d}x, \quad m = 1,2,$$

$$\frac{\partial N_\pm^s}{\partial\tau} = gA_s - N_\pm^s\left(1 + \left|\boldsymbol{e}_{\mathrm{L}}^{\sigma\pm s}\boldsymbol{E}\right|^2\right), \quad s = p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3,r_1,r_2,r_3, \quad (9)$$

где

$$A_s \equiv A_s^\pi + \frac{1}{2}(A_s^{\sigma+} + A_s^{\sigma-}) = \frac{b_1|\boldsymbol{e}_{\mathrm{p}}^0\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi s}|^2}{b_1|\boldsymbol{e}_{\mathrm{p}}^0\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi s}|^2 + 1} + \frac{1}{2}\left(\frac{b_2|\boldsymbol{e}_{\mathrm{p}}^0\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma+s}|^2}{b_2|\boldsymbol{e}_{\mathrm{p}}^0\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma+s}|^2 + 1} + \frac{b_2|\boldsymbol{e}_{\mathrm{p}}^0\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma-s}|^2}{b_2|\boldsymbol{e}_{\mathrm{p}}^0\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma-s}|^2 + 1}\right); \quad (10)$$

полусумма $(A_s^{\sigma+} + A_s^{\sigma-})/2$ берется из соображений равновероятности вклада от право- и левополяризованных диполей: один циркулярно поляризованный активный центр может дать либо правополяризованный, либо левополяризованный вклад; $\tau = t/T_1$; $G = T_1/T_{\mathrm{c}}$; $g = T_1/\tau_2$; T_1, T_{c}, τ_2 – времена жизни инверсии населенностей, поля в резонаторе и верхнего уровня поглощающего перехода соответственно; $\delta = (\omega_{\mathrm{c}}^{(1)} - \omega_{\mathrm{c}}^{(2)})T_1$; $\omega_{\mathrm{c}}^{(1),(2)}$ – собственные частоты поляризационных мод, которые в отсутствие фазовой анизотропии резонатора совпадают; L – длина резонатора.

Переход от нелинейных дифференциальных уравнений (9), в которых неизвестная функция $N_\pm^s(\tau,x)$ имеет пространственную зависимость, к системе уравнений в обыкновенных производных приводит к системе уравнений бесконечно высокого порядка (из-за бесконечно большого числа пространственных гармоник инверсии населенностей $N_{lk}^{\pm s}$, $l = 0,1,\ldots,\infty$). Для целей настоящего исследования бесконечный ряд гармоник инверсии населенностей следует ограничить только теми гармониками инверсии населенностей, которые в явном виде входят в уравнения для полей:

$$N_0^{\pm s} = \frac{1}{L}\int_0^L N_\pm^s\mathrm{d}x, \quad N_k^{\pm s} = -\frac{1}{L}\int_0^L N_\pm^s\cos(2kx)\,\mathrm{d}x.$$

В отличие от работы [15], в которой поглощающие диполи предполагались линейно поляризованными и равномерно распределенными по азимуту Ψ в перпендикулярной оси резонатора плоскости, здесь учитывается реальное состояние поляризации поглощающих диполей как на π-, так и на σ-переходах. В связи с этим вместо одного параметра b в [15] в (10) присутствуют два параметра – b_1 и b_2:

$$b_1 = b_1^0 A = \frac{\tau_2 T_{\mathrm{a}}^\pi|\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^\pi|^2}{\hbar^2}\mathrm{Re}\,L_{\mathrm{a}}^\pi|\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}|^2,$$

$$b_2 = b_2^0 A = \frac{\tau_2 T_{\mathrm{a}}^\sigma|\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm}|^2}{\hbar^2}\mathrm{Re}\,L_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm}|\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}|^2, \quad (11)$$

где $A = |\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}|^2$ – параметр накачки; $L_{\mathrm{a}}^{\pi,\sigma\pm} = [1 - \mathrm{i}(\omega_{\mathrm{p}} - \omega_{\mathrm{a0}}^{\pi,\sigma\pm}) \times T_{\mathrm{a}}^{\pi,\sigma\pm}]^{-1}$; $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{\pi,\sigma\pm}$, $\omega_{\mathrm{a0}}^{\pi,\sigma\pm}$, $(T_{\mathrm{a}}^{\pi,\sigma\pm})^{-1}$ – дипольные моменты, центральные частоты и полуширины однородных линий поглощения соответствующих переходов. Кроме того, интегрирование по всем равномерно распределенным по азимуту Ψ дипольным моментам в [15] заменяется в (9) суммированием по девяти группам активных центров, имеющим вполне определенную фиксированную ориентацию поглощающих и излучающих дипольных моментов. Ниже приведены выражения для ортов линейно и циркулярно поляризованных дипольных моментов поглощающих переходов активных центров, расположенных в гранях p, q и r (см. вывод этих выражений в Приложении):

