Термодинамически равновесные квантовые вихри в сверхтекучих жидкостях

С.К.Немировский

Исследовано термодинамическое равновесие для системы квантованных вихрей в сверхтекучих жидкостях в присутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Вычислена статистическая сумма, в которой учтены различные конфигурации вихревых нитей, а также распределение петель по длинам. Обсуждена зависимость плотности вихревых нитей от приложенной скорости противотока.

Ключевые слова: *квантовые вихри, сверхтекучая жидкость, распределение Гиббса, статистическая сумма.*

1. Введение

В предыдущей нашей статье [1] обсуждались вопросы хаотических вихревых нитей, или квантовой турбулентности, в сверхтекучих жидкостях и в конденсате Бозе–Эйнштейна (БЭК), возбуждаемых под действием противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Одним из обсуждаемых аспектов теории квантовой турбулентности был вопрос о необыкновенной сложности этой проблемы с точки зрения теоретического изучения и необходимости какого-либо частного подхода к общей задаче. Важным подходом является исследование термодинамического равновесия в системе квантованных вихрей в сверхтекучем гелии и в БЭК в случае противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Следует подчеркнуть, что эта задача важна и интересна сама по себе, но с точки зрения турбулентности необходимо также прояснить ряд аспектов структуры и динамики вихревого клубка.

2. Постановка задачи. Обсуждение результатов

В настоящей работе описана динамика вихревой нити под действием случайной силы Ланжевена в сверхтекучем гелии и в БЭК в присутствии противотока с относительной скоростью $\boldsymbol{v}_{\rm ns} = \boldsymbol{v}_{\rm n} - \boldsymbol{v}_{\rm s}$. Мотивация такой постановки задачи обусловлена тем, что обычная квантовая турбулентность развивается в противотоке сверхтекучего гелия без случайного перемешивания вследствие развития неустойчивостей. Поэтому важно сравнить оба механизма генерации вихревого клубка. Выберем уравнение движения элементов вихревой линии в сверхтекучем гелии в виде (см., напр., [2])

$$\dot{\boldsymbol{s}}(\xi,t) = \dot{\boldsymbol{s}}_{\rm i}(\xi,t) + \boldsymbol{v}_{\rm s} + \alpha\dot{\boldsymbol{s}}(\xi,t)\times(\boldsymbol{v}_{\rm n} - \boldsymbol{v}_{\rm s} - \dot{\boldsymbol{s}}_{\rm i}(\xi,t)) + \boldsymbol{\zeta}(\xi,t). \quad (1)$$

С.К.Немировский. Институт теплофизики им. С.С.Кутателадзе СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 1; e-mail: nemir@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 12 марта 2019 г., после доработки – 22 марта 2019 г.

Здесь $\boldsymbol{s}(\xi,t)$ – радиус-векторы элементов вихревой линии; $\dot{\boldsymbol{s}}_{\rm i}(\xi,t)$ – самоиндуцированная скорость; α – коэффициент трения. Величина $\dot{\boldsymbol{s}}_{\rm i}(\xi,t)$ связана с геометрической формой линии [2]. В уравнение движения элементов нити (1) введена ланжевеновская сила $\boldsymbol{\zeta}(\xi,t)$, моделирующая тепловое воздействие со стороны термостата.

Вихри в БЭК обычно изучаются на основе исследования макроскопической волновой функции, подчиняющейся нелинейному уравнению Шредингера. Исторические аспекты открытия и исследования БЭК в ультрахолодных атомных газах описаны, например, в обзорах [3,4]. Теоретические вопросы динамики БЭК изложены в известной книге Питаевского и Стрингари [5]. В отечественной литературе соответствующие исследования (как теоретические, так и экспериментальные) изложены в работах [6–8].

