

# Влияние нагрева иона в ловушке на обобщенные рэмсиевские методы подавления сдвигов частоты, обусловленных пробным полем в атомных часах

С.Н.Кузнецов, А.В.Тайченачев, В.И.Юдин, Н.Хунтемманн, К.Саннер, К.Тамм, Э.Пайк

*В рамках простой одномерной модели рассмотрено влияние нагрева иона в ловушке на эффективность обобщенных рэмсиевских методов подавления сдвига частоты за счет действия пробного поля в оптических стандартах частоты на основе одиночных ультрахолодных ионов. Показано, что нагрев иона уменьшает эффективность всех ранее предложенных однопетлевых обобщенных рэмсиевских методов, приводя во всех случаях к появлению линейной зависимости сдвига реперной частоты от остаточного полевого сдвига частоты. Выделены два наиболее устойчивых по отношению к нагреву варианта обобщенных рэмсиевских схем, для которых коэффициент пропорциональности в этой зависимости минимален.*

**Ключевые слова:** квантовый стандарт частоты, лазерное охлаждение, метод Рэмси, ловушка Пауля.

## 1. Введение

Проблема световых сдвигов частоты реперного перехода за счет действия пробного поля является ключевой для многих типов существующих и планируемых оптических стандартов частоты на ультрахолодных атомах и ионах. Приведем несколько примеров: электрический октупольный (E3) переход в одиночном ионе иттербия [1], магнитно-индуцированные  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$ -переходы четных изотопов атомов щелочно-земельных металлов и им подобных элементов [2], оптические переходы в многозарядных ионах [3], двухфотонные E1–M1-переходы в атомах Hg, Sr, Yb, Mg [4] и др.

К настоящему времени разработано и исследовано множество обобщенных рэмсиевских методов (см. оригинальные работы [5–11] и обзор [12]), позволяющих подавить сдвиги частоты указанного типа до пренебрежимо малого уровня ( $\delta\omega/\omega < 10^{-18}$ ). Часть этих методов реализована в экспериментах [1, 6, 9, 13], а часть еще нет. Теоретические модели не учитывают некоторые реально присутствующие факторы, в частности нагрев иона в радиочастотной ловушке за счет флуктуаций электрического поля. Учет этого нагрева и анализ его влияния на эффективность методов подавления полевых сдвигов являются актуальными научными задачами, которые решаются в настоящей работе в рамках простых теоретических моделей движения иона (одномерный гармонический потенциал) и процесса нагрева (гармонический осциллятор, находящийся в тепловом равновесии с окружением).

С.Н.Кузнецов, А.В.Тайченачев, В.И.Юдин. Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15 Б; Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2;  
e-mail: taichenachev@laser.nsc.ru  
N.Huntemann, C.Sanner, C.Tamm, E.Peik. Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Bundesallee 100, 38116 Braunschweig, Germany

Поступила в редакцию 12 марта 2019 г.

На основе численного решения системы кинетических уравнений для элементов матрицы плотности иона нами показано, что нагрев иона уменьшает эффективность ранее предложенных однопетлевых обобщенных рэмсиевских методов, приводя во всех случаях к появлению линейной зависимости сдвига реперной частоты от остаточного полевого сдвига частоты. Выделены два наиболее устойчивых по отношению к нагреву варианта обобщенных рэмсиевских схем, для которых коэффициент пропорциональности в этой зависимости минимален: оригинальная [5] и гибридная обобщенная [8] гиперрэмсиевские схемы.

## 2. Обобщенные рэмсиевские схемы

Рассмотренные в настоящей работе обобщенные рэмсиевские схемы подавления сдвига частоты, обусловленного нерезонансным действием сильного пробного поля, основаны на резонансном взаимодействии двухуровневого атома (иона) с последовательностью лазерных импульсов, разделенных темным рэмсиевским интервалом длительностью  $T$ , изображенной на рис.1. Амплитуды, длительности, частоты и фазы импульсов подбираются такими, чтобы достичь желаемого эффекта подавления сдвига реперной частоты за счет нерезонансного сдвига рабочих уровней во время действия импульсов. В исследованных в работе случаях в начальный момент времени ион находится в основном электронном состоянии. Детектируемой величиной (сигналом) является вероятность нахождения иона в возбужденном электронном состоянии. Эта вероятность зависит от всех параметров задачи. Амплитуды импульсов одинаковы ( $\Omega_1 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Omega = \pi/(2\tau)$ ), а их длительности удовлетворяют соотношению  $\tau_1 = \tau_3/2 = \tau_4 = \tau$ . Здесь  $\Omega_i$  – частоты Раби для лазерных импульсов ( $i = 1, 3, 4$ ), площади которых  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\theta_3 = \pi$ ,  $\theta_4 = \pi/2$ . Частоты  $\omega_i$  одинаковы для всех импульсов. Следовательно, одинаковы и отстройки  $\delta_i$  частот излучения от частоты  $\omega_0$  невозмущенного перехода. Частота  $\omega_i$  выбирается такой, чтобы частично компенсировать нерезонансный