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi p_1} = (\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm p_1} = \frac{\boldsymbol{x}^0 \mp \mathrm{i}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi p_2} = (-\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm p_2} = \frac{\boldsymbol{x}^0 \pm \mathrm{i}(\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi p_3} = -\boldsymbol{x}^0, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm p_3} = (\boldsymbol{y}^0 \pm \mathrm{i}\boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2},$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi q_1} = (\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm q_1} = \frac{\boldsymbol{y}^0 \mp \mathrm{i}(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi q_2} = (-\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm q_2} = \frac{\boldsymbol{y}^0 \pm \mathrm{i}(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi q_3} = \boldsymbol{y}^0, \qquad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm q_3} = (\boldsymbol{x}^0 \pm \mathrm{i}\boldsymbol{z}^0)/\sqrt{2},$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi r_1} = (\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y}^0)/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm r_1} = \frac{\boldsymbol{z}^0 \pm \mathrm{i}(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}^0)/\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi r_2} = (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}^0)/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm r_2} = \frac{\boldsymbol{z}^0 \pm \mathrm{i}(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y}^0)/\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\pi r_3} = \boldsymbol{z}^0, \qquad \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm r_3} = (\boldsymbol{x}^0 \pm \mathrm{i}\boldsymbol{y}^0)/\sqrt{2}.$$

Орты излучающих диполей совпадают с ортами циркулярно поляризованных поглощающих диполей:

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{L}}^{\sigma\pm s} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}^{\sigma\pm s}, \quad s = p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3. \tag{13}$$

Используя выражения (12) и (1), можем найти вклад от каждой группы активных центров в параметр A_s (10):

$$A_{p_1} = \frac{b_1(1+\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})}{2+b_1(1+\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})} + \frac{b_2(1-\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})}{4+b_2(1-\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})},$$

$$A_{p_2} = \frac{b_1(1-\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})}{2+b_1(1-\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})} + \frac{b_2(1+\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})}{4+b_2(1+\sin 2\Psi_{\mathrm{p}})},$$

$$A_{p_3}^{\sigma} = \frac{b_2}{2+b_2}, \tag{14}$$

$$A_q = A_{q_1} = A_{q_2} = \frac{b_1(1-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{2+b_1(1-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})} + \frac{b_2(3+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{8+b_2(3+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})},$$

$$A_{q_3} = \frac{b_1(1+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{2+b_1(1+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})} + \frac{b_2(1-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{4+b_2(1-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})},$$

$$A_r = A_{r_1} = A_{r_2} = \frac{b_1(1+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{4+b_1(1+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})} + \frac{b_2(3-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{8+b_2(3-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})},$$

$$A_{r_3} = \frac{b_1(1-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{2+b_1(1-\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})} + \frac{b_2(1+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}{4+b_2(1+\cos 2\Psi_{\mathrm{p}})}.$$

Подстановка выражений (13) и (14) в (9) приводит к системе уравнений, которую можно представить в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\tau} = -\mathrm{i}E_1\delta - \frac{G}{2}E_1 + \frac{G}{4}(U_1E_1 + U_{12}E_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{i}E_2\delta - \frac{G}{2}E_2 + \frac{G}{4}(U_{12}^*E_1 + U_2E_2),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{p_1}}{\mathrm{d}\tau} = 2A_{p_1} - N_0^{p_1} - \frac{1}{4}(N_0^{p_1} + N_k^{p_1})$$

$$\times(\mathrm{XQ} - \mathrm{RscXD} - \mathrm{RcXR} + \mathrm{RssXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{p_1}}{\mathrm{d}\tau} = -N_k^{p_1} - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}N_0^{p_1} + N_k^{p_1}\Big)$$

$$\times(\mathrm{XQ} - \mathrm{RscXD} - \mathrm{RcXR} + \mathrm{RssXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{p_2}}{\mathrm{d}\tau} = 2A_{p_2} - N_0^{p_2} - \frac{1}{4}(N_0^{p_2} + N_k^{p_2})$$

$$\times(\mathrm{XQ} + \mathrm{RscXD} + \mathrm{RcXR} - \mathrm{RssXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{p_2}}{\mathrm{d}\tau} = -N_k^{p_2} - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}N_0^{p_2} + N_k^{p_2}\Big)$$

$$\times(\mathrm{XQ} + \mathrm{RscXD} + \mathrm{RcXR} - \mathrm{RssXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{+p_3}}{\mathrm{d}\tau} = A_{p_3} - N_0^{+p_3} - \frac{1}{2}(N_0^{-p_3} + N_k^{-p_3})$$

$$\times(\mathrm{XQ} + \mathrm{TsXD} - \mathrm{TcXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{+p_3}}{\mathrm{d}\tau} = -N_k^{+p_3} - \frac{1}{2}(N_0^{+p_3} + N_k^{+p_3})(\mathrm{XQ} + \mathrm{TsXD} - \mathrm{TcXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{-p_3}}{\mathrm{d}\tau} = A_{p_3} - N_0^{-p_3} - \frac{1}{2}(N_0^{-p_3} + N_k^{-p_3})$$

$$\times(\mathrm{XQ} + \mathrm{TsXD} - \mathrm{TcXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{-p_3}}{\mathrm{d}\tau} = -N_k^{-p_3} - \frac{1}{2}(N_0^{-p_3} + N_k^{-p_3})(\mathrm{XQ} + \mathrm{TsXD} + \mathrm{TcXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{+q}}{\mathrm{d}\tau} = 2A_q - N_0^{+q} - \frac{1}{8}(N_0^{+q} + N_k^{+q}) \tag{15}$$

$$\times[3\mathrm{XQ} + (\mathrm{Rcc} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ts})\mathrm{XD} + \mathrm{RsXR} - (\mathrm{Rcs} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Tc})\mathrm{XI}],$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{+q}}{\mathrm{d}\tau} = -N_0^{+q} - \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}N_0^{+q} + N_k^{+q}\Big)$$