Для центральной линии вихря в БЭК можно получить уравнение, аналогичное соотношению (1) в [9]. Мы ограничимся изучением термодинамического равновесия, поэтому примем, что корреляционная функция для ланжевеновской силы $\boldsymbol{\zeta}(\xi,t)$ удовлетворяет флуктуационно-диссипативной теореме [10,11]:

$$\langle \zeta_\alpha(\xi_1,t)\zeta_\beta(\xi_2,t')\rangle = \frac{k_{\rm B}T\alpha}{\rho_{\rm s}\kappa}\delta(\xi_1-\xi_2)\delta(t_1-t_2)\delta_{\eta_1\eta_2}. \quad (2)$$

Уравнение Фоккера–Планка для эволюции во времени функционала от распределения вероятностей $P(\{\boldsymbol{s}(\xi)\},t) = \langle\delta(\boldsymbol{s}(\xi)-\boldsymbol{s}(\xi,t))\rangle$ может быть получено из уравнения движения (1) стандартным образом (см., напр., [11]):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \int {\rm d}\xi \frac{\delta}{\delta\boldsymbol{s}(\xi)}\{[\dot{\boldsymbol{s}}_{\rm i}(\xi) + \boldsymbol{v}_{\rm s} + \alpha\boldsymbol{s}'(\xi)\times(\boldsymbol{v}_{\rm n} - \boldsymbol{v}_{\rm s} - \dot{\boldsymbol{s}}_{\rm i}(\xi))]P\}$$
$$+ \iint {\rm d}\xi{\rm d}\xi'\,\langle\zeta_\alpha(\xi)\zeta_\beta(\xi')\rangle\,\delta(\xi-\xi')\delta(t_1-t_2)\delta_{\eta_1\eta_2}$$
$$\times\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{s}_{\eta_1}(\xi)}\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{s}_{\eta_2}(\xi')}P = 0. \quad (3)$$

В работе [12] показано, что уравнение (3) имеет решение в виде распределения Гиббса:

$$P(\{\boldsymbol{s}(\xi)\},t) - N\exp\Big(-\frac{H\{\boldsymbol{s}\}}{k_{\mathrm{B}}T}\Big). \qquad (4)$$

Здесь N – нормировочный множитель, $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$. Гамильтониан $H\{\boldsymbol{s}\}$ при ненулевой относительной скорости $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}$ имеет вид

$$H\{\boldsymbol{s}\} = E\{\boldsymbol{s}\} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}). \qquad (5)$$

Здесь энергия $E\{\boldsymbol{s}\}$ и импульс Лэмба $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{s}\}$ определены (см., напр., [13]) как

$$E\{\boldsymbol{s}\} = \frac{\rho_{\mathrm{s}}\kappa^2}{8\pi}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma'}\frac{\boldsymbol{s}'(\xi)\cdot\boldsymbol{s}'(\xi')}{|\boldsymbol{s}(\xi)-\boldsymbol{s}(\xi')|}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi',$$
$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{s}\} = \frac{\rho_{\mathrm{s}}\kappa}{2}\int\boldsymbol{s}(\xi)\times\boldsymbol{s}'(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \qquad (6)$$

В обычной статистической механике, если $\boldsymbol{P}$ – истинный импульс частицы (или квазичастицы), справедливость уравнений (4), (5) очевидна и вытекает из преобразований Галилея. Поскольку для вихрей импульс Лэмба $\boldsymbol{P}$ не является «реальным» импульсом, справедливость соотношений (4), (5) получена из точного решения уравнения Фоккера – Планка (3).

Соотношения (1) – (3) должны быть использованы для вычисления статистической суммы и, соответственно, для определения различных свойств вихревого клубка. По определению [14, 15] статистическая сумма

$$Z(T,\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}) = \sum_{\{\boldsymbol{s}_j(\xi_j)\}}\exp\Big(-\frac{H\{\boldsymbol{s}\}}{k_{\mathrm{B}}T}\Big). \qquad (7)$$

