# Скоростные уравнения для диодного лазера и область их применимости

**А.П.Богатов**

*Показано, что учет спонтанного излучения посредством постоянной добавки его интенсивности к интенсивности лазерного излучения в рамках скоростных уравнений не корректен. Применение скоростных уравнений, не содержащих уравнений для фаз волн, ограничено только задачами, в которых излучение характеризуется полной интенсивностью без учета его спектрального состава. Такие уравнения не могут адекватно моделировать спектр излучения диодного лазера.*

***Ключевые слова:*** *диодные лазеры, спонтанное излучение, скоростные уравнения.*

## 1. Введение

Настоящую статью можно рассматривать как продолжение статьи [1] с сохранением обозначений и критики практикуемого подхода к теории диодного лазера как лазера с «асимптотическим» порогом генерации, а также критики работ [2, 3].

В литературе, посвященной диодным лазерам, в качестве отправного материала для анализа их характеристик достаточно часто используются так называемые скоростные уравнения. Они очень удобны из-за наглядности и простоты. В тех задачах, где не важны когерентные свойства излучения и рассматривается только полная интенсивность излучения, эти уравнения достаточно адекватно описывают реальную ситуацию, поскольку заложенное в них физическое содержание основано на законе сохранения энергии в системе активная среда – электромагнитное поле в резонаторе.

Начиная с ранних работ (см., напр., [4] и ссылки в ней) и по настоящее время, скоростные уравнения успешно применяются для исследований нестационарного режима генерации диодных лазеров, а также динамики лазерной интенсивности при ее прямой высокочастотной модуляции током накачки. Удобство и простота использования этих уравнений мотивировала многих исследователей на их модификацию с целью увеличения числа задач, в которых они могли бы применяться. По-видимому, это одна из причин, по которой стали появляться работы, где физическое содержание скоростных уравнений оказалось недостаточным для решения рассматриваемых задач. Это относится к работам, посвященным исследованиям диодных лазеров в стационарном режиме генерации и, в частности, анализу спектральных характеристик излучения в этом режиме. Действительно, одна и та же энергия в резонаторе может быть сосредоточена как в одной спектральной линии, так и распределена по нескольким линиям (модам). В связи с этим возникла необходимость модификации скоростных уравнений с учетом дополнительных физических механизмов, которые управляли бы процессом распределения энергии по модам резонатора лазера. Оказалось, что модификация скоростных уравнений, сделанная, например, в [2, 3] а также в других работах, выполнена некорректно.

В соответствии с вышесказанным цель настоящей работы состояла в анализе применимости скоростных уравнений для моделирования спектральных характеристик диодных лазеров.

**А.П.Богатов.** Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53;
e-mail: ya.bogatov47@yandex.ru

Поступила в редакцию 18 марта 2019 г., после доработки – 29 мая 2019 г.

## 2. Анализ скоростных уравнений

Под скоростными уравнениями в любой их записи в этой работе будут пониматься уравнения, в которых электромагнитное поле представляется только интенсивностью излучения (квадратом модуля амплитуды волны) на одной или нескольких оптических частотах с полным игнорированием фаз волн на этих частотах. Другим атрибутом скоростных уравнений является учет спонтанного излучения посредством введения в уравнения постоянной добавки или добавок для интенсивностей каждой из мод лазера. Наиболее полная и типичная форма записи скоростных уравнений представлена в книге [5] (под номерами (6.29a), (6.29b) следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}S_m}{\mathrm{d}t} = \Gamma_m\Big(G_m - \sum_j \xi_{mj} S_j\Big) S_m - \frac{S_m}{\tau_{\mathrm{ph}}} + \frac{C_{\mathrm{s}m} N}{\tau_{\mathrm{s}}}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{J}{qd} - \frac{N}{\tau_{\mathrm{s}}} - \sum_m \Gamma_m\Big(G_m - \sum_j \xi_{mj} S_j\Big) S_m, \tag{2}$$

где по терминологии авторов $S_m$, $G_m$ – плотность фотонов и коэффициент усиления $m$-й моды; $N$ – концентрация электронов (плотность инверсии); $\tau_{\mathrm{ph}}$ – время жизни фотона в резонаторе; $C_{\mathrm{s}m}$ – коэффициент, учитывающий вклад спонтанного излучения в $m$-ю моду; $\Gamma_m$ – фактор оптического ограничения $m$-й моды; $\xi_{mj}$ – коэффициенты, учитывающие насыщение усиления; $d$ – толщина активного слоя; $q$ – заряд электрона; $J$ – ток накачки; $\tau_s$ – время спонтанной рекомбинации.

