

Квантовая геометрическая фаза в присутствии пред- и постселекции

Т.С.Яковлева, А.М.Ростом, В.А.Томилин, Л.В.Ильичёв

Рассмотрена квантовая система, подвергающаяся фазовому преобразованию и взаимодействию с окружением между актами пред- и постселекции, что приводит к возникновению в ней интерференционных эффектов. Показано, что сдвиг зависимости статистики информационных контактов системы с окружением от величины управляемого фазового сдвига может быть интерпретирован как геометрическая фаза, что соответствует идее известного операционного подхода к определению последней. Предложено обобщение этого подхода на квантовые системы, подверженные пред- и постселекции.

Ключевые слова: квантовая геометрическая фаза, интерферометр Маха–Цендера, двухвекторный формализм.

1. Введение

Любое чистое состояние квантовой системы изображается точкой комплексного проективного пространства. Следовательно, непрерывная эволюция чистого квантового состояния изолированной системы может быть представлена в виде непрерывной кривой C в этом пространстве, и каждой такой кривой можно поставить в соответствие комплексное число $\exp[i\varphi_{\text{geom}}(C)]$. Его аргумент $\varphi_{\text{geom}}(C)$ известен как геометрическая (топологическая) фаза [1]. Она определяется исключительно формой кривой C и не зависит от скорости движения системы вдоль этой кривой. Современная трактовка понятия геометрической фазы была дана в [2] и [3], хотя некоторые ее оптические проявления были описаны ранее в [4]. История развития понятия геометрической фазы и обзор его многочисленных приложений в классической и квантовой физике приведены в [5, 6].

Первоначальная концепция геометрической фазы не раз подвергалась обобщениям. Так, в [7] было предложено обобщение понятия геометрической фазы на смешанные квантовые состояния. Физически ориентированное рассмотрение, основанное на операционном подходе к геометрической фазе для смешанных состояний, было дано в [8]. Поскольку геометрическая фаза проявляется в интерферометрических экспериментах, авторами [8] была разработана схема на основе интерферометра Маха–Цендера: внутреннее состояние системы, движущейся в интерферометре, подвергается унитарному преобразованию в одном из его плеч, в то время как в другом плече расположен элемент, вносящий контролируемый фазо-

вый сдвиг θ . Разность вероятностей регистрации системы в том или ином выходном канале интерферометра зависит от фазы θ как $\cos(\theta - \theta_{\text{geom}})$, т.е. представляет собой интерференционную картину. Сдвиг этой зависимости θ_{geom} зависит от выбранного унитарного преобразования и начального состояния системы, и в случае, когда последнее является чистым, сводится к стандартному определению геометрической фазы. Основным требованием к квантовой системе в рассматриваемой схеме является возможность двигаться по суперпозиции различных путей в интерферометре. Подходящим примером может служить фотон, у которого в качестве внутреннего состояния выбрана поляризация.

Следующим естественным шагом в разработке теории геометрической фазы является ее определение для открытых систем с неунитарной эволюцией. Оказывается, что такое обобщение сильно зависит от выбранного подхода [9–11]. В контексте настоящей работы наиболее важным является подход, рассмотренный в [12]. Он в определенном смысле объединяет идеи из [8, 10, 11]. В нем геометрическая фаза определяется в ходе интерферометрических измерений согласно описанному выше операционному подходу. Унитарная эволюция из [8] заменяется взаимодействием системы с элементом окружения с последующим измерением некоторой наблюдаемой, относящейся к этому окружению. В результате рассматриваемая система становится открытой, и преобразование внутреннего состояния системы оказывается неунитарным. В [12] была высказана идея о возможности определения геометрической фазы как функции исходов проведенных измерений. Эта догадка была подтверждена в [13]. Для случая двумерной системы (кубита), движущейся в цепочке интерферометров Маха–Цендера, было получено общее выражение для геометрической фазы как функции истории контактов кубита с элементами окружения – последовательности зарегистрированных исходов измерений, проводимых в каждом интерферометре, при произвольном начальном состоянии системы.

Целью настоящей работы является расширение операционного определения геометрической фазы на область двухвекторной, или симметричной относительно

Т.С.Яковлева, В.А.Томилин, Л.В.Ильичёв. Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 1; Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; e-mail: 8342tomilin@mail.ru

А.М.Ростом. Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2

направления времени квантовой физики [14]. Используемый подход основывается на схемах, рассмотренных в [8] и [12]. Однако новая постановка приводит к появлению ранее не наблюдавшихся особенностей. В то же время она позволяет рассмотреть геометрическую фазу для наиболее общего из известных на данный момент типов квантовых состояний.

