

# Роль спонтанного излучения в формировании оптического спектра диодного лазера в режиме стационарной генерации

А.П.Богатов, А.Е.Дракин

*На основе уравнений Максвелла получено уравнение автоколебаний типа уравнения Ван дер Поля в резонаторе диодного лазера, решением которого являются автоколебания (лазерная генерация) даже в отсутствие спонтанного излучения. Это решение принципиальным образом отличается от решений, полученных на основе скоростных уравнений, содержащих добавку в виде интенсивности спонтанного излучения. Учет спонтанного излучения в модели Ван дер Поля делает результаты расчета более реалистичными и позволяет найти параметры, характеризующие когерентность излучения диодного лазера, в том числе спектральные плотности флуктуаций амплитуды и фазы этого излучения.*

*Ключевые слова:* диодные лазеры, спонтанное излучение, флуктуации параметров.

## 1. Введение

На вопрос о роли спонтанного излучения в формировании спектра был дан ясный ответ уже буквально через несколько лет после появления лазеров (см. напр., [1–4]). В частности, для диодного лазера последовательная теория, учитывающая спонтанное излучение в одночастотном режиме его генерации, дана в замечательных работах [5, 6]. В этих и других основополагающих работах показано, что наличие источников спонтанного излучения в принципиально нелинейной автоколебательной лазерной системе приводит к смещению спонтанного и стимулированного излучений. В результате происходят амплитудная и частотная модуляции волны лазерной генерации случайным сигналом. Таким образом, роль спонтанного излучения в лазере – служить принципиальным источником шумов, которые, в частности, определяют тонкую структуру спектра излучения (нижнюю границу ширины спектральной линии генерации), т.е. предельную когерентность лазера. Этим, в основном, и ограничено действие спонтанного излучения при формировании оптического спектра в стационарном режиме генерации.

Отметим, что здесь и далее мы будем рассматривать именно такой режим, исключая возможные переходные режимы, возникающие, например, при «резком» включении накачки или при повторяющихся срывах лазерной генерации в неустойчивой рабочей точке. В этих режимах роль спонтанного излучения может быть существенно большей, чем в стационарном режиме генерации.

Казалось бы, вопрос о роли спонтанного излучения в лазерах исчерпан. Тем не менее до настоящего времени существуют и продолжают появляться теоретические ра-

боты, в которых диодный лазер рассматривается исключительно от лазеров других типов. В качестве примера таких теоретических работ можно привести работы [7, 8]. В этих и других работах используется подход, в котором, по сути, поле лазерной генерации рассматривается как усиленное и спектрально отфильтрованное спонтанное излучение. К такому физическому смыслу подталкивает теория авторов [7, 8], в которой спектральное распределение интенсивности по модам можно представить в виде дроби, где числитель – спектральная плотность спонтанного излучения, а знаменатель пропорционален разности потерь и насыщенного усиления. Эта разность характеризует неполную компенсацию потерь усилением для каждой из мод, поскольку в эту моду в резонаторе приходит некая дополнительная постоянная энергетическая добавка в виде спонтанного излучения. В книге [9] это обстоятельство отражено в явном виде формулами (6.40b) и (6.42), в работе [7] оно однозначно следует из простейшего уравнения (16), в работе [8] использовано аналогичное уравнение (13), но модифицированное с учетом «двухфотонного поглощения». На основе такого подхода и простого решения скоростных уравнений авторы [7–9] пришли к выводу, что наблюдаемый в эксперименте режим генерации многих мод в диодном лазере есть следствие действий спонтанного излучения наряду с механизмом двухфотонного поглощения. Этот вывод противоречит физическому смыслу и является исключительно результатом ошибочности теоретического подхода, о чем более подробно будет сказано далее.

Некоторые авторы такой подход ранее именовали «асимптотическим порогом» генерации. В основу этого подхода положены скоростные уравнения для неких средних интенсивностей и инверсии. Их связь с основами электродинамики в виде уравнений Максвелла если и можно усмотреть, то только в виде закона сохранения энергии и в очень ограниченном виде. В эти уравнения «руками» (эвристически) добавлены некие детерминированные функции, которые интерпретируются как вклад спонтанного излучения.

А.П.Богатов, А.Е.Дракин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: ya.bogatov47@yandex.ru

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г., после доработки – 29 мая 2019 г.

Надо отметить, что заблуждения относительно роли «сторонних» источников сигналов в автогенераторе, к которым относится и лазер, имеют длинную историю. В первый раз они были развеяны в начале прошлого века в радиотехнике (см., напр., [10, 11] и работу [12, с. 414]) при анализе лампового генератора Томпсона. Второй раз это случилось с появлением мазеров и лазеров, и тогда такой подход был подвергнут критике на начальном этапе развития теории лазеров. Однако в области диодных лазеров эти заблуждения задержались гораздо дольше, что удивительно, поскольку достаточно полно освещающие этот вопрос работы [5, 6] давно опубликованы.

Причиной такого ошибочного подхода, возможно, служит значительное количественное отличие ряда параметров, характеризующих диодный лазер как автоколебательную систему, от аналогичных параметров других типов лазеров. В первую очередь это относится к таким параметрам, как спектральная плотность спонтанного излучения «в моде» и величина связи между изменениями реальной и мнимой частей восприимчивости при изменении инверсии.

Конечно, можно было бы игнорировать работы [7, 8] и другие аналогичные работы как ошибочные и не останавливаться на них подробно. Однако подход с использованием скоростных уравнений, содержащих добавку, связанную со спонтанным излучением, в литературе часто «перекочевывает» из одной статьи в другую. Этот процесс продолжается до настоящего времени, и такой подход присутствует в целом ряде книг по диодным лазерам (например, в [9]), поэтому возникает необходимость отдельно проанализировать его ошибочность.

В соответствии со сказанным выше, цель настоящей работы состоит в том, чтобы еще раз в последовательном анализе (полуклассической теории) на основе уравнений Максвелла продемонстрировать влияние спонтанного излучения на спектр генерации диодного лазера с учетом особенностей его параметров.

Поскольку значительная часть физического содержания этой статьи в той или иной степени присутствует в многочисленной литературе по другим типам лазеров, то настоящая статья неизбежно принимает обзорный характер. Более того, эта работа как раз и направлена на то, чтобы представить теорию диодного лазера как один из разделов квантовой радиофизики, если и отличающийся от других ее разделов, то только количественными характеристиками моделей, но не их физическим содержанием и подходами.

Для удобства восприятия материала статьи авторы подробно и последовательно, начиная с основ электродинамики, постарались донести до читателя подходы к теории спектра, флуктуаций интенсивности и инверсии для диодного лазера в одночастотном режиме генерации.

К оригинальной части статьи относится вывод выражения для фактора спонтанного излучения. Он играет ключевую роль в количественном описании действия спонтанного излучения на параметры выходного лазерного пучка. С методической точки зрения изложение материала статьи выполнено с использованием терминов и параметров, наиболее адекватных эксперименту с диодными лазерами. При этом авторы старались сделать конечные результаты наиболее доступными для сопоставления с данными измерений, насколько это оказалось возможным.

## 2. Комплексная диэлектрическая проницаемость и поляризация полупроводниковой среды

Чтобы последовательно найти уравнение для амплитуды поля, необходимо воспользоваться уравнениями Максвелла для среды оптического резонатора диодного лазера. Эти уравнения содержат вектор электрической индукции  $D$ , который характеризует исключительно среду и взаимодействие электромагнитной волны с ней. Он представляет собой сумму среднего (по пространству в физически малом объеме) значения вектора напряженности  $\mathcal{E}$  и вектора поляризации  $\mathcal{P}$  среды с коэффициентом 4π. В свою очередь вектор поляризации  $\mathcal{P}$  есть среднее значение дипольного момента единицы объема:

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{v} \sum_j q_j \bar{r}_j = \frac{1}{v(r)} \sum_j^{r_j \in v} q_j \bar{r}_j^{\text{ext}} + \frac{1}{v(r)} \sum_j^{r_j \in v} q_j \bar{r}_j^{\text{int}} = \bar{\mathcal{P}}^{\text{ext}} + \bar{\mathcal{P}}^{\text{int}}, \quad (1)$$

где  $\bar{r}_j(t) = \bar{r}_j^{\text{ext}}(t) + \bar{r}_j^{\text{int}}(t)$ ;  $v$  – физически малый объем;  $q_j$  – заряд  $j$ -й частицы, а  $\bar{r}_j$  – ее вектор координат, который состоит из суммы векторов: вектора смещения  $\bar{r}_j^{\text{ext}}$  за счет действия внешнего поля, т. е. отклика элементарного заряда на внешнее (вынуждающее) воздействие, и вектора  $\bar{r}_j^{\text{int}}$  собственного движения под действием внутренних сил, существующих в среде независимо от внешнего поля.