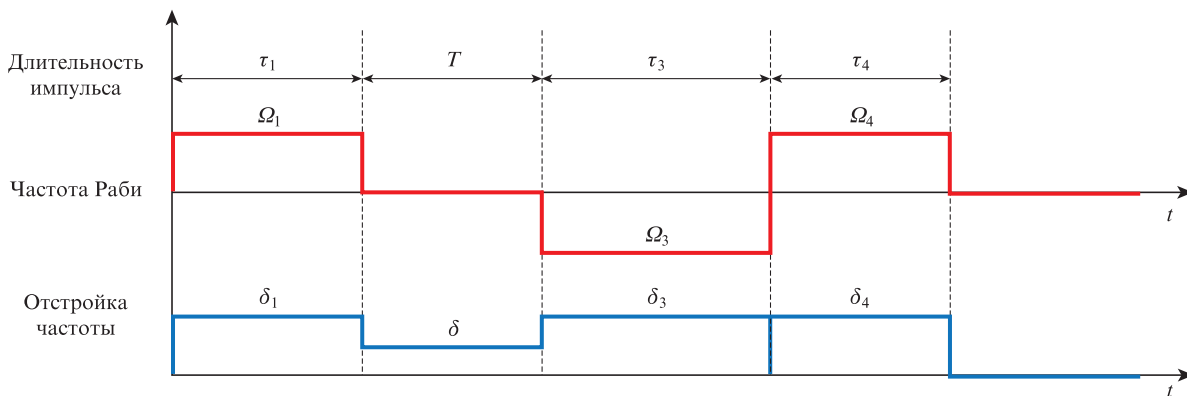


Рис. 1. Общая рэмсиевская последовательность трех лазерных импульсов, действующих на двухуровневый атом (см. текст).

световой свиг  $\Delta_{\text{shift}}$ :  $\delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = \omega - \omega_0 + \Delta_{\text{step}}$ , где  $\omega$  – частота лазерного поля во время темного промежутка, а  $\Delta_{\text{step}}$  – контролируемая добавка к частоте пробного поля во время действия импульсов. Остаточный полевой свиг  $\Delta$  удовлетворяет условию  $|\Delta| = |\Delta_{\text{shift}} - \Delta_{\text{step}}| < \Omega$ .

Для дальнейшего изложения удобно выделить в явном виде зависимость вероятности возбуждения от фаз лазерных импульсов:  $P(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4)$ . В случае оригинальной гиперрэмсиевской (ГР) схемы сигнал ошибки (дискриминатор) формируется следующим образом:

$$\Delta E_{\text{HR}} = P(\pi/2, \pi, 0) - P(-\pi/2, \pi, 0).$$

Реперная частота, к которой привязывается частота излучения пробного лазера, обращает в нуль сигнал ошибки. В результате, как было показано нами в работе [5], в рамках идеализированной модели взаимодействия, основанной на решении динамического уравнения Шредингера для неподвижного двухуровневого атома во внешнем поле лазерных импульсов, свиг  $\delta\omega$  реперной частоты от частоты невозмущенного перехода, в отличие от случая стандартной рэмсиевской схемы, имеет кубическую зависимость от остаточного полевого сдвига:  $\delta\omega = (C/T)(\Delta/\Omega)^3$  ( $C$  – числовой коэффициент порядка единицы). Это позволяет подавить свиг частоты на три-четыре порядка до относительного уровня менее  $10^{-18}$ . Эффективность ГР метода подавления сдвига частоты реперного резонанса за счет действия пробного поля была подтверждена экспериментально [1], в том числе при разработке и создании оптического стандарта частоты на одиночном ионе иттербия с рекордными (для ионных стандартов) метрологическими характеристиками [14].