В уравнениях (1), (2) можно отметить два серьезных недостатка. Первый заключается в том, что учет спонтанного излучения выполнен без должного обоснования и, как следствие, некорректно. Действительно, из физических соображений можно представить, что спонтанное излучение, «попавшее» в определенную моду резонатора, спектрально ограничено полосой пропускания этого резонатора. Это означает, что оно обязательно будет интерферировать с тем излучением («лазерным»), которое уже находится в этой моде. Поскольку полоса пропускания резонатора соответствует обратному времени его отклика, то такая динамическая интерференция приведет к динамике инверсии, а следовательно, к динамике усиления и остальных параметров лазерной генерации. Динамический интерференционный эффект от сложения амплитуд сильного (лазерного) и слабого (спонтанного) полей существенно превышает эффект от сложения этих же полей по интенсивности. В связи с этим учет спонтанного излучения посредством постоянной во времени добавки к интенсивности (сложение по интенсивности), при котором полностью игнорируется интерференционный эффект, представляется по меньшей мере необоснованным.

Второй недостаток связан с тем, что уравнения записаны в терминах не амплитуд мод, а их интенсивностей $S_m$, поэтому в них автоматически игнорируется механизм взаимодействия полей различных мод посредством межмодовых биений интенсивности и соответствующих осцилляций инверсии. Уже в первых работах по лазерам (см., напр., [6] и книгу [7, с. 315]) этот механизм включен в анализ как один из доминирующих в процессе многомодовой генерации. Он выявляется только через последовательное решение уравнений Максвелла совместно с уравнениями для матрицы плотности (инверсии) активной среды. Для диодного лазера взаимодействие полей различных мод особенно велико. Наведенное за счет него дополнительное усиление (поглощение) может на порядок и более превышать спектральную разницу в материальном усилении для соседних мод. Впервые этот механизм для диодных лазеров исследован в [8]. Для того чтобы получить прямое свидетельство о корректности или некорректности соответствующей модификации скоростных уравнений для моделирования спектра излучения диодного лазера, выполним последовательный анализ динамики интенсивности лазерной генерации исходя из уравнений Максвелла для каждого физического процесса.

## 3. Вклад спонтанного излучения

Вначале рассмотрим скоростное уравнение наиболее простого вида, использованное в [5] (уравнения 6.28a, b) для одномодовой генерации:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\Gamma G S - \frac{N}{\tau_s} + \frac{J}{dq}, \tag{3а}$$

$$\frac{dS}{dt} = \left(\Gamma G - \frac{1}{\tau_{ph}}\right) S + \frac{C_s N}{\tau_s}. \tag{3б}$$

Последовательный вывод динамического уравнения для интенсивности в одномодовом режиме состоит в следующем. Все члены укороченного уравнение (21) из работы [1] для $A(t)$ – «медленной» амплитуды моды – необходимо умножить на комплексно-сопряженную амплитуду $A^*(t)$, а затем выполнить такую же операцию с комплексно-сопряженным уравнением (21). В результате сложения двух полученных уравнений имеем

$$A^* \frac{dA}{dt} + A\frac{dA^*}{dt} = \frac{dS}{dt} = 2\Omega_0 \tilde{n} S + \left[2i\xi \sum_{j}^{r_j \in V_{act}} A^*(t) d_j(t) \langle \boldsymbol{e}_j \bar{u}_c(r_j)\rangle + \text{c. c.}\right]. \tag{4}$$

Здесь $S = |A|^2 \backsim Q$ – энергия в моде, или, как ее часто не совсем корректно называют, «плотность фотонов»; $\xi \sim 1/\sqrt{Q}$ – коэффициент, определяемый соотношениями (22) в [1]. Таким способом мы получили динамическое уравнение для $S$, в котором $2\Omega_0\tilde{n}$ – так называемый net-gain-результирующее усиление, т.е. усиление минус потери. Это выражение полностью аналогично члену $\Gamma G - 1/\tau_{ph}$ из уравнения (3б). Второе слагаемое (в квадратных скобках ) есть результат действия источников спонтанного излучения. Оно представляет собой не что иное, как приток (или отток – в зависимости от соотношения между фазами $A(t)$ и $d_j(t)$) энергии в резонаторе лазера за счет интерференции поля лазерной генерации с микротоками источников спонтанного излучения. В результате уравнение (4) описывает баланс энергии электромагнитного поля в резонаторе лазера, включая добавку, обусловленную источниками спонтанного излучения. Наглядно это можно представить, если учесть, что для гармонических зависимостей поля $E(t)$ и осцилляций диполей от времени справедливо соотношение

$$\left(i \sum_{j}^{r_j \in V_{act}} A^*(t) d_j(t) + \text{c.c.}\right) \sim E(t) \boldsymbol{j}(t),$$

где $\boldsymbol{j}(t)$ – сумма микротоков в резонаторе, обусловленная собственным движением электронов при резонансных переходах.