Вначале рассмотрим достаточно слабые поля, при которых отклик заряда на произвольно меняющееся во времени  $t$  внешнее поле можно считать линейным. В этом случае, не теряя общности, можно в качестве внешнего поля рассмотреть всего одну гармонику на частоте  $\omega$ , т. е. считаем, что

$$E(t) \sim \frac{1}{2} [A(\omega) \exp(-i\omega t) + \text{с.с.}].$$

Здесь и далее использованы обозначения  $E$  для реальных значений и  $\mathcal{E}$  для соответствующих комплексных значений напряженностей электрического поля. Зависимость от времени  $r_j^{\text{ext}}(t)$  тоже будет пропорциональна полю с неким коэффициентом пропорциональности  $\alpha(\omega)$ , т. е.  $r_j^{\text{ext}}(t) = \alpha_j(\omega) A(\omega) \exp(-i\omega t)$ , как отклик линейной системы на гармоническое воздействие. Тогда наведенная внешним полем амплитуда поляризации

$$P^{\text{ext}}(\omega) = \frac{1}{v} \sum_j q_j \alpha_j(\omega) A(\omega) = \chi(\omega) A(\omega), \quad (2)$$

где  $\chi(\omega)$  – так называемая восприимчивость – в общем случае комплексная величина, характеризующая среду для задач электродинамики.

Комплексная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\omega)$  определяется как коэффициент пропорциональности между фурье-компонентой электрической индукции  $D(\omega)$ , наведенной внешним полем, и самим этим полем согласно соотношениям

$$D(\omega) = A(\omega) + 4\pi P^{\text{ext}}(\omega) = A(\omega)[1 + 4\pi\chi(\omega)] = \varepsilon(\omega)A(\omega), \quad (3)$$

где  $\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega)$ .

Таким образом, за все характеристики среды, относящиеся к электродинамике, ответственны два различных типа движения зарядов. Первый из них является откли-

ком зарядов на внешнее поле, что выражается через функцию  $\varepsilon(\omega)$ , а второй происходит за счет действия внутренних сил, которые, в свою очередь, зависят от состояния системы. Последнее движение определяется функцией  $\bar{r}_j^{\text{int}}(t)$ , фигурирующей в формуле (1). Математически это выражается в формулировке, при которой общее решение линейного дифференциального уравнения представляется суммой решений однородного и частного неоднородного уравнений. Ко второму типу движения относятся, например, тепловые движения зарядов, которые можно рассматривать как некие хаотические токи, распределенные в среде случайным образом и порождающие электромагнитные волны, а также движение зарядов, вызванное возможными сторонними случайными силами. К этому же типу относится и движение заряда, сопровождающее спонтанный переход элементарного излучателя из верхнего энергетического состояния в нижнее. Общей характеристикой этого типа движения является его случайный характер.

Понятно, что для нахождения функции отклика  $\alpha(\omega)$  для зарядов, содержащихся в этих средах, необходимо использовать квантовомеханический расчет вынужденного движения огромного числа взаимодействующих между собой зарядов в виде электронов и ионных остовов кристалла. Задача оказывается настолько сложной, что ее точное решение не представляется возможным. Тем не менее можно приближенно сформулировать физическую модель для качественного анализа  $\alpha(\omega)$  и, соответственно,  $\varepsilon(\omega)$ . Это модель совокупности гармонических осцилляторов, в которой  $\varepsilon(\omega)$  представляется в следующем виде:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi q_j^2}{m_j} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - 2i\tilde{\gamma}_j\omega - \omega^2}. \quad (4)$$

Суммирование происходит по всем  $j$  осцилляторам в физически малом объеме кристалла с нормировкой результата на этот объем. Каждый из осцилляторов определяется своим зарядом  $q_j$ , массой  $m_j$ , безразмерным (но знакопеременным в зависимости от направления перехода) коэффициентом  $f_j$ , именуемым силой осциллятора, резонансной частотой  $\omega_j$  и постоянной затухания  $\tilde{\gamma}_j$ . В принципе, эти величины могут быть найдены путем расчета в квантовой теории.

Однако в реальности эта формула тоже мало что дает для количественного определения  $\varepsilon(\omega)$  рассматриваемой полупроводниковой среды с необходимой для практики точностью. Тем не менее она позволяет качественно разделить  $\varepsilon(\omega)$  на две части. Дело в том, что не все осцилляторы, дающие вклад в  $\varepsilon(\omega)$ , равнозначны. Выделим из общей суммы (4) те осцилляторы, частоты которых далеки от резонанса с оптическим излучением. Они соответствуют электронным переходам на высокоэнергетические энергетические состояния, в результате чего происходит поглощение в ультрафиолетовой и рентгеновской областях спектра. Вследствие их большого числа именно они формируют показатель преломления среды (реальную часть  $\varepsilon$ ) и небольшое «фоновое» поглощение. Обозначим эту часть диэлектрической проницаемости  $\tilde{\varepsilon}(r, \omega)$ . Другая часть, обозначим ее  $\varepsilon_a(r, \omega, N)$ , создается осцилляторами с резонансными частотами, близкими к частоте внешнего поля. Эта часть имеет соизмеримые (по модулю) реальные и мнимые части, которые зависят от разности населенностей в зоне проводимости и в валентной зоне, поскольку знак  $f_j$  меняется при смене направления элект-

ронного перехода из валентной зоны в зону проводимости или наоборот. Учитывая такое определение,  $\varepsilon_a(r, \omega, N)$  можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_a(r, \omega, N) = \varepsilon_a(r, \omega, N_0) + \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial N}(N - N_0), \quad (5a)$$

$$\varepsilon(r, \omega, N) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon,$$

$$\varepsilon_0(r, \omega, N_0) = \tilde{\varepsilon}(r, \omega) + \varepsilon_a(r, \omega, N_0), \quad (5b)$$

$$\delta\varepsilon(r, \omega, N) = \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial N}(N - N_0).$$

Мнимая часть  $\varepsilon(r, \omega, N)$  представляет собой оптическое поглощение (усиление) в объеме среды, в том числе и то, которое происходит в результате резонансных переходов между зоной проводимости и валентной зоной. Оно зависит от концентрации неравновесных носителей  $N(r)$  (инверсии) в активной области резонатора лазера и отлично от нуля только для  $r \in V_{\text{act}}$ , где  $V_{\text{act}}$  – объем активной области. Эта зависимость представлена в (5) в линеаризованном виде по  $N$ . В дальнейшем в качестве  $N_0$  будем использовать значение, при котором имеет место порог прозрачности среды для заданной частоты  $\omega$ .

Представление  $\varepsilon(r, \omega)$  в виде (5) является довольно типичным для анализа лазеров разного типа, некоторое различие может быть только в интерпретации слагаемых. Например, в твердотельных лазерах под  $\tilde{\varepsilon}(r, \omega)$  понимается диэлектрическая проницаемость матрицы лазерного материала, а под  $\delta\varepsilon$  – добавка, производимая активными ионами.

Конечно, нельзя получить с необходимой точностью количественные значения  $\varepsilon_0(r, \omega)$  и  $\delta\varepsilon(r, \omega, N)$  только из теории. Тем не менее, с использованием независимых экспериментальных данных для различных полупроводниковых сред, а также путем оптических измерений с дополнением их аналитическими расчетами, в ряде случаев возможно определение функций, аппроксимирующих значения  $\varepsilon_0(r, \omega)$  и  $\delta\varepsilon(r, \omega, N)$  с уже приемлемой точностью.

Особенность диодного лазера состоит в том, что  $\varepsilon_0(r, \omega)$  – существенная функция координат. Хотя диод представляет собой единый монокристаллический чип, он, однако, включает в себя большое (иногда сотни и более) число слоев или областей разного химического состава и, следовательно, с разной диэлектрической проницаемостью. Именно пространственное распределение  $\varepsilon_0(r, \omega)$  в подавляющем большинстве случаев формирует очень важные для моделирования количественные параметры диэлектрического резонатора диодного лазера.

Характерные размеры этих слоев резонатора сравнимы с длиной волны или могут быть даже много меньше нее. Это означает, что, с точки зрения единой шкалы электромагнитных волн, постановка и подход к задачам усиления и распространения волн внутри резонатора диода соответствует задачам СВЧ диапазона. И это при том, что частота этих волн соответствует ИК и оптическому диапазонам. Заметим, что для твердотельных и газовых лазеров аналогичные задачи можно решать методами, характерными для физической, а иногда даже и геометрической оптики.