2. Схема регистрации геометрической фазы

Схема регистрации геометрической фазы в присутствии пред- и постселекции является модификацией интерферометрических схем из [8] и [12]. Одно из плеч интерферометра Маха–Цендера (рис.1) содержит управляемый фазовый сдвиг θ . Во втором плече организовано взаимодействие со стандартным элементом окружения, приготовленным в состоянии $|e\rangle$. Результат этого взаимодействия дается унитарным оператором \hat{U} . После измерения стандартный элемент окружения оказывается в одном из собственных состояний $|e_i\rangle$ измеренной наблюдаемой. Предселекция состоит в акте успешного приготовления начального состояния системы $|\Psi\rangle^{\text{pre}}$. Аналогично, в процессе постселекции отбираются лишь эксперименты, в результате которых система на выходе из интерферометра оказалась в состоянии $|\Psi\rangle^{\text{post}}$. Как уже было отмечено, вероятности обнаружения системы в том или ином выходном канале интерферометра формируют интерференционную картину в обычном операционном подходе к геометрической фазе. Поскольку в рассматриваемой схеме постселекция происходит также на выходе из интерферометра, поиск интерференционных явлений осуществляется в вероятностях различных исходов проведенных измерений.

Следуя обозначениям, введенным в [8, 12, 13], $|0\rangle$ и $|1\rangle$ обозначают движение системы в горизонтальном либо вертикальном направлении. Прохождение входного делителя пучка осуществляет следующее преобразование (выходной делитель аналогичен входному):

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle). \quad (1)$$

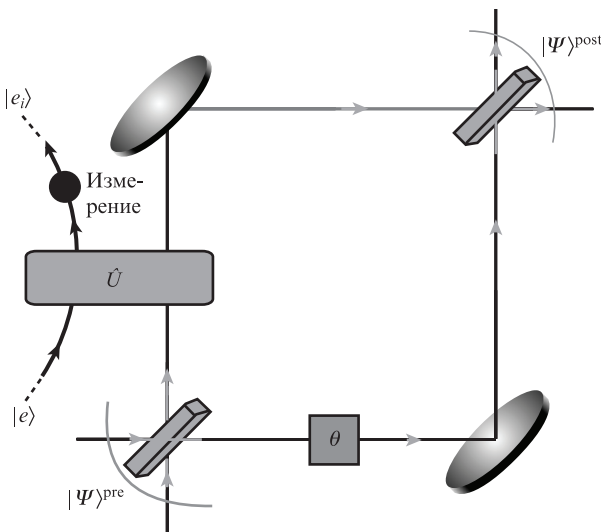


Рис.1. Схема интерферометра Маха–Цендера с селекцией состояния системы до и после ее прохождения через интерферометр.

Поворотные зеркала действуют следующим образом: $|0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$. Пред- и постселектированные состояния представимы в виде

$$|\Psi\rangle^{\text{pre}} = |\psi_0^{\text{pre}}\rangle \otimes |0\rangle + |\psi_1^{\text{pre}}\rangle \otimes |1\rangle,$$

$$|\Psi\rangle^{\text{post}} = |\psi_0^{\text{post}}\rangle \otimes |0\rangle + |\psi_1^{\text{post}}\rangle \otimes |1\rangle. \quad (2)$$

Здесь $|\psi_\sigma^{\text{pre}}\rangle$ и $|\psi_\sigma^{\text{post}}\rangle$ ($\sigma = 0, 1$) – векторы в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_s внутренних состояний системы. В результате взаимодействия системы с окружением, описываемого унитарным оператором \hat{U} , и последующего измерения с исходом i , состояние системы преобразуется по одному из двух вариантов:

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow \langle e_i | e \rangle |\psi\rangle \otimes |0\rangle \equiv (\mathcal{E}_i(0) |\psi\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (3)$$

$$|\psi\rangle \otimes |1\rangle \rightarrow \langle e_i | \hat{U} | e \rangle |\psi\rangle \otimes |1\rangle \equiv (\hat{\mathcal{E}}_i(1) |\psi\rangle) \otimes |1\rangle.$$

В результате первого преобразования состояние системы $|\psi\rangle$ всего лишь приобретает комплексный множитель $\mathcal{E}_i(0)$, поскольку в действительности взаимодействия с окружением не произошло. Во втором случае преобразование состояния посредством оператора $\hat{\mathcal{E}}_i(1)$ уже нетривиально.