$$\times[3\mathrm{XQ} + (\mathrm{Rcc} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ts})\mathrm{XD} + \mathrm{RsXR} - (\mathrm{Rcs} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Tc})\mathrm{XI}],$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{-q}}{\mathrm{d}\tau} = 2A_q - N_0^{-q} - \frac{1}{8}(N_0^{-q} + N_k^{-q})$$

$$\times[3\mathrm{XQ} + (\mathrm{Rcc} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ts})\mathrm{XD} + \mathrm{RsXR} - (\mathrm{Rcs} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Tc})\mathrm{XI}],$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{-q}}{\mathrm{d}\tau} = -N_0^{-q} - \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}N_0^{-q} + N_k^{-q}\Big)$$

$$\times[3\mathrm{XQ} + (\mathrm{Rcc} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ts})\mathrm{XD} + \mathrm{RsXR} - (\mathrm{Rcs} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Tc})\mathrm{XI}],$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{q_3}}{\mathrm{d}\tau} = 2A_{q_3} - N_0^{q_3} - \frac{1}{4}(N_0^{q_3} + N_k^{q_3})$$

$$\times(\mathrm{XQ} - \mathrm{RccXD} + \mathrm{RsXR} - \mathrm{RcsXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{q_3}}{\mathrm{d}\tau} = -N_0^{q_3} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}N_0^{q_3} + N_k^{q_3}\Big)$$

$$\times(\mathrm{XQ} - \mathrm{RccXD} + \mathrm{RsXR} - \mathrm{RcsXI}),$$

$$\frac{\mathrm{d}N_0^{+r}}{\mathrm{d}\tau} = 2A_r - N_0^{+r} - \frac{1}{8}(N_0^{+r} + N_k^{+r})$$

$$\times[3\mathrm{XQ} - (\mathrm{Rcc} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ts})\mathrm{XD} + \mathrm{RsXR} + (\mathrm{Rcs} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Tc})\mathrm{XI}],$$

$$\frac{\mathrm{d}N_k^{+r}}{\mathrm{d}\tau} = -N_k^{+r} - \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}N_0^{+r} + N_k^{+r}\Big)\times$$

$$\times[3\mathrm{XQ} - (\mathrm{Rcc} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{Ts})\mathrm{XD} + \mathrm{RsXR} + (\mathrm{Rcs} - 2\sqrt{2}\,\mathrm{Tc})\mathrm{XI}],$$

$$\frac{dN_0^{-r}}{d\tau} = 2A_r - N_0^{-r} - \frac{1}{8}(N_0^{-r} + N_k^{-r})$$

$$\times[3XQ - (Rcc - 2\sqrt{2}\,Ts)XD + RsXR + (Rcs + 2\sqrt{2}\,Tc)XI],$$

$$\frac{dN_k^{-r}}{d\tau} = -N_k^{-r} - \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}N_0^{-r} + N_k^{-r}\Big)$$

$$\times[3XQ - (Rcc - 2\sqrt{2}\,Ts)XD + RsXR + (Rcs + 2\sqrt{2}\,Tc)XI],$$

$$\frac{dN_0^{r_3}}{d\tau} = 2A_{r_3} - N_0^{r_3} - \frac{1}{4}(N_0^{r_3} + N_k^{r_3})$$

$$\times[XQ + RccXD - RsXR - (Rcs + 2\sqrt{2}\,Tc)XI],$$

$$\frac{dN_k^{r_3}}{d\tau} = -N_k^{r_3} - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}N_0^{r_3} + N_k^{r_3}\Big)$$

$$\times[XQ + RccXD - RsXR - (Rcs + 2\sqrt{2}\,Tc)XI].$$

Здесь учтено, что для некоторых переменных уравнения совпадают в силу выбранной ориентации кристалла [100]. Это позволяет уменьшить размерность системы уравнений:

$$N_{0,k}^{p_1} = N_{0,k}^{+p_1} + N_{0,k}^{-p_1}, \quad N_{0,k}^{p_2} = N_{0,k}^{+p_2} + N_{0,k}^{-p_2},$$

$$N_{0,k}^{+q} = N_{0,k}^{+q_1} + N_{0,k}^{+q_2}, \quad N_{0,k}^{-q} = N_{0,k}^{-q_1} + N_{0,k}^{-q_2},$$

$$N_{0,k}^{+r} = N_{0,k}^{+r_1} + N_{0,k}^{-r_2}, \quad N_{0,k}^{-r} = N_{0,k}^{-r_1} + N_{0,k}^{+r_2},$$

$$N_{0,k}^{q_3} = N_{0,k}^{+q_3} + N_{0,k}^{-q_3}, \quad N_{0,k}^{r_3} = N_{0,k}^{+r_3} + N_{0,k}^{-r_3}.$$