Другая особенность диодного лазера заключается в том, что производная  $\partial\varepsilon/\partial N$  содержит, кроме мнимой величины, пропорциональной сечению стимулированного перехода  $\sigma(\omega)$ , еще и существенную реальную составляющую с коэффициентом  $R$ , т. е.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial N} = -\frac{\sigma(\omega)n_{\text{act}}c}{\omega}(R + i), \quad (6)$$

где  $n_{\text{act}} = \sqrt{\varepsilon_{\text{act}}}$  – показатель преломления активной области, а  $\varepsilon_{\text{act}}$  – ее диэлектрическая проницаемость;  $c$  – скорость света. Физически это означает, что при изменении инверсии в активной среде происходит изменение не только усиления, но и показателя преломления. Качественно это очевидный результат для всех типов лазеров, если учесть, что усиление создается в спектральном диапазоне, который относится к области аномальной дисперсии. Однако для большинства типов лазеров коэффициент  $R$  достаточно мал, и его можно не учитывать. Дело в том, что обычно лазерный рабочий переход можно рассматривать как переход в двухуровневой системе. Поскольку генерация, как правило, происходит в центре спектральной линии, где из-за аномальной дисперсии вносится нулевой вклад в реальную часть восприимчивости, значение  $R$  невелико. В этом случае отличие  $R$  от нуля связано исключительно с отличием лазерного перехода от перехода в идеальной двухуровневой системе. Например, для активной среды Nd:YAG этот коэффициент находится в диапазоне 0.2–1.2 [13]. Совсем по-другому обстоит дело для полупроводниковой активной среды, в которой лазерный переход происходит между двумя энергетическими зонами, каждая из которых имеет квазинепрерывный энергетический спектр, из-за чего спектральная линия усиления–поглощения крайне асимметрична. Кроме того, вклад в реальную часть восприимчивости дают свободные носители заряда, что обусловлено зависимостью плазменной частоты от их концентрации. Этот вклад доходит до 1/3 вклада из-за аномальной дисперсии. В результате коэффициент  $R$  для типичных полупроводниковых сред может находиться в диапазоне 2–6. Широкою известность этот коэффициент приобрел после работы Генри [14] как раз в связи с уширением линии генерации диодного лазера из-за наличия спонтанного излучения. С тех пор он часто в статьях именуется фактором Генри. Справедливости ради заметим, что этот коэффициент был введен и использовался значительно раньше другими авторами (см., напр., [2, 3]), но из-за его малости для газовых и типичных твердотельных лазеров он не был столь востребован, как в случае диодных лазеров.

Заканчивая с определением  $\varepsilon(\omega)$  в виде (5), нельзя оставить без внимания еще одно важное обстоятельство, а именно, линейность отклика системы зарядов среды на внешнее поле, которая была сформулирована вначале как условие для определения  $\varepsilon(\omega)$ . Поэтому в явном виде напряженность поля не входит в выражения для  $\varepsilon(\omega)$ . С другой стороны, хорошо известно, что автоколебательная система – это принципиально нелинейная система, поэтому получить для нее адекватное решение в рамках только линейного подхода нельзя. В этой связи рассмотрим, каким образом интенсивное поле может так изменить состояние среды, что это приведет к изменению функции отклика. Во-первых, заметим, что  $\varepsilon_0(\omega)$  создается осцилляторами, находящимися далеко от резонанса с излучением, поэтому возможное значение нелинейной компоненты в  $\varepsilon_0(\omega)$  достаточно мало, поскольку масштабом является отношение напряженности внешнего поля к напряженности внутриатомных полей. Такая нелинейная восприимчивость характерна для большинства прозрачных сред. В нашем анализе она не играет большой роли, и далее ее опустим, несмотря на то что сама величина

$\varepsilon_0(\omega)$  для типичных полупроводников, как правило, превышает 10.

Совсем другая ситуация складывается с нелинейностью  $\delta\varepsilon$ , поскольку она связана с населенностью рабочих уровней и состоянием поляризации. Корректный анализ динамики поляризации на рабочих переходах крайне сложен. В каком-то виде он возможен путем анализа динамики матрицы плотности, ее диагональных и недиагональных элементов, например, хотя бы в  $\tau$ -приближении. Несмотря на существование многочисленных теоретических работ в этом направлении, трудно ожидать, что модели расчета, принятые в них, полностью исчерпывают всю физику явлений, происходящих в активной области современного диодного лазера. Действительно, типичные концентрации свободных носителей составляют от  $10^{18}$  до единиц на  $10^{19}$  см<sup>-3</sup>. В интерметаллических полупроводниках, которыми являются среды диодных лазеров, и при температурах выше комнатных даже на сто и более градусов такие концентрации соответствуют вырожденному ферми-газу со значительным кулоновским взаимодействием между частицами. Элементы матрицы плотности не факторизуются в виде произведения блоховских функций для одноэлектронных состояний или какой-то другой простой системой функций, соответствующих «чистым» состояниям.

Оценочные расчеты дают для электронного состояния, обусловленного кулоновским взаимодействием, характерное «энергетическое размытие» свыше 10 мэВ, что соответствует характерным временам фазовой релаксации недиагональных элементов (поперечное время релаксации) в фемтосекундном диапазоне (менее  $10^{-13}$  с). Это в какой-то степени подтверждается экспериментальными данными в рштр-probe-измерениях с фемтосекундными оптическими импульсами [15]. Поэтому динамику электронной системы в каждой из энергетических зон можно рассматривать как динамику квазиравновесного ферми-газа, характеризуемого только локальной концентрацией и температурой, если характерные времена превышают  $10^{-13}$  с.

Таким образом, можно быть уверенным, что если амплитуда поля в резонаторе лазера изменяется не быстрее чем за  $10^{-13}$  с, то поляризация среды «успевает забыть» свои предшествующие состояния и квазистатически отслеживает динамику поля. Ее амплитуда пропорциональна произведению амплитуды поля на разность диагональных элементов матрицы плотности. Фазовый сдвиг отклика поляризации относительно амплитуды поля учитывается спектральным форм-фактором, поэтому в случае лазерной системы нет необходимости дополнительно использовать уравнение для поляризации. Комплексная восприимчивость, обусловленная резонансными переходами, а значит и величина  $\delta\varepsilon$ , вполне адекватно описывает динамику взаимодействия поля со средой за счет динамики диагональных элементов матрицы плотности или, с учетом вышесказанного, динамики концентраций носителей в зоне проводимости и валентной зоне.

Это существенно упрощает анализ, поскольку нелинейность лазерной системы, обусловленная насыщением усиления, автоматически неявно учитывается в выражении (5) для  $\delta\varepsilon$  посредством зависимости  $N$  от интенсивности электромагнитной волны. Ниже, для упрощенной модели активной области, эта зависимость будет найдена из уравнения баланса носителей.

### 3. Баланс носителей в активной области лазера

Типичная геометрия активной области современного диодного лазера, как правило, представляет собой плоский слой толщиной  $d$  (от нескольких нанометров до 100 м), по нормали к которому происходит инжекция носителей. Уравнение баланса для носителей имеет вид

$$\frac{\partial N(r, t)}{\partial t} = \frac{J(r)}{ed} - \frac{N(r, t)}{\tau} + \frac{\omega \operatorname{Im}(\delta\epsilon) \bar{E}^2(r, t)}{4\pi\hbar\omega} - \mathcal{D}\Delta N(r, t). \quad (7)$$

Здесь  $J$  – распределение плотности тока;  $e$  – заряд электрона;  $\tau$  – время спонтанной рекомбинации;  $\bar{E}^2$  – среднее (за период оптического колебания) от квадрата напряженности электрического поля;  $\hbar\omega$  – энергия электронного перехода из зоны проводимости в валентную зону. Процессы биполярной диффузии электронов учтены последним членом в (7), пропорциональным коэффициенту  $\mathcal{D}$ . Поскольку длина диффузии обычно много больше толщины активного слоя, то диффузия электронов в направлении  $x$ , перпендикулярном слою, полностью выравнивает концентрацию. В связи с этим диффузию для направления  $x$  можно не рассматривать, считая с большой точностью концентрацию не зависящей от этой координаты. Что касается двух других направлений вдоль слоя ( $y$  и  $z$ ), то ситуация здесь несколько сложнее. Для такого случая можно решить задачу в виде двумерного (а для диодов, излучающих вдоль слоя  $d$ , – одномерного) уравнения (7) и тем самым найти пространственное распределение носителей. Далее будем считать, что пространственное распределение электронов  $N(r)$  для стационарного случая нам уже известно путем решения (7) и имеет вид

$$N(r) = Nf(r),$$

характеризуемый безразмерной функцией  $f(r)$ , которая определяется конструкцией лазера и в силу ряда обстоятельств, характерных для рассматриваемых диодных лазеров, слабо изменяется при вариации тока накачки  $J$ . Поэтому далее будем считать, что  $f(r)$  сохраняет свой вид при изменении тока накачки, в том числе и выше порогового значения, и нормирована на единицу в максимуме, который находится в начале координат, т.е.  $f(0) = 1$ . Заметим, что это очень жесткое требование (предположение), которое чрезвычайно редко выполняется на практике. Оно накладывает условие на пространственное распределение накачки  $J(r)$  и пространственное распределение  $\bar{E}^2$ . Это вполне соответствует хорошо известному факту: диодные лазеры, например с резонатором Фабри – Перо, крайне редко работают в одночастотном режиме генерации при сколь-нибудь существенном превышении порога.

Представим амплитуду поля в факторизованном виде:

$$E(r, t) = \frac{1}{2}[\mathcal{E}(t)\bar{u}(r) + \text{c.c.}], \quad (8)$$

где  $\mathcal{E}(t) = A(t)\exp(-i\omega t)$ ;  $\bar{u}(r)$  – комплексная безразмерная вектор-функция, нормированная по модулю на единицу в начале координат, т.е.  $\langle \bar{u}(0)\bar{u}^*(0) \rangle = 1$ ;  $A(t)$  – «медленная» амплитуда поля.