Позже в работе [6] была предложена модифицированная ГР (МГР) схема, отличие которой от оригинальной ГР схемы заключается в способе формирования сигнала ошибки:

$$\Delta E_{\text{MHR}} = P(\pi/2, \pi, 0) - P(0, \pi, -\pi/2).$$

В этом случае, как показано в [6] в рамках той же идеализированной модели взаимодействия, свиг реперной частоты равен нулю при любых значениях остаточного полевого сдвига. Еще несколько вариантов так называемой обобщенной ГР (ОГР) спектроскопии были предложены в работах [7, 8]. В них сигнал ошибки формируется за счет скачков фазы второго импульса:

$$\Delta E_{\text{GHR}}(\varphi) = P(0, \varphi, 0) - P(0, -\varphi, 0),$$

где величина фазового скачка  $\varphi$  может принимать значения  $\pi/4$  или  $3\pi/4$ . В ряде случаев определенные преимущества предоставляет формирование гибридного сигнала ошибки:

$$\Delta E_{\text{GHR}}(\pi/4, 3\pi/4) = (1/2)[\Delta E_{\text{GHR}}(\pi/4) - \Delta E_{\text{GHR}}(3\pi/4)].$$

Для ОГР схем, так же как и для МГР схем, свиг реперной частоты равен нулю при любых значениях остаточного полевого сдвига, если ограничиваться идеализированной моделью взаимодействия на базе уравнения Шредингера.

### 3. Нагрев иона в ловушке и эффект отдачи при опросе часового перехода

Отклонения от идеализированной модели взаимодействия атома с полем физически могут быть обусловлены присутствием в системе релаксационных процессов различного типа, включая дефазировку оптических колебаний за счет конечной ширины спектра излучения пробного лазера [15]. С этой точки зрения нагрев иона в ловушке с учетом его поступательных степеней свободы и эффекта отдачи при поглощении и испускании фотонов пробного поля приводит к специфической релаксации в атомной подсистеме.

Как известно [16], нагрев одиночного иона возникает при наличии шумовых электрических полей в точке нахождения иона, что приводит к появлению флуктуирующих сил, воздействующих на него. Если спектр флуктуаций перекрывает частоты колебательного движения иона в ловушке, то флуктуирующие силы могут значительно увеличить энергию колебательного движения. Существует целый ряд возможных источников этих шумовых полей: тепловой джонсоновский шум, обусловленный сопротивлением электродов ловушки и внешних цепей; флуктуирующие патч-потенциалы (например, из-за случайно ориентированных доменов на поверхности электродов); внешние шумовые электрические поля; поля, генерируемые флуктуирующими токами, и т.п. Имеется довольно обширная литература, в которой систематизированы экспериментальные данные и теоретические представления в этой области исследований (см., напр., оригинальные работы [17–20] и обзор [21]).

Рассмотрим двухуровневый атом (ион), взаимодействующий с последовательностью импульсов, при учете колебательных степеней свободы иона в одномерной гармонической потенциальной яме. С учетом нагрева иона

его состояние становится смешанным, и мы должны использовать подход на основе матрицы плотности  $\rho$  иона и кинетического уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H_0, \rho] - \frac{i}{\hbar} [V, \rho] + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{heating}}, \quad (1)$$

где

$$H_0 = -\hbar\delta |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_v (a^+ a + 1/2),$$

$$V = \hbar\Omega |e\rangle\langle g| \exp(ikx) + \text{h.c.}$$

– гамильтониан иона в ловушке и оператор взаимодействия иона с пробным полем, записанные в резонансном приближении во вращающемся базисе; выражения в квадратных скобках – коммутаторы операторов;  $\delta = \omega - \omega_0$  – отстройка частоты поля от частоты невозмущенного перехода между основным,  $|g\rangle$ , и возбужденным,  $|e\rangle$ , электронными состояниями;  $\omega_v$  – частота колебаний иона в ловушке;  $a^+$  и  $a$  – операторы рождения и уничтожения кванта колебательного движения;  $x$  – оператор координаты иона в ловушке;  $k$  – волновое число. Последнее слагаемое в квантовом кинетическом уравнении (1) описывает изменение матрицы плотности иона вследствие нагрева. В простейшей модели гармонического осциллятора, взаимодействующего с окружением в условиях термодинамического равновесия, этот вклад имеет вид (см., напр., [22])

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{heating}} &= K(\bar{N} + 1) \left( a\rho a^+ - \frac{1}{2} \{a^+ a, \rho\} \right) \\ &+ K\bar{N} \left( a^+ \rho a - \frac{1}{2} \{a a^+, \rho\} \right), \end{aligned}$$