В (15) введены обозначения для коэффициентов усиления ортогональных мод U_1, U_2 и коэффициентов их нелинейной связи $U_{12}, U_{21} = U_{12}^*$:

$$U_1 = \frac{1}{2}(N_0^{p_1} + N_k^{p_1} + N_0^{p_2} + N_k^{p_2})$$

$$+\frac{1}{2}Rsc[(N_0^{p_2} + N_k^{p_2}) - (N_0^{p_1} + N_k^{p_1})]$$

$$+\frac{1}{4}Rcp(N_0^{+q} + N_k^{+q} + N_0^{-q} + N_k^{-q})$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}Ts[(N_0^{-q} + N_k^{-q}) - (N_0^{+q} + N_k^{+q})]$$

$$+\frac{1}{4}Rcm(N_0^{+r} + N_k^{+r} + N_0^{-r} + N_k^{-r})$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}Ts[(N_0^{-r} + N_k^{-r}) - (N_0^{+r} + N_k^{+r})]$$

$$+(1 - Ts)(N_0^{+p_3} + N_k^{+p_3}) + (1 + Ts)(N_0^{-p_3} + N_k^{-p_3})$$

$$+\frac{1}{2}(1 - Rcc)(N_0^{q_3} + N_k^{q_3}) + \frac{1}{2}(1 + Rcc)(N_0^{r_3} + N_k^{r_3}),$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(N_0^{p_1} + N_k^{p_1} + N_0^{p_2} + N_k^{p_2}) +$$

$$+\frac{1}{2}Rsc[(N_0^{p_1} + N_k^{p_1}) - (N_0^{p_2} + N_k^{p_2})]$$

$$+\frac{1}{4}Rcm(N_0^{+q} + N_k^{+q} + N_0^{-q} + N_k^{-q})$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}Ts[(N_0^{+q} + N_k^{+q}) - (N_0^{-q} + N_k^{-q})]$$

$$+\frac{1}{4}Rcp(N_0^{+r} + N_k^{+r} + N_0^{-r} + N_k^{-r})$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}Ts[(N_0^{+r} + N_k^{+r}) - (N_0^{-r} + N_k^{-r})]$$

$$+(1 + Ts)(N_0^{+p_3} + N_k^{+p_3}) + (1 - Ts)(N_0^{-p_3} + N_k^{-p_3})$$

$$+\frac{1}{2}(1 + Rcc)(N_0^{q_3} + N_k^{q_3}) + \frac{1}{2}(1 - Rcc)(N_0^{r_3} + N_k^{r_3}),$$

$$\mathrm{Re}\,U_{12} = \frac{1}{2}Rc[(N_0^{p_2} + N_k^{p_2}) - (N_0^{p_1} + N_k^{p_1})] \tag{16}$$

$$+\frac{1}{4}Rs[(N_0^{+q} + N_k^{+q}) + (N_0^{-q} + N_k^{-q}) + (N_0^{+r} + N_k^{+r})$$

$$+(N_0^{-r} + N_k^{-r}) + 2(N_0^{q_3} + N_k^{q_3}) - 2(N_0^{r_3} + N_k^{r_3})],$$

$$\mathrm{Im}\,U_{12} = \frac{1}{2}Rss[(N_0^{p_2} + N_k^{p_2}) - (N_0^{p_1} + N_k^{p_1})]$$

$$+\frac{1}{4}Rcs[(N_0^{+q} + N_k^{+q} + N_0^{-q} + N_k^{-q} + N_0^{+r} + N_k^{+r} + N_0^{-r} + N_k^{-r})$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}Tc[(N_0^{+q} + N_k^{+q} + N_0^{-r} + N_k^{-r})$$

$$-(N_0^{-q} + N_k^{-q} + N_0^{+r} + N_k^{+r})]$$

$$+Tc[(N_0^{+p_3} + N_k^{+p_3}) - (N_0^{-p_3} + N_k^{-p_3})]$$

$$+\frac{1}{2}Rs(N_0^{q_3} + N_k^{q_3} + N_0^{r_3} + N_k^{r_3}),$$

а также следующие обозначения:

$$XQ = |E_1|^2 + |E_2|^2,\ XD = |E_1|^2 - |E_2|^2,\ XR = E_1^*E_2 + E_2^*E_1,$$

$$XI = i(E_1E_2^* - E_1^*E_2),\ Rsc = \sin 2R\cos 2\vartheta,\ Rss = \sin 2R\sin 2\vartheta,$$

$$Rc = \cos 2R,\ Rcc = \cos 2R\cos 2\vartheta,\ Rcp = 3 + Rcc,$$

$$Rcs = \cos 2R\sin 2\vartheta,\ Rs = \sin 2R,\ Rcm = 3 - Rcc,$$

$$Ts = \sin 2\vartheta,\ Tc = \cos 2\vartheta.$$

Численное интегрирование показывает, что система уравнений (15) хорошо описывает эффект анизотропии усиления, наведенной линейно поляризованным излучением накачки, который наблюдался в эксперименте [15]. Суть этого эффекта поясняет рис.5, где показаны зависимости коэффициентов усиления U_1, U_2 и интенсивностей