Для квазистационарного случая, когда  $A(t)$  изменяется существенно медленнее, чем  $\tau^{-1}$ , производной  $\partial N/\partial t$  в

(7) можно пренебречь, и тогда для  $N$  с учетом (5), (6) можно записать

$$N(t, r) = N_{\text{tr}}f(r)\left(1 + \frac{p}{1 + |\mathcal{E}|^2/E_s^2}\right). \quad (9)$$

Здесь

$$p = \frac{J - J_{\text{tr}}}{J_{\text{tr}}}; J_{\text{tr}} = \frac{eN_{\text{tr}}V_{\text{act}}}{\tau}; N_{\text{tr}} = \frac{N_0V_m}{V_{\text{mc}}}; E_s^2 = \frac{8\pi\hbar\omega V_{\text{act}}}{\tau\sigma n_{\text{act}}cV_{\text{mc}}};$$

$$V_{\text{mc}} = \int \langle \bar{u}(r)\bar{u}^*(r) \rangle f(r) dV; V_m = \int \langle \bar{u}(r)\bar{u}^*(r) \rangle dV;$$

$$V_{\text{act}} = \int f(r) dV.$$

Эти обозначения появились в результате усреднения основных величин по объему активной области путем интегрирования по пространству уравнения баланса (7). Они имеют следующий физический смысл:  $p$  – относительное превышение тока накачки тока  $J$  над током прозрачности  $J_{\text{tr}}$ ;  $N_{\text{tr}}$  – усредненная концентрация прозрачности;  $E_s^2$  – величина, пропорциональная интенсивности насыщения;  $V_{\text{act}}$ ,  $V_m$  и  $V_{\text{mc}}$  – эффективные объемы: активной области, занятой модой и перекрытия поля и носителей. С учетом введенных выше величин выражение (5b) для  $\delta\epsilon$  можно записать как

$$\delta\epsilon \approx -\frac{cn_{\text{act}}}{\omega} G(R + i) \left( \frac{f(r)p}{1 + |\mathcal{E}|^2/E_s^2} \right), \quad (10)$$

где  $G = V_m\sigma(\omega)N_0/V_{\text{mc}}$  – ненасыщенное материальное усиление (в  $\text{см}^{-1}$ ) активной области. В равенстве (10) использовано то обстоятельство, что усредненное выражение

$$\int \langle \bar{u}(r)\bar{u}^*(r) \rangle [N_{\text{tr}}(r) - N_0] dV$$

равно нулю в соответствии с определением  $N_{\text{tr}}(r)$ . Теперь имеются все необходимые величины, чтобы записать уравнение для амплитуды моды.

### 4. Уравнение для амплитуды моды резонатора диодного лазера в отсутствие источников спонтанного излучения

Для того чтобы стационарное поле вида (8) удовлетворяло уравнениям Максвелла в резонаторе, необходимо, чтобы  $\bar{u}(r)$  удовлетворяло уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\bar{u}_k(r)) = \frac{\tilde{\omega}_k^2}{c^2}\epsilon_0(r, \omega_k, N_0)\bar{u}_k(r), \quad (11)$$

где  $\tilde{\omega}_k = \omega_k - i\gamma_k$ , и граничным условиям на поверхности  $S$ , внутри которой содержится резонатор. Эту поверхность условно можно разделить на две. Одна из них –  $S_0$ , на которой напряженности электрического и магнитного полей равны нулю, другая –  $S$ , через которую резонатор связан с внешней средой. Уравнение (11) определяет набор собственных мод  $\bar{u}_k(r)$  и комплексных собственных частот  $\tilde{\omega}_k$  диэлектрического резонатора. Таким образом, резонатор полностью определяется заданием  $\epsilon(r, \omega, N)$  для

конкретного типа лазерного диода. Например, это могут быть диоды с выходом излучения через боковую грань или поверхностно излучающие диоды. Очевидно, что нахождение решения уравнения (11) возможно только для конкретного вида  $\varepsilon(r, \omega, N)$ . Будем исходить из того, что  $\tilde{u}_k(r)$  и  $\tilde{\omega}_k$  нам уже известны в результате решения (11) как отдельной задачи электродинамики. Надо отметить, что не для всякой функции  $\varepsilon(r, \omega, N)$  существует нетривиальное решение (11), поэтому для анализа характеристик таких резонаторов целесообразно использовать описанный в [16] подход с введением в анализ некоего «эквивалентного» резонатора. Подход основан на том, что при переходе в комплексную плоскость частоты  $\omega$  и нахождении соответствующей  $\gamma$  реальной резонатор можно заменить эквивалентным резонатором, у которого поля на всей внешней поверхности  $S$  равны нулю.

Далее будем полагать, что найденная таким образом собственная функция  $\tilde{u}_k(r)$  слабо изменяется при изменении концентрации  $N$ . Таким образом, равенство (11) можно рассматривать как некоторый инвариант для выделенной моды. Вначале рассмотрим поле одной моды, у которой частота  $\omega_c$  близка к спектральному максимуму усиления  $G(\omega)$ . Для этой моды уравнения Максвелла приводят к уравнению

$$\frac{\partial^2 D(r, t)}{\partial t^2} + (\omega_c - i\gamma_c)^2 \varepsilon_0(r, \omega_c, N_0) \mathcal{E}(t) \tilde{u}_c(r) = 0, \quad (12)$$

где  $\omega_c$  – резонансная частота резонатора;  $\gamma_c$  – постоянная затухания поля в резонаторе, зависящая от оптических потерь как в объеме резонатора, так и при выходе из него излучения. Далее представим  $\varepsilon(r, \omega, N)$  как функцию частоты в линеаризованном виде в окрестности частоты  $\omega_c$ :

$$\varepsilon(r, \omega) = \varepsilon_0(r, \omega_c, N_0) + \delta\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \omega} (\omega - \omega_c). \quad (13)$$

Выполнив стандартные операции для электрической индукции с учетом (10), (13), получим

$$\frac{\partial^2 D(r, t)}{\partial t^2} = \left\{ \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - \omega_c \left[ p \frac{f(r) c n_{\text{акт}} G (1 - iR)}{\omega_c (1 + |\mathcal{E}(t)|^2 / E_s^2)} + i\Delta\varepsilon \right] \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \Delta\varepsilon \omega_c^2 \mathcal{E}(t) \right\} \tilde{u}_c(r). \quad (14)$$

Здесь использовано соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} (\omega - \omega_c) \mathcal{E}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ & \approx -i\omega_c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial t} + i\omega_c \mathcal{E}(t) \right], \end{aligned}$$

а  $\Delta\varepsilon = \omega_c (\partial \varepsilon / \partial \omega)$  – величина, определяющая дисперсию. Заметим, что индукция  $D(r, t)$  определяется в соответствии с (3), так что в поляризации отсутствуют слагаемые, связанные с собственным движением зарядов ( $\sim q_j r_j^{\text{инт}}(t)$ ). Далее, подставляя (14) в уравнение (12) и составляя скалярное произведение с  $\tilde{u}_c(r)$ , а затем интегрируя по объему резонатора, получаем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} + \left\{ 2\gamma_c \left[ 1 - p \frac{\tilde{\gamma}(1 - i\tilde{R})}{\gamma_c (1 + |\mathcal{E}(t)|^2 / E_s^2)} \right] - i\omega_c \Delta\tilde{\varepsilon} \right\} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} +$$

$$+ \omega_c^2 (1 + \Delta\tilde{\varepsilon}) \mathcal{E}(t) = 0, \quad (15)$$

где безразмерный параметр  $\Delta\tilde{\varepsilon}$  характеризует общую дисперсию резонатора, а  $\tilde{\gamma}$  – эффективное (усредненное) усиление в резонаторе. Они находятся при известных  $\tilde{u}_c(r)$  и  $\gamma_c$ , найденных при решении уравнения (11), согласно формулам

$$\tilde{\gamma} = \frac{c n_{\text{акт}} G \tilde{I}}{2},$$

$$\tilde{I} = \text{Re} \left[ \frac{1}{U} \int_V (1 - iR) f(r) \langle \tilde{u}_c \tilde{u}_c \rangle dV \right],$$

$$U = \int_V \varepsilon_0(\omega_c, N_0, r) \langle \tilde{u}_c(r) \tilde{u}_c(r) \rangle dV,$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon} \approx \left| \frac{1}{U} \int_V \Delta\varepsilon(r) \langle \tilde{u}_c \tilde{u}_c \rangle dV \right|,$$

$$\tilde{R} = - \text{Im} \left[ \frac{1}{U \tilde{I}} \int_V (1 - iR) f(r) \langle \tilde{u}_c \tilde{u}_c \rangle dV \right].$$

Здесь безразмерные  $\tilde{I}$  и  $\tilde{R}$  – аналоги фактора оптического ограничения и коэффициента амплитудно-фазовой связи с учетом комплексности  $U$  – нормы для собственной функции  $\tilde{u}_c(r)$ . Угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Уравнение (15) представляет собой уравнение для гармонического нелинейного осциллятора с малым параметром  $\tilde{\gamma}$  и относится к хорошо изученным в теории колебаний уравнениям для автоколебательных систем типа Ван дер Поля. Малый параметр  $\tilde{\gamma}$  присутствует в виде множителя при нелинейном члене  $\sim (1 + |\mathcal{E}|^2 / E_s^2)^{-1}$ , физический смысл которого в данном случае заключается в насыщении усиления с ростом среднего квадрата амплитуды колебаний  $|\mathcal{E}|^2$ .