Здесь выражение

$$\{\boldsymbol{s}(\xi)\} = \bigcup_j \boldsymbol{s}_j(\xi_j)$$

представляет собой набор различных петель. Символ суммы предполагает: вклад от всех возможных конфигураций каждой из петель длины l; суммирование по всем петлям с различной длиной l; интегрирование по начальными точкам каждой петли. Конечно, перечислить все непрерывные кривые не представляется возможным. Обычно используют какие-то дискретные аналоги, например решеточные модели или модель полимерной цепи (или их комбинации), в которых число конфигураций линии растет с ее длиной как $\exp[C(l/a)]$. Здесь постоянная $C \sim 1$, ее точное значение определяется используемой моделью. Например, для трехмерной кубической решетки $C = \ln(2D-1)$ (D – размерность пространства). Величина a является параметром длины модели. Для модели с кубической решеткой это просто ребро куба, для полимера – элементарный шаг. В случае квантовых вихрей величина a совпадает с длиной когерентности и может быть принята за размер радиуса ядра вихря (подробнее см. в [14, 15]).

Вычисленное полное число различных конфигураций, $\exp[C(l/a)]$, должно быть ограничено выбором конкретных конфигураций, которые соответствуют нашей задаче. Например, если рассматривать замкнутые петли длиной l, то полное число конфигураций $\exp[C(l/a)]$ необходимо умножить на вероятность $p(l)$ получения данной конфигурации. Последняя задача относится к физике полимеров, а следовательно, вихревые нити обладают топологией полимерных цепей. Известно, что вероятность $p(l)$ может быть записана в виде интеграла по траекториям следующим образом (см., напр., [16]):

$$p(l) = N\Big(\frac{a}{l}\Big)\int_{s(0)=r}^{s(l)=r}\mathcal{D}\boldsymbol{s}(\xi)\exp\Big[-\frac{3}{2a}\int(\boldsymbol{s}'(\xi))^2\mathrm{d}\xi\Big]. \qquad (8)$$

Здесь величина a/l устраняет вырождение, связанное с выбором начальных точек на петле в функциональном интеграле. Гиббсовский фактор запишем в виде

$$\exp\Big[-\beta w\frac{\rho_{\mathrm{s}}\kappa^2}{8\pi}\iint\frac{\boldsymbol{s}'(\xi_1)\cdot\boldsymbol{s}'(\xi_2)}{|\boldsymbol{s}(\xi_1)-\boldsymbol{s}(\xi_2)|}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$
$$+\beta u\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}\frac{\rho_{\mathrm{s}}\kappa}{2}\int\boldsymbol{s}(\xi)\times\boldsymbol{s}'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big]. \qquad (9)$$

Параметры u, w вводятся для удобства, в дальнейшем они будет выбраны равными единице ($u = 1$, $w = 1$).

Кроме конфигурационного фактора (8) и гиббсовского фактора (9) необходимо добавить суммирование по всем петлям с различной длиной l и интегрирование по начальным точкам $\boldsymbol{r}_{\mathrm{start}}$ каждой петли, т.е.

$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\mathrm{start}}\int n(l)\,\mathrm{d}l. \qquad (10)$$

В одном важном случае, так называемом случае локального приближения, энергия может быть выражена в виде $E = \varepsilon_{\mathrm{V}}l$ (здесь ε_{V} – энергия на единицу длины). Тогда конфигурационный фактор (8) и гиббсовский фактор (9) объединяются следующим образом:

$$\int\mathcal{D}\boldsymbol{s}(\xi)\exp\Big[-\frac{3}{2a}\int(\boldsymbol{s}'(\xi))^2\mathrm{d}\xi - \beta u\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}\frac{\rho_{\mathrm{s}}\kappa}{2}\int\boldsymbol{s}(\xi)\times\boldsymbol{s}'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big]$$
$$\times\exp\Big[-\beta\Big(w\varepsilon_{\mathrm{V}} - \frac{C}{\beta a}\Big)l\Big]. \qquad (11)$$

Видно, что для таких независимых струн при некоторой температуре статистическая сумма расходится и происходит фазовый переход. Соответствующая температура T_{H} называется температурой Хагедорна [14, 15] и определяется как

$$T_{\mathrm{H}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{V}}a}{k_{\mathrm{B}}C}. \qquad (12)$$