Таким образом, только уравнение (4) можно рассматривать как корректное скоростное уравнение для одночастотного режима генерации с учетом действия источников спонтанного излучения.

Слагаемое $C_s N/\tau_s$, соответствующее в (3) спонтанному излучению, радикальным образом отличается от аналогичного слагаемого в (4), что в результате приводит к некорректному учету действия спонтанного излучения в моделях «асимптотического порога». Заблуждение относительно положительно определенной добавки $C_s N/\tau_s$, приписываемой действию спонтанного излучения и фигурирующей в уравнениях типа (3), скорее всего, результат интуитивных соображений о сложении «по интенсивности» отдельно существующих полей – «лазерного» поля и поля «спонтанного излучения». Реально эти поля неразличимы и представляют собой единое поле в резонаторе. То, что можно понимать под спонтанным излучением в резонаторе, рождается в самом резонаторе от микротоков хаотично (некогерентно с лазерным полем) осциллирующих диполей сразу в виде стохастической модуляции амплитуды лазерного поля. Насыщение усиления тоже происходит вовсе не от суммы «лазерной» интенсивности и независимо пришедшего «спонтанного» излучения, а только от одного поля с амплитудой и фазой, модулированными токами некогерентно излучающих диполей, как это показано в [1]. Последнее относится уже к интерпретации математических выражений и может пониматься по-разному. Это особенно заметно, когда интерпретация лазерной генерации происходит в терминах квантовой теории.

Обратим еще внимание на то, что, выполнив операции над исходным уравнением (21) из работы [1], которые привели нас к скоростному уравнению (4) для интенсивности моды $S$, мы потеряли часть информации, содержавшейся в исходном уравнении (21). Уравнение (4) не является «замкнутым», поскольку в нем не присутствует в явном виде фаза лазерного поля. Оно описывает динамику только энергии (интенсивности) лазерного излучения. Нетрудно видеть, что эту информацию можно сохранить, для чего необходимо найти разность $A^*\mathrm{d}A/\mathrm{d}t - A\mathrm{d}A^*/\mathrm{d}t$. Это позволит получить еще одно уравнение для фазы $\varphi$:

$$S\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \Omega_0\tilde{n}\tilde{R}S + \left[\xi\sum_{j}^{r_j\in V_{\mathrm{act}}} A(t)\,d_j^*(t)\langle \boldsymbol{e}_j\bar{u}_{\mathrm{c}}(r_j)\rangle + \mathrm{c.\,c.}\right].$$

Уравнение (5) совместно с уравнением (4) и уравнением для концентрации электронов (3а) образуют уже полную систему, близкую к системе (22) и способную дать корректные решения, которые будут аналогичны решениям уравнений (22).

Таким образом, авторы работ [2, 3] делают ошибку не только в том, что некорректно представляют вклад спонтанного излучения, но и в том, что принципиальным образом игнорируют динамику фазы лазерного поля, что делает неадекватным их расчет. Конечно, для случая одночастотной генерации и в пренебрежении спонтанным излучением скоростные уравнения (3) вполне корректны. В этом случае они просто отражают закон сохранения энергии. Однако для случая многомодовой генерации уравнения (1), (2) записанные в терминах интенсивности отдельных мод, становятся, вообще говоря, некорректными даже в пренебрежении спонтанным излучением. Такие уравнения не содержат динамику, обусловленную осцилляциями на разностных частотах мод, поскольку амплитуда осцилляций зависит от фазовых соотношений амплитуд полей мод.

## 4. Фотоны в резонаторе диодного лазера

Обсуждение со многими авторами корректности присутствия в скоростном уравнении слагаемого типа $C_{\mathrm{s}}N/\tau_{\mathrm{s}}$, приписываемого спонтанному излучению, почти всегда переходит в дискуссию об очевидности этого обстоятельства. Как правило, при этом высказывается соображение о том, что в стационарном случае должен соблюдаться баланс энергии в резонаторе лазера. Затем авторы переходят на язык квантовой теории и приводят с их точки зрения убедительный и очевидный довод: поскольку энергия в резонаторе определяется числом фотонов, то этот баланс должен распространятся на их число. Есть три механизма, управляющие таким балансом: первый – стимулированное излучение, второй – потери на поглощение и выход из резонатора и третий – спонтанное излучение. Если бы спонтанное излучение отсутствовало, то скорость, с которой появляются фотоны, должна была бы равняться скорости, с которой их число уменьшается. Однако дополнительный приток фотонов за счет спонтанного излучения нарушает это равновесие, поэтому усиление в лазере всегда меньше потерь, т. к. спонтанное излучение есть всегда. Соответственно порог генерации никогда не достигается. Усиление в лазере только асимптотически приближается к потерям снизу по мере роста накачки (выходной мощности лазера). В этом, по мнению некоторых авторов, и заключается «асимптотическое» свойство порога генерации.