Общий анализ уравнений такого типа развит еще в первой половине прошлого века. Для этого используется, например, метод Ван дер Поля или метод Пуанкаре (см., напр., [17]). Поэтому здесь мы ограничимся только известными результатами. В данном случае все решения характеризуются двумя предельными циклами. При уровне накачки  $p < p_{\text{th}} = \gamma_c / \tilde{\gamma}$  существует один устойчивый предельный цикл, который вырождается в точку  $\mathcal{E} = 0$ . При  $p > p_{\text{th}}$  эта точка становится неустойчивой рабочей точкой, а устойчивым предельным циклом является окружность на плоскости Ван дер Поля с радиусом  $A_0 = E_s \sqrt{2(p - p_{\text{th}}) / p_{\text{th}}}$ . Таким образом, порогом возбуждения генерации является уровень накачки  $p = p_{\text{th}}$ . Из уравнения (15) следует, что для параметров предельного цикла  $|\mathcal{E}| = A_0$  и  $\omega_0$  выполняются равенства

$$p_{\text{th}} = \gamma_c / \tilde{\gamma},$$

$$\omega_0^2 - \omega_0 (2\gamma_c \tilde{R} - \Delta\tilde{\varepsilon} \omega_c) - \omega_c^2 (1 + \Delta\tilde{\varepsilon}) = 0, \quad (16)$$

$$2\gamma_c - 2\tilde{\gamma} p \frac{1 - i\tilde{R}}{1 + |\mathcal{E}|^2 / E_s^2} = 2i\gamma_c \tilde{R}.$$

Они отражают тот факт, что насыщенное усиление  $2\tilde{\gamma} \times (1 + |\mathcal{E}|^2 / E_s^2)^{-1}$  за порогом генерации точно равно потерям  $2\gamma_c$ , а частота  $\omega_0 = \omega_c + \Delta\omega$  отличается от резонансной частоты  $\omega_c$  «холодного» резонатора на  $\Delta\omega \approx \gamma_c \tilde{R} \times (1 + \Delta\tilde{\varepsilon} / 2)^{-1}$  из-за изменения показателя преломления сре-

ды резонатора за счет носителей при достижении порога генерации. Насыщение усиления за порогом генерации автоматически означает и постоянство концентрации электронов на пороговом уровне  $N_{th} = N_{tr}(p_{th} + 1)$ , а пороговый ток накачки  $J_{th} = eN_{th}V_{act}/\tau$ .

Таким образом, все возможные решения уравнения (15), вне зависимости от начальных условий  $|\mathcal{E}| > A_0$  или  $|\mathcal{E}| < A_0$ , стремятся к виду

$$\mathcal{E}(t) = A_0 \exp(-i\omega_0 t + \varphi), \quad (17)$$

где  $A_0 = E_s \sqrt{2(p - p_{th})/p_{th}}$ ;  $\omega_0 \approx \omega_c + \gamma_c \tilde{R}(1 - \Delta\tilde{\epsilon}/2)$ . Он соответствует генерации идеально монохроматического колебания с амплитудой  $A_0$  и, соответственно, с выходной мощностью генерации  $\sim A_0^2$ , линейно зависящей от уровня  $p$  накачки за порогом генерации.

Важным обстоятельством полученного решения  $\mathcal{E}(t) = A_0 \exp(-i\omega_0 t + \varphi)$  служит тот факт, что это решение не требует и не содержит никаких сторонних источников поля, например тех, которые создают спонтанное излучение. Это принципиальным образом отличает (17) от решений, приведенных в [7–9] и других работах, основанных на подходе «асимптотического порога генерации».

## 5. Уравнение для амплитуды моды резонатора диодного лазера с учетом источников спонтанного излучения

Далее включим в выражение для  $D(t)$  добавочный член в поляризацию, обусловленный собственным движением зарядов, не связанным с вынуждающим полем  $E(\omega)$ , который в (14) был проигнорирован. В результате уравнение для моды (12) трансформируется в уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \bar{D}(r, t)}{\partial t^2} + (\omega_c - i\gamma_c)^2 \epsilon_0(r, \omega_c, N_0) \mathcal{E}(t) \bar{u}_c(r) = -4\pi \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{P}}^{int}}{\partial t^2}. \quad (18)$$

Представим  $\bar{\mathcal{P}}^{int}$  в виде

$$\bar{\mathcal{P}}^{int}(r) = \frac{1}{v(r)} \sum_{j \in v} q_j \bar{r}_j^{int}(t) = \frac{1}{v(r)} \sum_j \bar{d}_j(t),$$

где  $\bar{d}_j(t) = e_j d_j(t) \exp(-i\omega_0 t)$ .

В правой части уравнения для моды (18) теперь появился вектор «случайной» силы (ланжевеновский источник). Он обусловлен ускоренным движением зарядов, представляющим собой квазипериодические и некоррелированные друг с другом колебания диполей в физически малом объеме  $v(r)$  с центром в точке  $r$ . Каждый из этих диполей описывается своей случайной функцией  $d_j(t)$  и единичным вектором  $e_j$ . Это, очевидно, приведет к тому, что основные характеристики лазерной генерации, такие как амплитуда поля  $\mathcal{E}(t)$ , концентрация  $N(t)$  и фаза  $\varphi(t)$ , теперь тоже станут случайными функциями времени.

Существуют разные методы решения задач, содержащих случайные величины. Здесь мы воспользуемся одним из них, основанным на использовании стохастических уравнений с линеаризацией нелинейных членов в окрестности их средних «рабочих» значений. В работе [18] он применен для исследования тонкой структуры оптического спектра одночастотного диодного лазера при различных флуктуациях параметров резонатора, в том числе

температуры и плотности среды. Такой метод справедлив, когда амплитуды флуктуаций малы по сравнению с их соответствующими величинами в отсутствие источников флуктуаций. В нашем случае это означает, что превышение тока накачки над порогом не слишком мало. Дальнейший анализ выполним с учетом этого условия.

Используя найденные выше решения (17) однородного уравнения (15), представим амплитуду поля  $\mathcal{E}(t)$  и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  для неоднородного уравнения (18) в следующем виде:

$$\mathcal{E}(t) = A(t) \exp(-i\omega_0 t),$$

$$A(t) = A_0 [1 + a(t)] \exp[-i\varphi(t)], \quad (19)$$

$$N(r, t) = N_{th}(r) [1 + \tilde{n}(t)],$$

$$\epsilon(r, \omega, N) = \epsilon(r, \omega, N_{th}) + \delta\tilde{\epsilon}, \quad (20)$$

где

$$\delta\tilde{\epsilon} = -\frac{cn_{act}\sigma N_{th}}{\omega} (R + i)f(r)\tilde{n}(t);$$

$a(t)$  и  $\varphi(t)$  – реальные функции, представляющие собой флуктуации амплитуды и фазы поля, а реальная и безразмерная функция  $\tilde{n}(t)$  – флуктуации концентрации электронов. Все эти флуктуации являются динамическим откликом лазерной системы на случайную силу, представленную правой частью уравнения (18).

Подставив выражения (19), (20) для  $\mathcal{E}(t)$  и  $\epsilon(r, \omega, N)$  в уравнение (18), а затем проведя операции, аналогичные выполненным в разд.4, а именно, скалярное умножение на  $\bar{u}_c(r)$  и интегрирование по объему, получим укороченное уравнение для амплитуды  $A(t)$ :

$$\frac{dA}{dt} - \Omega_0 \tilde{n}(1 - i\tilde{R})A = \frac{2\pi i \omega_0}{U(1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2)} \sum_j^{r_j \in V_{act}} d_j(t) \langle e_j \bar{u}_c(r) \rangle, \quad (21)$$

где частота  $\Omega_0 = \tilde{\gamma}/(1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2)$  характеризует обратное время нарастания поля в резонаторе. При выводе (21) использовано следующее из уравнения (11) соотношение

$$(\omega_c - i\gamma_c)^2 \int \langle \bar{u}_c \bar{u}_c \rangle \epsilon(\omega_c N_{tr}, r) dV = \omega_0^2 \int \langle \bar{u}_c \bar{u}_c \rangle \epsilon(\omega_0, N_{th}, r) dV.$$

Подставив выражения для амплитуды поля (19) в уравнения (7) и (21), получим систему уравнений для флуктуаций амплитуды  $a(t)$ , относительной концентрации электронов  $\tilde{n}(t)$  и «мгновенной» девиации частоты  $\nu = d\varphi/dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} - \Omega_0 \tilde{n} &= F(t), \quad F(t) = i\xi \sum_j^{r_j \in V_{act}} d_j(t) \langle e_j \bar{u}_c(r) \rangle + \text{с.с.}, \\ \Omega_0 R \tilde{n} - \nu &= \Phi(t), \quad \Phi(t) = \xi \sum_j^{r_j \in V_{act}} d_j(t) \langle e_j \bar{u}_c(r) \rangle + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\tau \frac{d\tilde{n}}{dt} + \tilde{n}(1 + \theta\eta) + 2a\eta = h(t), \quad \theta = \frac{N_{th}}{N_{th} - N_{tr}} = \frac{1 + p_{th}}{p_{th}},$$

$$\xi \approx \frac{\pi\omega_0}{A_0 U(1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2)}.$$

Безразмерная величина  $\theta$  характеризует разницу между порогом прозрачности активной среды и порогом генерации.