Континуальный интеграл (11) является гауссовым, и статистическая сумма может быть вычислена точно. Данная проблема совпадает с задачей движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле [15]. Выполняя процедуры, описанные в [15], приходим к следующему выражению для статистической суммы:

$$Z_{\mathrm{l}} = \int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int\mathrm{d}l\Big\{n(l)\frac{a}{l}\Big(\frac{3}{2\pi al}\Big)^{3/2}\Big[\frac{\sinh(l u\kappa\beta a\rho_{\mathrm{s}}v_{\mathrm{ns}}/6)}{l u\kappa\beta a\rho_{\mathrm{s}}v_{\mathrm{ns}}/6}\Big]^{-1}$$
$$\times\exp\Big[-\beta\Big(w\varepsilon_{\mathrm{V}} - \frac{\ln 5}{\beta a}\Big)l\Big]\Big\}. \qquad (13)$$

С помощью (13) определим среднюю энергию и импульс:

$$\langle E\{\boldsymbol{s}\}\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial w}\Big|_{u=1,w=1}, \quad \langle\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln Z}{\partial u}\Big|_{u=1,w=1}. \qquad (14)$$

Учитывая, что в локальном приближении энергия пропорциональна длине, можно на основании этих формул найти плотность вихревых нитей или общую длину в единице объема. С использованием полученной статистической суммы вычисляются структурные факторы квантовой турбулентности, например средняя поляризация вихревых петель, входящих в состав вихревого клубка в противотоке гелия II, а также анизотропия и средняя кривизна. Эти факторы квантовой турбулентности ранее были получены только численно в работе [2]. Представляет интерес сравнение результатов по равновесным свойствам вихревого клубка, которые могут быть получены на основании развитого здесь формализма, с данными по квантовой турбулентности.

Опишем некоторые физические эффекты, следующие непосредственно из соотношения (13). Разложив выражение в квадратных скобках по степеням относительной скорости $\boldsymbol{v}_{\rm ns}$ и ограничившись членами второго порядка, получим

$$\left[\frac{\sinh(lu\kappa\beta a\rho_{\rm s}v_{\rm ns}/6)}{lu\kappa\beta a\rho_{\rm s}v_{\rm ns}/6}\right]^{-1} = 1-\frac{1}{216}a^2l^2u^2v_{\rm ns}^2\kappa^2\beta^2\rho_{\rm s}^2+O(v_{\rm ns}^3). \qquad (15)$$

Таким образом, статистическая сумма содержит слагаемое, не зависимое от относительной скорости $\boldsymbol{v}_{ns}$, а также слагаемое, пропорциональное квадрату этой величины. Первое слагаемое описывает просто термодинамически равновесные вихри в покоящемся гелии. Задачу о термодинамических квантовых вихрях в покоящемся гелии ранее исследовали при различных предположениях. Наиболее популярными были исследования, в которых вихревые нити считались идеальными кольцами (см., напр., [17–19]). Другое направление – численное исследование аналогичных задач – проводилось для топологических дефектов (см., напр., [20]). Исследование квантовых вихрей в БЭК может быть проведено на основе макроскопической волновой функции, подчиняющейся нелинейному уравнению Шредингера. Анализ сводится к элегантному, хотя и сложному математическому аппарату по изучению нулей флуктуирующей макроскопической волновой функции. Напомним, что вихревые линии в БЭК – это геометрическое место точек, в которых волновая функция обращается в нуль. Примерами подобных исследований могут быть работы [21, 22]. В этих работах получены следующие результаты. Плотность вихревых нитей L при температуре Хагедорна $T_{\rm H}$ является величиной порядка длины когерентности, т. е. $L \sim (1/a)^2$. Далее, с уменьшением температуры L экспоненциально убывает. Из формул (13), (14) нетрудно видеть, что наши результаты качественно согласуются с изложенными выше.