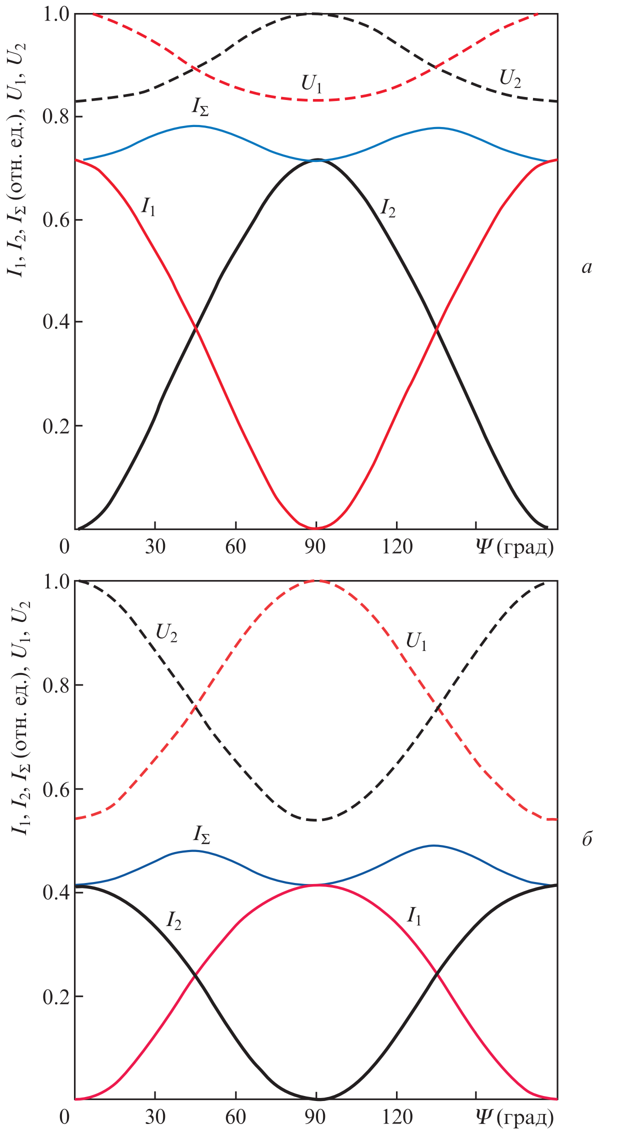

Рис.5. Зависимости интенсивностей поляризационных мод I_1, I_2, I_Σ и коэффициентов усиления U_1, U_2 от ориентации поляризации накачки в случае учета только одного типа поглощающего перехода при $b_1^0 = 0$, $b_2^0 = 0.002$ (*а*) и $b_1^0 = 0.002$, $b_2^0 = 0$ (*б*), $G = 1000$, $A = 2.5$, $\vartheta = 0$, $R = 0$.

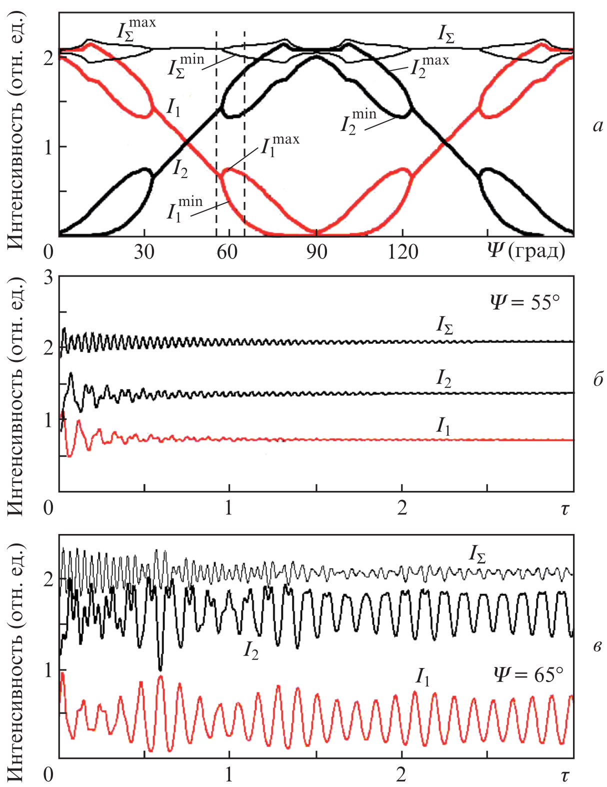

Рис.6. Зависимости интенсивностей поляризационных мод от ориентации поляризации излучения накачки в случае совместного действия каналов накачки при $b_1^0 = 0.0043$, $b_2^0 = 0.024$ (*а*), переходные процессы, возникающие при небольшом возмущении стационарных значений интенсивностей мод (*б*), и осциллограммы интенсивностей мод в автомодуляционном режиме при $G = 1000$, $A = 2.5$, $\vartheta = 0$, $R = 0$ (*в*). Цветной вариант рис.6 помещен на сайте нашего журнала http://www.quantum-electron.ru.

I_1, I_2 ортогональных мод, а также их суммы I_Σ от ориентации поляризации накачки. Представлены два случая, когда в процессе поглощения накачки участвуют только σ-переходы (рис.5,*а*) и только π-переходы (рис.5,*б*). В обоих случаях четко видна анизотропия усиления ($U_1 \neq U_2$), проявляющаяся в противофазном изменении интенсивностей ортогонально поляризованных мод, с той лишь разницей, что при одной и той же ориентации поляризации накачки преимущество имеет ортогональная мода.