В уравнение для флуктуаций концентрации электронов введен дополнительный ланжевеновский источник возможных флуктуаций  $h(t)$ , вызванный флуктуациями  $\delta J(t)$  тока накачки  $J = \bar{J} + \delta J(t)$ , где  $\bar{J}$  – среднее значение тока, например за счет «дробового» шума:

$$\delta J(t) = J_{\text{th}} h(t).$$

Система уравнений (22) легко решается путем фурье-разложения функций времени  $a(t)$ ,  $\tilde{n}(t)$ ,  $v(t)$  и результат представляется через  $F(\Omega)$ ,  $\Phi(\Omega)$  и  $h(\Omega)$  – фурье-образы функций  $F(t)$ ,  $\Phi(t)$  и  $h(t)$ :

$$F(t) = \int_{-\Delta}^{\Delta} F(\Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega,$$

$$\Phi(t) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \Phi(\Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega,$$

$$h(t) = \int h(\Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega, \quad \Omega = \omega - \omega_0.$$

Пределы интегрирования  $\Delta$  выберем такими, чтобы захватить физически значимый спектр частот. В частности для  $F(\Omega)$  и  $\Phi(\Omega)$  он определяется как  $\Delta \geq \Delta\omega_{\text{sp}}$ , где  $\Delta\omega_{\text{sp}}$  – ширина линии спонтанного излучения. Далее в анализе наряду с  $\omega_0$  используется «медленная» частота  $\Omega$ .

Медленную динамику отдельного диполя  $d_j(t)$  тоже представим в виде фурье-интеграла:

$$d_j(t) = \int_{-\Delta}^{\Delta} d_j(\omega_0 + \Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega.$$

Тогда для  $F(\Omega)$  и  $\Phi(\Omega)$  получим

$$F(\Omega, r) = i\xi \sum_j^{r_j \in V_{\text{act}}} d_j(\omega_0 + \Omega) \langle e_j \bar{u}_c(r) \rangle$$

$$- i\xi^* \sum_j^{r_j \in V_{\text{act}}} d_j^*(\omega_0 - \Omega) \langle e_j \bar{u}_c^*(r) \rangle,$$

$$\Phi(\Omega, r) = \xi \sum_j^{r_j \in V_{\text{act}}} d_j(\omega_0 + \Omega) \langle e_j \bar{u}_c(r) \rangle$$

$$+ \xi^* \sum_j^{r_j \in V_{\text{act}}} d_j^*(\omega_0 - \Omega) \langle e_j \bar{u}_c^*(r) \rangle.$$

В результате решения линеаризованной системы (22) находятся спектральные плотности флуктуации амплитуды поля  $g_a(\Omega)$ , концентрации  $g_n(\Omega)$  и частоты  $g_v(\Omega)$ . Все они связаны с соответствующими амплитудами следующим стандартным для стационарных процессов образом:

$$\overline{a(\Omega) a^*(\Omega')} = g_a(\Omega) \delta(\Omega - \Omega'),$$

$$\overline{\tilde{n}(\Omega) \tilde{n}^*(\Omega')} = g_n(\Omega) \delta(\Omega - \Omega'), \quad (23)$$

$$\overline{v(\Omega) v^*(\Omega')} = g_v(\Omega) \delta(\Omega - \Omega').$$

При нахождении спектральной плотности осцилляций диполей  $d_j(t)$  считаем, что они статистически независимы, поэтому справедливы равенства

$$\overline{d_j(\omega) d_i(\omega')} = g_d(\omega) \delta_{j,i} \delta(\omega - \omega'), \quad (24)$$

$$\overline{|d_j(t)|^2} = \frac{d_0^2}{2} = \int_{-\Delta}^{\Delta} g_d(\omega_0 + \Omega) d\Omega.$$

Здесь  $\delta_{j,i}$  – символ Кронекера;  $d_0$  – амплитуда колебания диполя. В итоге основные характеристики флуктуаций выражаются через  $g_d(\omega)$  – спектральную плотность источников спонтанного излучения. В свою очередь,  $g_d(\omega)$  можно найти, если известны  $d_0^2$  и  $\rho(\omega)$  – форм-фактор линии спонтанного излучения. Амплитуду  $d_0$  можно найти прямым расчетом соответствующего матричного элемента, но более простой и удобный способ заключается в использовании принципа соответствия между классической и квантовой теориями для мощности излучения диполя. В классической теории мощность  $P = \omega_0^4 n_{\text{act}} d_0^2 / (3c^3)$ , в квантовой теории  $P = \hbar \omega_0 / \tau$ ; отсюда получим  $d_0^2 = 3c^3 \hbar \times (\omega_0^3 n_{\text{act}} \tau)^{-1}$ .

Что касается форм-фактора линии спонтанного излучения, то, если его представить безразмерной функцией  $\rho(\omega) \equiv \rho(\omega_0 + \Omega)$ , нормированной на единицу в спектральном максимуме, получим

$$g_d(\omega_0 + \Omega) = \rho(\omega_0 + \Omega) \frac{3c^3 \hbar}{2\omega_0^3 n_{\text{act}} \tau \Delta \omega_{\text{sp}}}, \quad (25)$$

где

$$\Delta \omega_{\text{sp}} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \rho(\omega_0 + \Omega) d\Omega.$$

Таким образом, используя выражение для  $g_d(\omega_0 + \Omega)$ , а также решения системы (22) для амплитуд флуктуаций, окончательно получим следующие выражения для спектральных плотностей этих флуктуаций:

$$g_a(\Omega) = \beta N \frac{\hbar \omega_0}{2A_0^2 |U| (1 + \Delta \tilde{\epsilon} / 2) \tau} [Q_a(\Omega) + Q_a(-\Omega)] + H_a(\Omega), \quad (26a)$$

$$g_n(\Omega) = \beta N \frac{2\hbar \omega_0 \eta^2 [\rho(\omega_0 + \Omega) + \rho(\omega_0 - \Omega)]}{A_0^2 |U| (1 + \Delta \tilde{\epsilon} / 2) \tau^3 [(\Omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \gamma)^2]} + H_n, \quad (26b)$$

$$g_v(\Omega) = \beta N \frac{\hbar \omega_0 [Q_v(\Omega) + Q_v(-\Omega)]}{2A_0^2 |U| (1 + \Delta \tilde{\epsilon} / 2) \tau} + H_v. \quad (26b)$$

Здесь

$$N = N_{\text{th}} V_{\text{act}}; \quad Q_a(\Omega) = \frac{(\Omega^2 + \gamma^2) \rho(\omega_0 + \Omega)}{(\Omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \gamma)^2};$$

$$H_a(\Omega) = \frac{(\Omega_0 A_0)^2}{\tau^2 [(\Omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \gamma)^2]} g_h(\Omega);$$

$$H_n = \frac{\Omega^2 g_h(\Omega)}{\tau^2 [(\Omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \gamma)^2]}; \quad \Omega_1^2 = \frac{2\eta \Omega_0}{\tau}; \quad \eta = \frac{J - J_{\text{th}}}{J_{\text{th}}};$$

$$Q_v = \rho(\omega_0 + \Omega) \frac{(\Omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega_1^2 \tilde{R} - \Omega \gamma)^2}{(\Omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \gamma)^2};$$

$$H_v = \frac{(\Omega_0 \tilde{R})^2}{\tau^2 [(\Omega_1^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \gamma)^2]} g_h(\Omega); \quad \gamma = \frac{1 + \theta \eta}{\tau};$$

$$\beta = \frac{3\pi^2 c^3 \int f(r) \langle \bar{u}^*(r) \bar{u}(r) \rangle \zeta(r) dV}{|U| (1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2) n_{\text{act}} \omega_0^2 \Delta\omega_{\text{sp}} \int f(r) dV}$$

– безразмерный коэффициент;

$$\zeta = \frac{\langle \mathbf{e}_j \bar{u}_c^*(r) \rangle \langle \mathbf{e}_j \bar{u}_c(r) \rangle}{\langle \bar{u}_c^* \bar{u}_c \rangle}.$$

Спектральная плотность флуктуаций тока  $g_h(\Omega)$  определяется выражением

$$\overline{h(\Omega)h^*(\Omega')} = g_h(\Omega)\delta(\Omega - \Omega').$$

Величина  $\zeta(r)$  учитывает возможную анизотропию дипольного момента (например, за счет квантоворазмерного эффекта) в активной области. Для изотропного случая  $\zeta = 1/3$ . Фактор  $\beta$  можно интерпретировать как фактор, характеризующий долю спонтанного излучения, которое попадает в моду резонатора лазера. Заметим, что в предельном случае однородной и изотропной среды с характерными геометрическими размерами резонатора, много большими длины волны, этот фактор стремится к величине, обратной занимаемому полем электромагнитной волны фазовому объему, т. е. к часто используемому выражению в виде  $\Delta^3 k V / (2\pi)^3$  – числу мод с длиной волны. Когда размеры резонатора соизмеримы с длиной волны, определение этого фактора уже не столь просто и универсально. В наших расчетах он появился автоматически при последовательном решении электродинамической задачи. Везде выше  $\beta$  присутствует одновременно с множителем  $N$ , которым обозначено полное число электронов в активной области. Это соответствует их физическому смыслу относительно действия спонтанного излучения в виде равенств (26).