Особый интерес вызывает второе слагаемое в правой части формулы (5), содержащее относительную скорость $\boldsymbol{v}_{\rm ns} = \boldsymbol{v}_{\rm n} - \boldsymbol{v}_{\rm s}$. Это слагаемое по порядку величины много меньше первого, поэтому плотность вихрей гораздо ниже. По своей структуре соответствующая совокупность вихревых петель очень близка к тому, что называется сверхтекучей турбулентностью. Важным фактором является то, что плотность вихревых нитей в этом случае зависит от квадрата относительной скорости: $L \propto \boldsymbol{v}_{\rm ns}^2$. Это хорошо установленный как экспериментально, так и численно факт (см., напр., [23, 24]). По нашим данным до сих пор неизвестно никаких теоретических методов для получения такой зависимости. Наш результат получен, однако, для термодинамически равновесного случая, и неясно пока, как он соотносится со случаем квантовой турбулентности. Этот вопрос, как и другие вопросы, касающиеся связи термодинамического равновесия с турбулентным течением, представляют большой интерес и будут исследованы в дальнейшем.

3. Заключение

На основе ланжевеновской формулировки задачи для динамики вихревой нити получено описание термодинамического равновесия вихревой системы. Соответствующее распределения Гиббса зависит как от энергии, так и от импульса вихревых петель. Вычислена статистическая сумма, включающая в себя конфигурационное распределение вихревых линий. Предварительный анализ статистической суммы приводит к выводу о существовании двух типов вихревых нитей. Это термодинамические вихри, порожденные тепловыми флуктуациями, и гидродинамические вихри, связанные с наличием противотока.

Гидродинамические вихри по структуре напоминают вихревой клубок, который наблюдается в случае квантовой турбулентности.

Исследование по ланжевеновской формулировке задачи выполнено в рамках государственного задания ИТ СО РАН (АААА-А17-117022850027-5), исследование по построению статистической суммы выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-08-00576).

1. Немировский С.К. *Квантовая электроника*, **48**, 405 (2018) [*Quantum Electron*., **48**, 405 (2018)].
2. Schwarz K.W. *Phys. Rev. B*, **38**, 2398 (1988).
3. Ketterle W. *Nobel Lecture Rev. Mod. Phys*., **74**, 1131 (2002).
4. Онофрио Р. *УФН*, **186**, 1229 (2016).
5. Pitaevskii L.P., Stringari S. Bose-Einstein Condensation (Oxford: Oxford University Press, 2003).
6. Чаповский П.Л. *Письма в ЖЭТФ*, **95**, 148 (2012) [*JETP Lett*., **95**, 132 (2012)].
7. Лиханова Ю.В., Медведев С.Б., Федорук М.П., Чаповский П.Л. *Квантовая электроника*, **47**, 484 (2017) [*Quantum Electron*., **47**, 484 (2017)].
8. Тайченачев А.В., Юдин В.И., Багаев С.Н. *УФН*, **186**, 193 (2016).
9. Nemirovskii S.K. *Theor. Math. Phys*., **141**, 1452 (2004).
10. Hohenberg P.C., Halperin B.I. *Rev. Mod. Phys*., **49**, 435 (1972).
11. Zinn-Justin J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 2002).
12. Nemirovskii S.K. *J. Low Temp. Phys*., **185**, 365 (2016).
13. Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L. *Theory of Concentrated Vortices* (Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2007).
14. Copeland E., Haws D., Holbraad S., Rivers R. *Phys. A*, **179**, 507 (1991).
15. Kleinert H. *Gauge Fields in Condensed Matter Physics* (Singapore: World Scientific, 1991).
16. Doi M., Edwards S. *The Theory of Polymer* Dynamics (Oxford: Clarendon Press, 1986).
17. Williams G.A. *Phys. Rev. Lett*., **59**, 1926 (1987).
18. Chorin A.J. *Vortex Methods and Vortex Motion* (Philadelphia: SIAM, 1991).
19. Rasetti M., Regge T. *Phys. A*, **80**, 217 (1975).
20. Antunes N.D., Bettencourt L.M., Hindmarsh M. *Phys. Rev. Lett*., **80**, 908 (1998).
21. Rivers R.J. *J. Low Temp. Phys*., **124**, 41 (2001).
22. Liu F., Mazenko G.F. *Phys. Rev. B*, **46**, 5963 (1992).
23. Vinen W. *J. Low Temp. Phys*., **161**, 419 (2010).
24. Nemirovskii S.K. *Phys. Rep*., **524**, 85 (2013).