3. Поляризационная нестабильность

Особенностью предложенной модели является наличие двух ортогональных каналов поглощения накачки на π- и σ-переходах. По отдельности каждый из каналов хорошо описывает наблюдающийся экспериментально эффект наведенной анизотропии усиления. Исследования показывают, что совместное действие этих каналов накачки может приводить к нестационарному режиму генерации, проявляющемуся в возникновении противофазных колебаний интенсивностей поляризационных мод, что демонстрирует рис.6. На рис.6,*а* приведены интенсивности отдельных поляризационных мод I_1, I_2 и их сумма I_Σ в зависимости от ориентации поляризации накачки. Нестационарный режим генерации отображается здесь зависимостями минимальных и максимальных значений интенсивностей отдельных мод и их суммы. Переход от стационарного режима к нестационарному выглядит как расщепление одной линии на две. На рис.6,*б* представлены переходные процессы, возникающие при небольшом возмущении стационарных значений интенсивностей мод. Эти рисунки четко демонстрируют наличие в системе хорошо известных [22] двух типов релаксационных колебаний: высокочастотных синфазных колебаний, которые явно проявляются в суммарной интенсивности, и низкочастотных противофазных колебаний, четко проявляющихся в поведении отдельных поляризационных мод. На рис.6,*в* приведены типичные осциллограммы интенсивностей мод в автомодуляционном режиме. Сравнение рис.6,*б* и *в* показывает, что частота противофазных автомодуляционных колебаний близка к частоте низкочастотных релаксационных колебаний.

4. Заключение

Таким образом, нами предложена модель, учитывающая реальные ориентации поглощающих и излучающих дипольных моментов в элементарной ячейке монокристалла Nd : YAG. Она адекватно описывает эффект наведенной анизотропии усиления линейно поляризованным излучением накачки, проявляющийся в противофазном изменении интенсивностей ортогонально поляризованных мод и наблюдавшийся в экспериментах [15].

Предложенный подход к описанию поляризационных свойств Nd : YAG-лазеров дает возможность исследовать влияние на режимы их генерации произвольной ориентации кристаллографических осей кристалла относительно оси резонатора, что позволит найти оптимальные условия для снижения порога и увеличения эффективности генерации лазера.

Кроме того, модель предсказывает новый вид неустойчивости, который обусловлен наличием двух конкурирующих каналов накачки и, насколько нам известно, ранее в литературе не обсуждался. Известные экспериментальные данные по наблюдению эффекта наведенной анизотропии усиления соответствуют результатам, представленным на рис.5, что говорит о реализации в эксперименте только одного из двух каналов накачки. Для экспериментальной проверки предсказаний развитой теории необходимо иметь перестраиваемый по длине волны и ширине полосы излучения лазер накачки, что позволит управлять вкладами поглощающих π- и σ-переходов в процесс возбуждения активной среды Nd : YAG-лазера (см. рис.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект № 0035-2014-0018).

Приложение

Рассмотрим ионы в грани p. Две оси симметрии, p_1 и p_2, лежат в плоскости грани p, в то время как третья ось p_3 перпендикулярна ей и направлена вдоль оси X. В собственной системе координат ($X'Y'Z'$) орты линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей, для которых ось квантования ориентирована вдоль параллельной оси Y' диагонали грани p (диагональ 1), можно представить в виде (рис.1П,*а*)

$$(\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\pi p_1})' = \boldsymbol{y}^{0\prime}, \quad (\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\sigma p_1})' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}^{0\prime} \pm {\rm i}\boldsymbol{z}^{0\prime}). \tag{П1}$$

Преобразуя систему координат $X'Y'Z'$ в нештрихованную систему координат XYZ по закону

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{0\prime} &= \boldsymbol{x}^0, \\ \boldsymbol{y}^{0\prime} &= \boldsymbol{y}^0\cos 45° + \boldsymbol{z}^0\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0), \\ \boldsymbol{z}^{0\prime} &= -\boldsymbol{y}^0\cos 45° + \boldsymbol{z}^0\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0), \end{aligned} \tag{П2}$$

получаем следующие выражения для ортов первой пары линейно поляризованного и циркулярно поляризованного дипольных моментов в грани p:

$$\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\pi p_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0), \ \ \boldsymbol{e}_{\rm a}^{\sigma p_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\boldsymbol{x}^0 \mp {\rm i}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{z}^0)\Big]. \tag{П3}$$

Вторая диагональ грани p ориентирована вдоль оси Z' (диагональ 2). В этом случае выражения для ортов линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей можно записать в виде

$$(\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\pi p_2})' = \boldsymbol{z}^{0\prime}, \quad \boldsymbol{e}_{\rm a}^{\sigma p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}^{0\prime} \pm {\rm i}\boldsymbol{y}^{0\prime}). \tag{П4}$$

Преобразуя систему координат $X'Y'Z'$ в нештрихованную систему координат XYZ по закону (П2), получаем следующие выражения для ортов второй пары линейно поляризованного и циркулярно поляризованного дипольных моментов в грани p:

$$\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\pi p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0), \quad \boldsymbol{e}_{\rm a}^{\sigma p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\boldsymbol{x}^0 \pm {\rm i}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0)\Big]. \tag{П5}$$

Для третьей группы активных центров, расположенных в грани p, собственная система координат совпадает с системой координат XYZ, и поэтому выражения для ортов линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей имеют вид

$$\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\pi p_3} = \boldsymbol{x}^0, \quad \boldsymbol{e}_{\rm a}^{\sigma p_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{y}^0 \pm {\rm i}\boldsymbol{z}^0). \tag{П6}$$

Аналогично поступаем с активными центрами в гранях q и r.