Таким образом, выражения (26) для спектральной плотности флуктуаций амплитуды, концентрации электронов и частоты позволяют достаточно полно охарактеризовать шумы диодного лазера, связанные со спонтанным излучением и стационарными случайными флуктуациями тока накачки.

На примере диодного лазера с вертикальным резонатором на рис.1 представлены спектральные плотности флуктуаций, рассчитанные по полученным формулам (26). Расчет выполнен для параметров, близких по значению к параметрам, полученным в работах [19, 20] для лазера с вертикальным резонатором. Конкретные значения составили:

$$\beta = \frac{\pi^2 \mu K}{V_p n n^* n_{\text{act}}} \left(\frac{c}{\omega_0}\right)^3 = 5 \times 10^{-4}; \quad n = 3.5; \quad n^* = 3.8;$$

$$n_{\text{act}} = 3.6; \quad \omega_0 = 2\pi c/\lambda; \quad \lambda = 0.85 \text{ мкм};$$

$$V_p = (1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2) \left| \int \langle \bar{u}(r) \bar{u}(r) \rangle \varepsilon_0(r) dV \left[ n n^* \langle \bar{u}^*(0) \bar{u}(0) \rangle \right]^{-1} \right.$$

– эффективный объем резонатора;

$$\mu = 3 \int \zeta(r) f(r) \langle \bar{u}^*(r) \bar{u}(r) \rangle dV \left[ \langle \bar{u}^*(0) \bar{u}(0) \rangle \int f(r) dV \right]^{-1} = 0.4;$$

$$K = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\text{sp}}} = 30; \quad \frac{A_0^2 |U| (1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2)}{8\pi} = \frac{P_{\text{las}}}{2\Omega_0 \kappa}$$

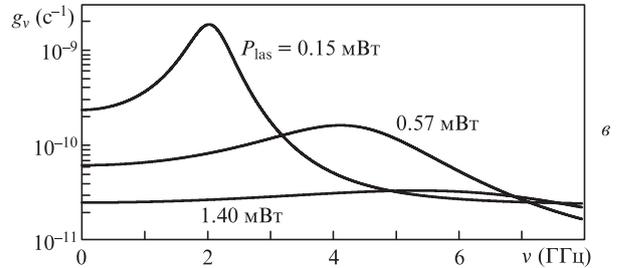
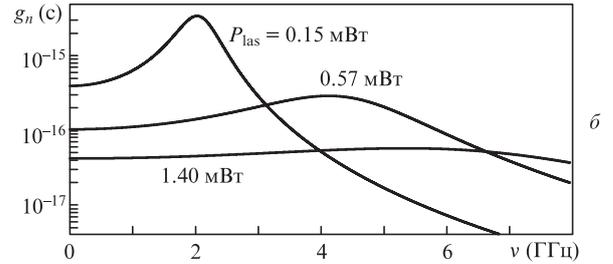
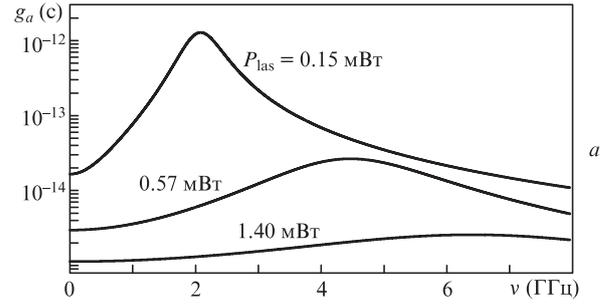


Рис.1. Спектры флуктуаций нормированной к амплитуде генерации  $A_0$  амплитуды лазерного излучения (а), нормированной к пороговому значению концентрации (б) и флуктуации частоты генерации (в).

– энергия, запасенная в резонаторе;  $\Omega_0 = 250 \times 10^9$  рад/с;  $\theta = 10$ ;  $\tau = 1$  нс;  $\kappa = 0.34$  – безразмерная (в единицах Вт/Вт) эффективность генерации;  $\tilde{R} = 3$ ; мощность спонтанного излучения  $P = N\hbar\omega/t = I_{\text{th}}\hbar\omega/e = 0.37 \text{ мА} \cdot 1.45 \text{ В} = 0.54 \text{ мВт}$ .

Следует учесть еще дополнительную информацию о характере источника шумов, а именно информацию о флуктуациях, возникающих в результате суммирования огромного числа «мелких» независимых случайных толчков. Другими словами, в силу теоремы Муавра–Лапласа, они характеризуются нормальным законом распределения. Это означает, что и флуктуации амплитуды  $a(t)$ , концентрации носителей  $\tilde{n}(t)$  и набег фазы (приращение фазы за конечный интервал времени) имеют тоже нормальный закон распределения со среднеквадратичным отклонением, задаваемым интегралом от соответствующей спектральной плотности в виде равенств (26).

Спектр флуктуаций частоты  $g_v(\Omega)$  позволяет найти  $S(\omega_0 + \Omega)$  – оптический спектр излучения одночастотного лазера, обусловленный присутствием спонтанного излучения. Согласно [21], в пренебрежении флуктуациями амплитуды колебаний  $a(t)$  получим

$$S(\omega_0 + \Omega) \approx \frac{A_0^2}{2} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\mathcal{F}(t)}{2}\right] \cos(\Omega t) dt, \quad (27)$$

где функция

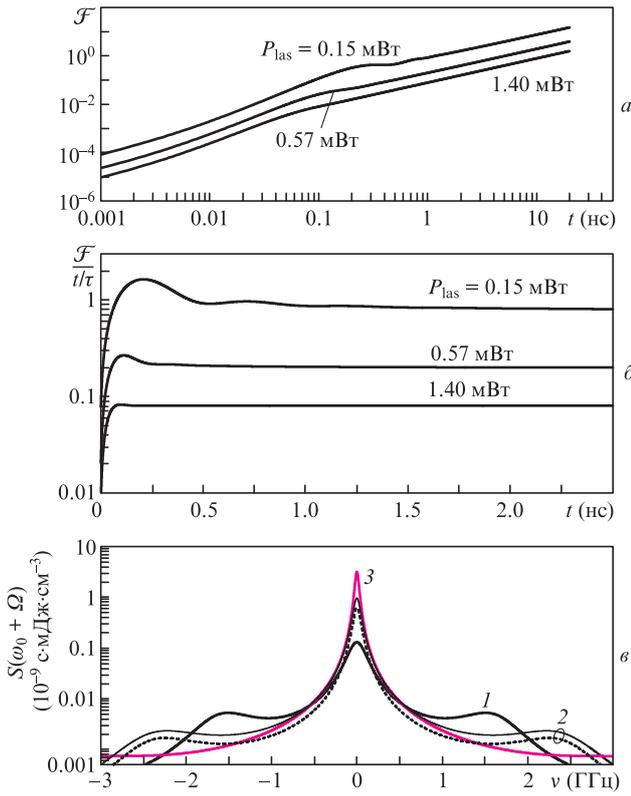


Рис.2. Среднеквадратичная диффузия во времени фазы  $\mathcal{F}$  (а), эффективный коэффициент диффузии фазы  $\mathcal{F}(t/\tau)^{-1}$  (б) и оптический спектр генерации  $S(\omega_0 + \Omega)$  при разных значениях выходной мощности лазера и полуширин линии генерации:  $P_{\text{las}} = 0.075$  мВт,  $\Delta\nu_{0,5} = 241.9$  МГц (1);  $0.19$  мВт,  $92.7$  МГц (2) и  $0.34$  мВт,  $52.2$  МГц (3) (в);  $\nu = \Omega/2\pi$ . Штриховой кривой показан спектр, рассчитанный по формуле (28). Параметры расчета те же, что и для рис. 1.