Будем полагать, что элементы окружения представляют собой кубиты. Это позволяет использовать простейшую версию операционного подхода, поскольку имеется всего два возможных исхода измерения и разность вероятностей этих исходов $p_1(\theta) - p_2(\theta)$ должна давать интерференционную картину. Амплитуда вероятности $A_i(\theta)$ зарегистрировать исход i и затем провести успешную постселекцию системы в состоянии $|\Psi\rangle^{\text{post}}$ имеет вид

$$A_i(\theta) = \langle \psi_+^{\text{post}} | \hat{\mathcal{E}}_i(1) | \psi_+^{\text{pre}} \rangle - \exp(i\theta) \mathcal{E}_i(0) \langle \psi_-^{\text{post}} | \psi_-^{\text{pre}} \rangle. \quad (4)$$

Здесь $|\psi_\pm^{\text{pre, post}}\rangle = (|\psi_0^{\text{pre, post}}\rangle \pm |\psi_1^{\text{pre, post}}\rangle) / \sqrt{2}$. Амплитуды $A_i(\theta)$ при использовании в формуле Ааронова–Бергмана–Левовитца (так называемое правило ABL) [15] дают вероятности $p_i(\theta)$ регистрации исхода i при условии успешных пред- и постселекции. Для разности этих вероятностей имеем

$$p_1(\theta) - p_2(\theta) = \frac{|A_1(\theta)|^2 - |A_2(\theta)|^2}{|A_1(\theta)|^2 + |A_2(\theta)|^2}. \quad (5)$$

Зависимость от θ определяется членом, содержащим $\cos(\theta - \theta_{\text{geom}}^-)$ в числителе и похожим членом, содержащим $\cos(\theta - \theta_{\text{geom}}^+)$ в знаменателе. Два различных фазовых сдвига (которые можно интерпретировать как геометрические фазы) имеют вид

$$\theta_{\text{geom}}^\pm = \arg[\langle \psi_+^{\text{post}} | (\hat{\mathcal{E}}_0(1) \mathcal{E}_0^*(0) \pm \hat{\mathcal{E}}_1(1) \mathcal{E}_1^*(0)) | \psi_+^{\text{pre}} \rangle \langle \psi_-^{\text{pre}} | \psi_-^{\text{post}} \rangle]. \quad (6)$$

Возникновение пары геометрических фаз вместо одной, очевидно, обусловлено особенностями правила ABL, которое оперирует ретроспективными вероятностями исходов измерений. По сути, оно является частным

* При условии успешной постселекции в $|\Psi\rangle^{\text{pre}}$.

случаем правила Байеса и кардинальным образом отличается от выражения для обычных квантовых вероятностей (в отсутствие постселекции).

Полученные фазы $\theta_{\text{geom}}^{\pm}$ могут быть представлены в виде суммы двух членов – аргументов двух сомножителей в выражении (6). Именно одновременное присутствие этих двух членов обеспечивает главное свойство геометрической фазы – калибровочную инвариантность. Действительно, любое преобразование типа $|\Psi\rangle^{\text{pre}} \rightarrow \exp(i\phi) \times |\Psi\rangle^{\text{pre}}$ или $|\Psi\rangle^{\text{post}} \rightarrow \exp(i\phi') |\Psi\rangle^{\text{post}}$ не меняет $\theta_{\text{geom}}^{\pm}$. Кроме того, только один из сомножителей в правой части (6) зависит от типа проведенного измерения. В пределе слабого взаимодействия системы с окружением \hat{U} стремится к единичному оператору, $\hat{\mathcal{E}}_i(1)$ и $\hat{\mathcal{E}}_i(0)$ становятся равными и

$$\theta_{\text{geom}}^{\pm} \rightarrow \theta_{\text{geom}} \doteq \arg(\langle \psi_{\pm}^{\text{post}} | \psi_{\pm}^{\text{pre}} \rangle \langle \psi_{\mp}^{\text{pre}} | \psi_{\mp}^{\text{post}} \rangle). \quad (7)$$

Это асимптотическое выражение для геометрической фазы перед исчезновением интерференции, когда числитель и знаменатель отношения (5) приобретают одинаковую зависимость от θ и различаются только коэффициентами $|\mathcal{E}_1(0)|^2 - |\mathcal{E}_2(0)|^2$ и $|\mathcal{E}_1(0)|^2 + |\mathcal{E}_2(0)|^2$ соответственно. При этом выражение (5) теряет зависимость от θ .