где  $K$  – феноменологическая константа скорости; члены в фигурных скобках – антикоммутаторы операторов;  $\bar{N} = \{\exp[\hbar\omega_v/(k_B T)] - 1\}^{-1} = k_B T / (\hbar\omega_v) \gg 1$  – среднее равновесное число квантов возбуждения. При частоте колебаний  $\sim 1$  МГц и комнатной температуре получаем  $\bar{N} \approx 10^7$ . Экспериментально измеряемая скорость нагрева  $\nu = K\bar{N}$ , как правило, варьируется в пределах  $1 - 10^3$  с<sup>-1</sup> (см. обзор [21] и приведенные в нем ссылки).

Если частота колебаний иона в ловушке много больше отстройки и частоты Раби ( $\omega_v \gg \delta, \Omega$ ), то справедливо так называемое секулярное приближение, в рамках которого можно пренебречь недиагональными элементами матрицы плотности по колебательным квантовым числам  $n$ . Для диагональных по  $n$  элементов кинетическое уравнение сводится к бесконечной цепочке связанных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n^{eg}}{\partial t} &= -i\Omega(n)(\rho_n^{eg} - \rho_n^{ee}) + \left( \frac{\partial \rho_n^{eg}}{\partial t} \right)_{\text{heating}}, \\ \frac{\partial \rho_n^{ee}}{\partial t} &= -i[\Omega(n)\rho_n^{ee} - \rho_n^{eg}\Omega^*(n)] + \left( \frac{\partial \rho_n^{ee}}{\partial t} \right)_{\text{heating}}, \\ \frac{\partial \rho_n^{gg}}{\partial t} &= -i[\Omega^*(n)\rho_n^{gg} - \rho_n^{ee}\Omega(n)] + \left( \frac{\partial \rho_n^{gg}}{\partial t} \right)_{\text{heating}}, \quad (2) \\ \left( \frac{\partial \rho_n^{(ij)}}{\partial t} \right)_{\text{heating}} &= -\nu(2n+1)\rho_n^{(ij)} + \nu(n+1)\rho_{n+1}^{(ij)} + \nu n\rho_{n-1}^{(ij)}, \\ i, j &= e, g. \end{aligned}$$

В этих уравнениях частота Раби для перехода между состояниями с заданным колебательным квантовым числом  $|g, n\rangle \rightarrow |e, n\rangle$  зависит от  $n$  из-за эффекта отдачи и конечных размеров области локализации волновых функций собственных состояний гармонического осциллятора:

$$\Omega(n) = \langle n | \Omega \exp(ikx) | n \rangle = \Omega \exp(-\eta^2/2) L_n(\eta^2),$$

где квадрат параметра Лэмба–Дике  $\eta$  определяется отношением частоты отдачи к колебательной частоте:  $\eta^2 = \hbar k^2 / (2M\omega_v) = \omega_r / \omega_v \ll 1$  ( $M$  – масса атома), а для полиномов Лагерра справедливо разложение по степеням малого параметра:  $L_n(\eta^2) \approx 1 - n\eta^2 + n(n-1)\eta^4/4 + \dots$ . Таким образом, нагрев иона и эффект отдачи приводят к уменьшению эффективной частоты Раби по сравнению с номинальной при  $n = 0$ . Кроме того, в ходе эволюции возрастает дисперсия частот Раби в соответствии с заселением все более высоких колебательных уровней.

#### 4. Численное решение и обсуждение результатов

Для того чтобы количественно охарактеризовать влияние нагрева иона в ловушке на эффективность различных обобщенных рэмсиевских методов подавления сдвига реперной частоты за счет нерезонансного действия пробного поля, мы численно решаем систему динамических уравнений (2), предполагая, что в начальный момент времени ион находится в основном электронном состоянии с бoльцмановским распределением по колебательным уровням:

$$\rho|_{t=0} = \sum_n p_n |g, n\rangle\langle g, n|,$$

$$p_n = \frac{1}{1+n_0} \left( \frac{n_0}{1+n_0} \right)^n,$$

где

$$n_0 = \sum_n n p_n \approx \frac{k_B T_0}{\hbar\omega_v}$$

– среднее начальное число колебательных возбуждений;  $T_0$  – температура лазерно охлажденного иона (как правило, это доплеровский предел охлаждения порядка нескольких милликельвинов). При нахождении численного решения бесконечная цепочка уравнений обрывается при некотором максимальном  $n_{\text{max}}$ . Для определения этого максимального числа мы используем точный аналитический результат для полной вероятности заселения колебательных уровней:

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \frac{1}{1+n(t)} \left[ \frac{n(t)}{1+n(t)} \right]^n, \\ n(t) &= n_0 + \nu t, \quad (3) \\ 1 - \sum_{n=0}^{n_{\text{max}}} p_n(t) &\leq \varepsilon = 0.01. \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon$  – число, ограничивающее точность вычислений. Остальные параметры задачи для численных расчетов выбраны близкими к использованным в экспериментах по спектроскопии октупольного перехода в одиночном ионе иттербия [1, 14]:  $\nu = 3\Omega$ ,  $\tau\Omega = \pi/2$ ,  $T\Omega = 2\pi$ ,  $n_0 = 20$ ,  $\eta = 0.1$ .

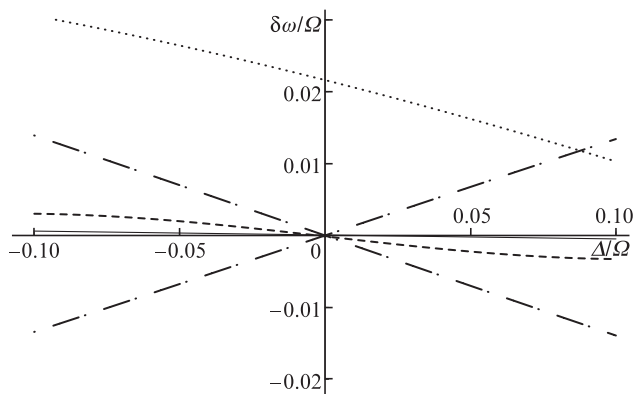


Рис.2. Зависимости сдвига реперной частоты  $\delta\omega$  от остаточного полевого сдвига  $\Delta$  для различных обобщенных рэмсиевских схем: ГР (штриховая линия), МГР (пунктирная линия), ОГР( $\pi/4$ ) и ОГР( $3\pi/4$ ) (штрих-пунктирные линии) и гибридная ОГР( $\pi/4, 3\pi/4$ ) (тонкая сплошная линия) схемы.

При номинальной частоте Раби  $\Omega = 10$  Гц полная длительность цикла опроса составляет 0.2 с, а оценка по формулам (3) максимального колебательного квантового числа, которое необходимо учесть в расчетах, дает  $n_{\max} = 270$ .

Результаты численных расчетов представлены на рис.2. Видно, что нагрев иона в ловушке снижает эффективность всех рассмотренных в настоящей работе обобщенных рэмсиевских методов, приводя к появлению линейной зависимости сдвига реперной частоты от остаточного полевого сдвига. Кроме того, в случае МГР схемы эта зависимость не пересекает начало координат, т.е. имеется сдвиг реперной частоты даже при нулевом остаточном сдвиге, что делает данную схему непригодной для подавления сдвига частоты до относительного уровня, не превышающего  $10^{-18}$ . Для остальных схем получаем следующие коэффициенты пропорциональности в линейных зависимостях (наклоны прямых в начале координат):

$$\left(\frac{\delta\omega}{\Delta}\right)_{\text{HR}} = -0.040, \quad \left(\frac{\delta\omega}{\Delta}\right)_{\text{GHR}(\pi/4)} = 0.135,$$

$$\left(\frac{\delta\omega}{\Delta}\right)_{\text{GHR}(3\pi/4)} = -0.140, \quad \left(\frac{\delta\omega}{\Delta}\right)_{\text{GHR}(\pi/4, 3\pi/4)} = -0.003.$$

Если принять, что остаточный полевой сдвиг контролируется на уровне 10 мГц (как и в работе [14]), то только две наиболее устойчивые к нагреву схемы обеспечивают подавление сдвига реперной частоты до относительного уровня, меньшего  $10^{-18}$ , а именно:  $6 \times 10^{-19}$  в случае оригинальной ГР схемы и  $5 \times 10^{-20}$  для гибридной ОГР схемы.

## 5. Заключение

Нагрев уменьшает эффективность рассмотренных в настоящей работе обобщенных рэмсиевских схем подавления полевого сдвига из-за взаимодействия иона с пробным полем. Во всех случаях наблюдается линейная зависимость частоты часов от остаточного полевого сдвига вблизи нуля. В ряде случаев (МГР, ОГР( $\pi/4$ ) и ОГР( $3\pi/4$ ) схемы) это может служить препятствием для достижения относительной неопределенности часов менее  $10^{-18}$ .