$$\mathcal{F}(t) = \varphi^2(t) - \varphi^2(0) \approx 2 \int_0^\infty g_v(\Omega) \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} d\Omega$$

характеризует диффузию во времени фазы лазерных колебаний (точность хода «часов» осциллятора). На примере диодного лазера с вертикальным резонатором на рис.2 показаны диффузия фазы  $\mathcal{F}(t)$  и оптический спектр  $S(\omega_0 + \Omega)$ . Видно, что с увеличением мощности лазерной генерации амплитуды флуктуаций уменьшаются и растет резонансная частота. Это результат стабилизирующего действия лазерного излучения вследствие повышения устойчивости рабочей точки лазерной генерации и увеличения быстродействия отклика лазерной системы за счет сокращения времени «стимулированных» переходов. При достаточно больших  $t$  функция  $\mathcal{F}(t)$  пропорциональна  $t$ , что подтверждает диффузионный характер движения фазы. Численный расчет по формуле (27) показывает, что  $S(\omega_0 + \Omega)$  с хорошей точностью аппроксимируется простым выражением из работы [12, с. 312]:

$$S(\omega_0 + \Omega) \approx \frac{A_0^2}{4} \left[ \frac{g_v(0)}{(\pi g_v(0)/2)^2 + \Omega^2} + \frac{g_v(\Omega) - g_v(0)}{\Omega^2} \right]. \quad (28)$$

Оптический спектр имеет вид узкой (с шириной на полувысоте  $\delta\omega \approx \pi g_v(0)$ ) лазерной линии, близкой к лоренцевой форме, с центром на частоте  $\omega_0$  и слабые широкие крылья. В крыльях присутствуют два симметрично расположенных локальных максимума (или «плечи» при достаточно большой мощности генерации) на расстоянии

$\sim \Omega_1$  от лазерной линии, которые соответствуют второму члену в скобках в выражении (28). Они соответствуют стоксовой и антистоксовой компонентам рассеянного лазерного излучения на флуктуациях концентрации электронов.

Для ширины линии генерации  $\delta\omega \approx \pi g_v(0)$  согласно (26в) найдем:

$$\delta\omega \approx \beta N \frac{\hbar\omega_0}{\tau} \frac{\pi(1 + \tilde{R}^2)}{A_0^2 |U| (1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2)} = \beta(1 + \tilde{R}^2) \frac{P}{Q}, \quad (29)$$

где

$$P = N \frac{\hbar\omega_0}{\tau}; \quad Q = A_0^2 |U| \frac{1 + \Delta\tilde{\epsilon}/2}{\pi}.$$

В (26) считается, что частота генерации  $\omega_0$  находится вблизи максимума спектра спонтанного излучения, поэтому  $\rho(\omega_0 + \Omega) \approx \rho(\omega_0 - \Omega) \approx 1$ . Формула (29) для  $\delta\omega$  имеет прозрачный физический смысл, если учесть, что  $P$  – полная мощность спонтанного излучения, а  $Q$  пропорциональна (с точностью до численного коэффициента) энергии в лазерной моде резонатора и качественно совпадает с результатами других работ. Более точное сравнение  $\delta\omega$  с другими результатами затруднительно в силу значительного различия физических моделей, а также определения  $\beta$  и нормы  $U$  для моды. Как правило, в виде нормы используется выражение

$$U = \int_V \epsilon_0(\omega_c, N_0, r) \langle \tilde{u}_c(r) \tilde{u}_c^*(r) \rangle dV$$

(по аналогии с расчетами в задачах квантовой механики), в которое наряду со стоячей волной входят также и бегущие волны, тогда как выражение для  $U$ , используемое в настоящей работе, включает в себя в основном стоячую волну в резонаторе диодного лазера.

## 6. Заключение

Показано, что уравнения Максвелла применительно к диодному лазеру приводят к уравнению типа уравнения Ван Дер Поля, которое имеет нетривиальное решение без каких-либо дополнительных (к стимулированному излучению) источников излучения, в том числе спонтанного излучения.

Учет спонтанного излучения делает физическую модель диодного лазера более реалистичной. Идеально монохроматическое излучение в модели Ван дер Поля заменяется квазимонохроматическим, имеющим конечную спектральную ширину за счет действия спонтанного излучения.

В работе найдено выражение для фактора спонтанного излучения, количественно определяющего это действие. Часто в разных задачах для этого фактора используют одно и то же выражение. Здесь уместно отметить, что выражение для фактора спонтанного излучения в моду резонатора, полученное в данной работе, существенно отличается от выражения для фактора спонтанного излучения в одну поперечную моду бегущей волны, найденного, например, в работе [20]. Это подтверждает мысль, высказанную в ходе дискуссии в упомянутой работе [20], что конкретное выражение для этого фактора зависит от задачи, где его необходимо использовать.

Впервые получены выражения для модифицированных  $\tilde{G}$ - и  $\tilde{R}$ -факторов оптического ограничения и фактора амплитудно-фазовой связи для резонатора лазера.

Найдены выражения для спектральных плотностей флуктуаций фазы и амплитуды излучения, а также для спектральной плотности флуктуаций концентрации электронов. Все эти и другие количественные характеристики, в том числе и оптический спектр, выражены через параметры лазерного диода, которые можно найти из независимых экспериментов или рассчитать, зная конструкцию диодного резонатора.

При этом сама генерация и порог этой генерации сохраняют свой смысл как при наличии спонтанного излучения, так и в его отсутствие. Конечно, при наличии спонтанного излучения появляются флуктуации всех динамических величин, включая усиление, что можно рассматривать как некоторое «размытие» порога генерации. Но это – динамическое (флуктуирующее во времени) «размытие», а вовсе не наличие некой постоянной разности между усилением и потерями резонатора, как это предполагается в феноменологических моделях «асимптотического порога» [7, 8] с использованием скоростных уравнений.

Другое принципиальное отличие результатов, полученных выше, от результатов, получаемых в моделях «асимптотического порога», состоит в различии статистических свойствах излучения. Как уже было отмечено, в рамках нашей модели плотность вероятности амплитуды генерации имеет нормальный закон распределения около своего среднего значения  $A_0$ . Модель «асимптотического порога» для усиленного до той же мощности и с тем же спектром спонтанного излучения, всегда дает для амплитуды распределение Рэлея. Это совершенно разные распределения с различными следствиями, например в экспериментах с интерферометрией Брауна – Твисса.

Работа выполнена в рамках темы ГЗ №0023-2019-0002.

1. Fleck J.A., Jr. *J. Appl. Phys.*, **37** (1), 188 (1966).
2. Берштейн И.Л., Андропова И.А., Зайцев Ю.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **X** (1), 59 (1967).
3. Haug H., Haken H. *Z. Physik*, **204**, 262 (1967).
4. В сб. *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (М.: Мир, 1966, с. 315).
5. Vahala K., Yariv A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-19** (6), 1096 (1983).
6. Vahala K., Yariv A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-19** (6), 1102 (1983).
7. Иванов А.В., Курносов В.Д., Курносов К.В., Романцевич В.И., Рябоштан Ю.А., Чернов Р.В. *Квантовая электроника*, **36** (10), 918 (2006) [*Quantum Electron.*, **36** (10), 918 (2006)].
8. Курносов В.Д., Курносов К.В. *Квантовая электроника*, **48** (9), 807 (2018) [*Quantum Electron.*, **48** (9), 807 (2018)].
9. Suhara T. *Semiconductor Laser Fundamentals* (New York–Basel: Marcel Dekker Inc., 2004, chapt. 6.6.3).
10. Понтрягин Л., Андронов А., Витт А. *ЖЭТФ*, **3** (3), 165 (1933).
11. Берштейн И.Л. *Изв. АН СССР. Сер. физич.*, **XIV** (2), 145 (1950).
12. Рыгов С.М. *Введение в статистическую радиофизику* (М.: Наука, 1976, ч. 1).
13. Антипов О.Л., Кужелев А.С., Лукьянов А.Ю., Зиновьев А.П. *Квантовая электроника*, **25** (10), 891 (1998) [*Quantum Electron.*, **28** (10), 867 (1998)].
14. Henry C.H. *IEEE J. Quantum Electron.*, **19** (9), 1391 (1983).
15. Occhi L., Ito Y., Kawaguchi H., Schares L., Eckner J., Guekos G. *IEEE J. Quantum Electron.*, **38** (1), 54 (2002).
16. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Сов. радио, 1957, с. 547–552).
17. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний* (М.: Наука, 1981, с. 479–518).
18. Богатов А.П. *Препринт ФИАН № 256* (М., 1988).
19. Васьковская М.И., Васильев В.В., Зибров С.А. и др. *Квантовая электроника*, **47** (9), 835 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (9), 835 (2017)].
20. Блохин С.А., Малеев Н.А., Бобров М.А. и др. *Квантовая электроника*, **49** (2), 187 (2019) [*Quantum Electron.*, **49** (2), 187 (2019)].
21. Богатов А.П. *Квантовая электроника*, **47** (4), 313 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (4), 313 (2017)].