3. Обсуждение

Рассматриваемая схема имеет любопытную особенность: при обычной постановке квантового эксперимента, когда имеется только предселекция (приготовление состояния $|\Psi\rangle^{\text{pre}}$), не может быть никакой зависимости вероятностей p_1 и p_2 исходов измерения от θ , т. к. фазовый сдвиг и измерения проводятся в различных плечах интерферометра и любая зависимость такого рода означала бы возможность посылки сигнала, нарушающей причинность. Зависимость p_i от θ появляется после того, как из общего ансамбля экспериментов выделяется подансамбль, отвечающий успешной постселекции в $|\Psi\rangle^{\text{post}}$. Аналогичным образом, зависимость от θ отсутствует в ансамбле, сформированном только постселекцией при полной неопределенности состояния на входе в интерферометр. Резюмируя, можно утверждать, что явление интерференции и геометрические фазы существуют между актами пред- и постселекции и порождены ими.

Принципиальным обстоятельством в рассматриваемой интерференционной схеме служит наличие и суперпозиционность двух альтернативных направлений движения системы. Если пространство внутренних состояний системы двумерно, т. е. она является кубитом, наличие альтернативных пространственных состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ создает эффективную двухкубитовую систему. Она создана интерферометром. Закономерен и интересен вопрос о возможности наблюдать интерференционные явления в реальной двухкубитовой системе с пред- и постселекцией в отсутствие интерферометра.

Рассмотрим схему рис.2. Общий смысл ее отличен от схемы рис.1, несмотря на определенное сходство с последней. В то время как на рис.1 представлена пространственная структура интерферометра Маха–Цендера, рис.2 отображает пространственно-временную структуру процесса приготовления, эволюции и постселекции состояния двухкубитовой системы. Треугольные блоки символизируют акты приготовления и постселектирующего

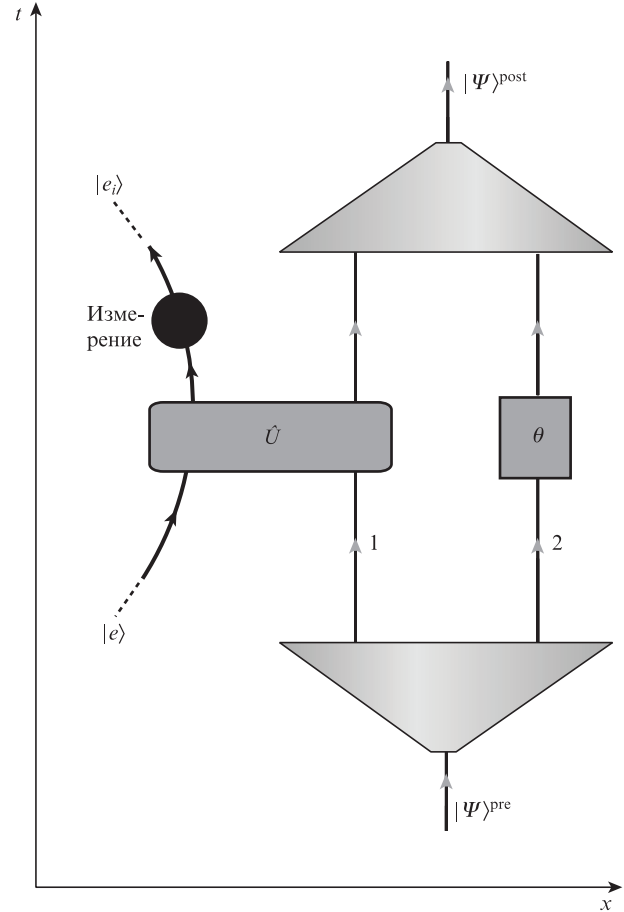


Рис.2. Пространственно-временная схема пред- и постселекции состояний двухкубитовой системы с эволюцией, аналогичной представленной на рис.1.

щего измерения в стиле квантовой схемотехники [16]. На мировой линии кубита 1 обозначена область его взаимодействия с кубитом окружения, а состояние кубита 2 подвергается селективному фазовому преобразованию

$$|\sigma\rangle_2 \rightarrow \exp[i\theta\sigma] |\sigma\rangle_2 \quad (\sigma = 0, 1). \quad (8)$$

Селективность этого преобразования заменяет отсутствие реального интерферометра.