Можно выделить три взаимосвязанных фактора, которые приводят к уменьшению эффективности исследованных нами методов. Во-первых, уменьшение эффектив-

ной частоты Раби в цикле опроса иона из-за нагрева и эффекта отдачи. Во-вторых, увеличение дисперсии частот Раби в соответствии с распределением иона по колебательным уровням. Эти два фактора являются доминирующими в пределе  $\nu\tau \ll 1$ , когда нагревом за время действия импульсов можно пренебречь, и изменение распределения по колебательным уровням происходит во время темного промежутка. Однако в экспериментах, как правило, выполняется обратное соотношение  $\nu\tau > 1$ , и к первым двум факторам добавляется дефазировка оптических колебаний из-за нагрева иона во время действия импульсов. Из всех рассмотренных обобщенных рэмсиевских схем можно выделить две наиболее устойчивые к нагреву – оригинальную ГР и гибридную ОГР( $\pi/4, 3\pi/4$ ) схемы.

Отметим, что влияние нагрева на двухпетлевые автобалансные рэмсиевские схемы [9, 10], а также разработка специальных схем, нечувствительных к нагреву, требуют отдельного исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобрнауки РФ (соглашение №14.610.21.0010, уникальный идентификатор проекта RFMEFI61017X0010). В.И.Юдин благодарит за финансовую поддержку Российский научный фонд (грант №16-12-10147), Минобрнауки РФ (грант №3.1326.2017/4.6) и РФФИ (грант №17-02-00570 и 18-02-00822).

- Huntemann N., Lipphardt B., Okhapkin M., Tamm C., Peik E., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 213002 (2012).
- Taichenachev A.V., Yudin V.I., Oates C.W., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 083001 (2006).
- Kozlov M.G., Safronova M.S., Crespo Lopes-Urrutia J.R., Schmidt P.O. *Rev. Mod. Phys.*, **90**, 045005 (2018).
- Alden E.A., Moore K.R., Leanhardt A.E. *Phys. Rev. A*, **90**, 012523 (2014).
- Taichenachev A.V., Yudin V.I., Oates C.W., et al. *Phys. Rev. A*, **82**, 011804 (2010).
- Hobson R., Bowden W., King S.A., Baird P.E.G., Hill I.R., Gill P. *Phys. Rev. A*, **93**, 010501 (2016).
- Zanon-Willette T., de Clercq E., Arimondo E. *Phys. Rev. A*, **93**, 042506 (2016).
- Zanon-Willette T., Lefevre R., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *Phys. Rev. A*, **96**, 023408 (2017).
- Sanner C., Huntemann N., Lange R., Tamm C., Peik E. *Phys. Rev. Lett.*, **120**, 053602 (2018).
- Yudin V.I., Taichenachev A.V., Basalaev M.Y., Zanon-Willette T., Pollock J.W., Shuker M., Donley E.A., Kitching J. *Phys. Rev. Appl.*, **9**, 054034 (2018).
- Yudin V.I., Taichenachev A.V., Basalaev M.Y., et al. *New J. Phys.*, **20**, 123016 (2018).
- Zanon-Willette T., et al. *Rep. Prog. Phys.*, **81**, 094401 (2018).
- Hafiz M.A., Coget G., Petersen M., Calosso C.E., Guerandel S., de Clercq E., Boudot R. *Appl. Phys. Lett.*, **112**, 244102 (2018).
- Huntemann N., Sanner C., Lipphardt B., Tamm C., Peik E. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 063001 (2016).
- Табатчикова К.С., Тайченачев А.В., Юдин В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **97**, 354 (2013) [*JETP Lett.*, **97**, 311 (2013)].
- Turchette Q.A., Kielpinski D., King B.E., et al. *Phys. Rev. A*, **61**, 063418 (2000).
- James D.F.V. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 317 (1998).
- Henkel C., Pötting S., Wilkens M. *Appl. Phys. B*, **69**, 379 (1999).
- Deslauriers L., Haljan P.C., Lee P.J., et al. *Phys. Rev. A*, **70**, 043408 (2004).
- Chen J.-S., Brewer S.M., Chou C.W., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 053002 (2017).
- Brownutt M., Kumph M., Rabl P., Blatt R. *Rev. Mod. Phys.*, **87**, 1419 (2015).
- Gardiner C.W., Zoller P. *Quantum Noise* (Springer, 2000).