Рассмотрим ионы в грани q (рис.1П,*б*). Две оси симметрии, q_1 и q_2, лежат в плоскости грани q, в то время как третья ось симметрии q_3 перпендикулярна этой грани и направлена вдоль оси Y. В собственной системе координат $X'Y'Z'$ орты линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей, для которых ось квантования ориентирована вдоль параллельной оси X' диагонали грани q (диагональ 1), можно представить в виде

$$(\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\pi q_1})' = \boldsymbol{x}^{0\prime}, \quad (\boldsymbol{e}_{\rm a}^{\sigma q_1})' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{y}^{0\prime} \pm {\rm i}\boldsymbol{z}^{0\prime}). \tag{П7}$$

Преобразуя систему координат $X'Y'Z'$ в нештрихованную систему координат XYZ по закону

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{0\prime} &= \boldsymbol{x}^0\cos 45° + \boldsymbol{z}^0\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{z}^0), \\ \boldsymbol{y}^{0\prime} &= \boldsymbol{y}^0, \\ \boldsymbol{z}^{0\prime} &= -\boldsymbol{x}^0\cos 45° + \boldsymbol{z}^0\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{z}^0), \end{aligned} \tag{П8}$$

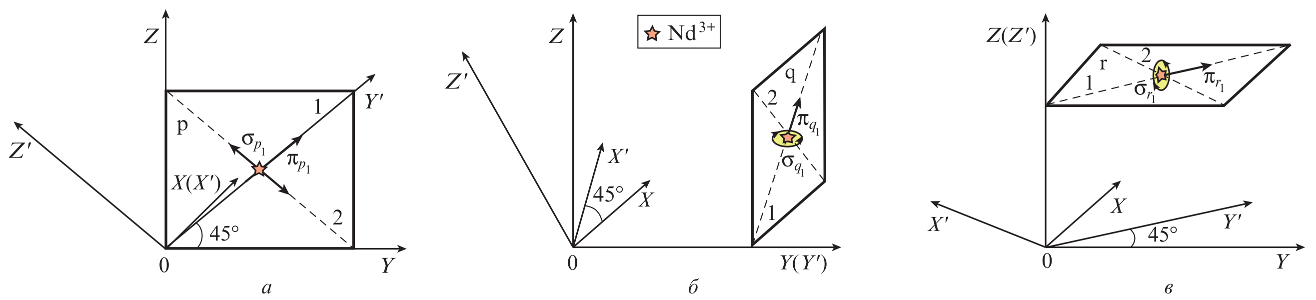

Рис.1П. Ионы Nd^{3+} в гранях p (*а*), q (*б*) и r (*в*).

получаем следующие выражения для ортов первой пары линейно поляризованного и циркулярно поляризованного дипольных моментов в грани q:

$$e_{\rm a}^{\pi q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + z^0), \;\; e_{\rm a}^{\sigma q_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[y^0 \mp {\rm i}\frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - z^0)\right]. \quad (\text{П9})$$

Вторая диагональ грани q ориентирована вдоль оси Z' (диагональ 2). В собственной системе координат $X'Y'Z'$ выражения для ортов линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей можно записать в виде

$$(e_{\rm a}^{\pi q_2})' = z^{0\prime}, \quad (e_{\rm a}^{\sigma p_2})' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^{0\prime} \pm {\rm i}x^{0\prime}). \quad (\text{П10})$$

Преобразуя систему координат $X'Y'Z'$ в нештрихованную систему координат XYZ по закону (П8), получаем следующие выражения для ортов второй пары линейно поляризованного и циркулярно поляризованного дипольных моментов в грани q:

$$e_{\rm a}^{\pi q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x^0 + z^0), \; e_{\rm a}^{\sigma q_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[y^0 \pm {\rm i}\frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + z^0)\right]. \quad (\text{П11})$$

Для третьей группы активных центров, расположенных в грани q, собственная система координат совпадает с системой координат XYZ, и поэтому выражения для ортов линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей имеют вид

$$e_{\rm a}^{\pi q_3} = y^0, \quad e_{\rm a}^{\sigma q_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm {\rm i}z^0). \quad (\text{П12})$$

Рассмотрим ионы в грани r (рис.1П,*в*). Две оси симметрии, r_1 и r_2, лежат в плоскости грани r, а третья ось симметрии r_3 перпендикулярна ей и направлена по оси Z. В собственной системе координат $X'Y'Z'$ орты линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей, для которых ось квантования ориентирована вдоль параллельной оси Y' диагонали грани r (диагональ 1), можно представить в виде

$$(e_{\rm a}^{\pi r_1})' = y^{0\prime}, \quad (e_{\rm a}^{\sigma r_1})' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^{0\prime} \pm {\rm i}x^{0\prime}). \quad (\text{П13})$$

Преобразуя систему координат $X'Y'Z'$ в нештрихованную систему координат XYZ по закону

$$x^{0\prime} = x^0\cos 45° - y^0\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - y^0),$$

$$y^{0\prime} = x^0\sin 45° + y^0\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + y^0), \quad (\text{П14})$$

$$z^{0\prime} = z^0,$$

получаем следующие выражения для ортов первой пары линейно поляризованного и циркулярно поляризованного дипольных моментов в грани r:

$$e_{\rm a}^{\pi r_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + y^0), \quad e_{\rm a}^{\sigma r_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[z^0 \pm {\rm i}\frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - y^0)\right]. \quad (\text{П15})$$