Если представить состояния $|\Psi\rangle^{\text{pre}}$ и $|\Psi\rangle^{\text{post}}$ в виде

$$|\Psi\rangle^{\text{pre, post}} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \psi^{\text{pre, post}}(\sigma_1, \sigma_2) |\sigma_1\rangle_1 \otimes |\sigma_2\rangle_2, \quad (9)$$

амплитуда вероятности, определенная по образцу (4), есть

$$A_i(\theta) = \sum_{\sigma_1, \sigma_1'} \psi^{\text{post}*}(\sigma_1', \sigma_2) \psi^{\text{pre}}(\sigma_1, \sigma_2) \exp[i\theta\sigma_2] \langle \sigma_1' | \hat{\mathcal{E}}_i | \sigma_1 \rangle, \quad (10)$$

где $\hat{\mathcal{E}}_i$ совпадает с $\hat{\mathcal{E}}_i(1)$ из (3). Нетрудно заметить, что необходимым условием появления интерференционных явлений (и геометрической фазы) как зависимости (5) от θ оказывается зацепленность состояний $|\Psi\rangle^{\text{pre}}$ и $|\Psi\rangle^{\text{post}}$. Действительно, если эти состояния сепарабельны, т. е.

$$\psi^{\text{pre, post}}(\sigma_1, \sigma_2) = \psi_1^{\text{pre, post}}(\sigma_1) \psi_2^{\text{pre, post}}(\sigma_2), \quad (11)$$

зависимость от θ в $A_i(\theta)$ оказывается сконцентрированной в отдельном множителе

$$\sum_{\sigma} \psi_2^{\text{post}*}(\sigma) \psi_2^{\text{pre}}(\sigma) \exp[i\theta\sigma]. \quad (12)$$

Он не зависит от i и поэтому выпадает из отношения (5). Примечательно, что для рассмотренной выше эффективной двухкомпонентной системы нет требования зацепленности состояний (2) для появления интерференционных явлений.

Подводя итог, можно утверждать, что интерференционные явления, обусловленные пред- и постселекцией состояний квантовой системы, существуют. Эти явления проявляются в статистике контактов системы с окружением в интервале между актами селекции. Геометрическая фаза, введенная в рамках обобщения известного операционного подхода, сопровождается возникновением интерференционных явлений.

Работа выполнена в рамках госзадания (проект АААА-А17-117052210003-4, внутренний номер ФАСО 0319-2016-0002) в Институте автоматики и электрометрии СО РАН.

1. Mukunda N., Simon R. *Ann. Phys.*, **228**, 205 (1993).
2. Pancharatnam S. *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A*, **44**, 247 (1956).
3. Berry M.V. *Proc. R. Soc. A*, **392**, 45 (1984).
4. Владимирский В. *ДАН СССР*, **31**, 222 (1941).
5. Chruściński D., Jamiolkowski A. *Geometric Phase in Classical and Quantum Mechanics* (Boston: Birkhäuser, 2004).
6. Bohm A. et al. *The Geometric Phase in Quantum Systems* (Berlin: Springer-Verlag, 2003).
7. Uhlmann A. *Rep. Math. Phys.*, **24**, 229 (1986); *Lett. Math. Phys.*, **21**, 229 (1991).
8. Sjöqvist E. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 2845 (2000).
9. Garrison J.C., Wright E.M. *Phys. Lett. A*, **128**, 177 (1988).
10. Carollo A. *Mod. Phys. Lett. A*, **22**, 1635 (2005).
11. Tong D.M., Sjöqvist E., Kwek L.C., Oh C.H. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 080405 (2004).
12. Sjöqvist E. *Acta Phys. Hung. B: Quantum Electron.*, **26**, 195 (2006).
13. Yakovleva T.S., Rostom A.M., Tomilin V.A., Il'ichov L.V. *Quantum Stud.: Math. Found.*, DOI: 10.1007/s40509-018-00179-x (2019).
14. Aharonov Y., Vaidman L. *Phys. Scr.*, **T76**, 85 (1998).
15. Aharonov Y., Bergmann P.G., Lebowitz J.L. *Phys. Rev.*, **134**, B1410 (1964).
16. Coecke B. *Contemp. Phys.*, **51**, 59 (2010).