Вторая диагональ грани r ориентирована вдоль оси X' (диагональ 2). В собственной системе координат $X'Y'Z'$ выражения для ортов линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей можно записать в виде

$$(e_{\rm a}^{\pi r_2})' = x^{0\prime}, \quad (e_{\rm a}^{\sigma r_2})' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^{0\prime} \pm {\rm i}y^{0\prime}). \quad (\text{П16})$$

Преобразуя систему координат $X'Y'Z'$ в нештрихованную систему координат XYZ по закону (П14), получаем следующие выражения для ортов второй пары линейно поляризованного и циркулярно поляризованного дипольных моментов в грани r:

$$e_{\rm a}^{\pi r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - y^0), \quad e_{\rm a}^{\sigma r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[z^0 \pm {\rm i}\frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + y^0)\right]. \quad (\text{П17})$$

Для третьей группы активных центров, расположенных в грани r, собственная система координат совпадает с системой координат XYZ, и поэтому выражения для ортов линейно поляризованного (π) и циркулярно поляризованного (σ) диполей имеют вид

$$e_{\rm a}^{\pi r_3} = z^0, \quad e_{\rm a}^{\sigma r_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm {\rm i}y^0). \quad (\text{П18})$$

1. Owyoung A., Esherick P. *Opt. Lett*., **12**, 999 (1987).
2. Bielawski S., Derozier D., Glorieux P. *Phys. Rev. A*, **46**, 2811 (1992).
3. Leners R., Francois P.L., Stephan G. *Opt. Lett*., **19**, 275 (1994).
4. Lacot E., Stoeckel F., Chenevier M. *Phys. Rev. A*, **49**, 3997 (1994).
5. Czarske J.W., Mueller H. *Opt. Commun*., **114**, 223 (1995).
6. *Quantum Semiclassical Opt*., **10**, No. 1 (1998); *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt*., **3**, No. 2 (2001).
7. Reyzer K.C., Casperson L.W. *J. Appl. Phys*., **51**, 6083 (1980).
8. Tiwari S.K., Mehendale S.C. *Rev. Sci. Instrum*., **69**, 4245 (1998).
9. Horng M.L., Gardecki J.A., Maroncelli M. *J. Phys. Chem. A*, **101**, 1030 (1997).
10. Otsuka K., Mandel P., Bielawski S., Derozier D., Glorieux P. *Phys. Rev. A*, **46**, 1692 (1992).
11. Besnard P., Jia X., Dalgliesh R., May A.D., Stephan G. *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, 1605 (1993).
12. Хандохин П.А., Ханин Я.И., Мамаев Ю.А., Миловский Н.Д., Широков Е.Ю., Белавски С., Дерозье Д., Глорио П. *Квантовая электроника*, **25**, 517 (1998) [*Quantum Electron*., **28**, 502 (1998)].
13. Khandokhin P.A., Khanin Ya.I., Milovsky N.D., Shirokov E.Yu., Bielawski S., Derozier D., Glorieux P. *Quantum Semiclassical Opt*., **10**, 97 (1998).
14. Khandokhin P.A., Milovsky N.D., Mamaev Yu.A., Ovchinnikov E., Shirokov E.Yu. *Proc. SPIE*, **3682**, 53 (1998); Ievlev I., Khandokhin P., Shirokov E. *Proc. SPIE*, **6265**, 18 (2006).
15. Bouwmans G., Segard B., Glorieux P., Milovsky N., Khandokhin P., Shirokov E. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **47**, 813 (2004) [*Radiophys. Quantum Electron*., **47**, 729 (2004)].
16. Khandokhin P. *Proc. SPIE*, **6265**, 131 (2006).
17. Zhang Sha., Tan Y., Zhang Shu. *J. Opt*., **17**, 045703 (2015).
18. Chen H., Zhang S., Tan Y. *Appl. Opt*., **55**, 2858 (2016).
19. Arecchi F.T., in *Instabilities and Chaos in Quantum Optics* (Berlin: Springer, 1987, p. 9).
20. Shwartz S., Feugnet G., Rebut M., Bretenaker F., Pocholle J.-P. *Phys. Rev. A*, **79**, 063814 (2009).
21. De S., Loas G., Amili A.El., Alouini M., Bretenaker F. *J. Opt. Soc. Am. B*, **30**, 2830 (2013).
22. Bayerer R., Heber J., Mateika D. *Z. Phys. B*, **64**, 201 (1986).
23. San Y., Wang G.M., Cone R.L., Equall R.W., Leask M.J.M. *Phys. Rev. B*, **62**, 15443 (2000).
24. Феофилов П.П. *УФН*, **58**, 69 (1956).
25. Феофилов П.П., Каплянский А.А. *УФН*, **76**, 201 (1962).
26. Зверев Г.М., Голяев Ю.Д. *Лазеры на кристаллах и их применение* (М.: Радио и связь, 1994).
27. Esherick P., Owyoung A. *Proc. SPIE*, **912**, 2 (1988).
28. Casperson L.W., Reyzer K.C. *J. Appl. Phys*., **51**, 6075 (1980).
29. Nilsson A.C., Gustafson E.K., Byer R.L. *IEEE J. Quantum Electron*., **25**, 767 (1989).
30. Хандохин П.А., Мамаев Ю.А. *Квантовая электроника*, **41**, 571 (2011) [*Quantum Electron*., **41**, 571 (2011)].