Первое замечание следует из сомнительности операций сложения и вычитания «фотонов» подобно счетным палочкам. Понятие фотона возникло в квантовой теории как минимальная дискретная характеристика изменения энергии электромагнитного поля. Что касается самих физических величин, в том числе и энергии поля, то они в квантовой теории находятся как след от произведения операторов соответствующей величины (для числа фотонов это $a^+a$) и матрицы плотности, или как среднее значение действия оператора на волновую функцию чистого состояния.

Квантовая теория рассматривает электромагнитное поле как систему осцилляторов, в которой каждому осциллятору соответствует своя пространственная мода (см., напр., [7, с. 158]); в нашем случае это вектор-функция пространственных координат $\bar{u}(r)$, определяемая классическим уравнением (11) в работе [1]. Квантовая теория в этом случае касается только временной динамики амплитуды поля (например, электрической напряженности) величина которой выражается посредством обобщенных канонических координаты $\tilde{x}$ и импульса $\kappa$ осциллятора с использованием приема вторичного квантования. Чистому состоянию с определенной энергией или (что одно и то же) с определенным числом $n$ квантов (фотонов) соответствует волновая функция в координатном представлении $\varphi_n(\tilde{x})$ в виде [9]

$$\varphi_n(\tilde{x},t) = \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2}H_n(\tilde{x})\exp(-\tilde{x}^2/2 - \mathrm{i}n\omega t),$$

где $H_n$ – полином Эрмита.

Этому квантовому состоянию с определенным числом фотонов $n$ не соответствует никакое состояние классического осциллятора. В этом состоянии потенциальная и кинетическая энергии равны друг другу и постоянны во времени, а фаза колебания полностью не определена. Отдаленным классическим аналогом этого состояния может быть ансамбль с бесконечно большим числом одинаковых осцилляторов с равномерно распределенной фазой колебания. По этой причине состояние поля в резонаторе лазера описывается другими состояниями, так называемыми когерентными, в которых потенциальная и кинетическая энергии являются осциллирующими функциями времени, периодически переходящими друг в друга (как в классическом осцилляторе), за исключением энергии нулевых колебаний. Эти когерентные нестационарные состояния электромагнитного поля, представляемые функцией $\psi(\tilde{x},t)$, состоят из суперпозиции бесконечного числа функций $\varphi_n(\tilde{x},t)$, соответствующих стационарным состояниям с определенной энергией (числом фотонов) [7, с. 158] и [9]. Функция $\psi(\tilde{x},t)$ обобщенной канонической координаты $\tilde{x}$ и времени $t$ может быть записана следующим образом:

$$\psi = \exp\left(-\frac{b^2}{4} - \frac{\mathrm{i}\omega t}{2}\right)\sum_n C_n\varphi_n(\tilde{x},t) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{[\tilde{x} - b\cos(\omega t)]^2 - \mathrm{i}\theta}{2}\right\}, \quad (5)$$

где

$$C_n = \frac{\exp(-b^2/4)b^n}{\sqrt{2^n n!}};\ \theta = \frac{\omega t}{2} + b\tilde{x}\sin(\omega t) - \frac{b^2}{4}\sin(2\omega t).$$

Из правой части уравнения (5) следует, что при существующей динамике когерентного состояния поля его «координата» $\tilde{x}$ (амплитуда поля) ведет себя почти как координата классического осциллятора с амплитудой $\backsim b$.

Среднюю энергию поля в резонаторе можно выразить через среднее число квантов $\bar{n}$ в когерентном состоянии, если учесть, что числа $C_n^2$ представляют собой распределение Пуассона со средним значением $b^2/2$. В результате получим $\bar{n} = (b^2/2)\hbar\omega$. Здесь отметим некоторое неудобство использования квантового подхода, связанное с тем, что хотя функции когерентного состояния и образуют полный набор, но они не ортогональны между собой, а это дополнительно усложняет математику.

Другой не менее существенный аргумент в пользу выбора классического подхода состоит в том, что, например, при выходной мощности лазера не менее 10 мкВт, добротности резонатора не менее $10^3$ и энергии кванта $\sim$1 эВ число квантов $\bar{n} > 10$. В книге [10] наглядно продемонстрировано, что уже для $\bar{n} = 10$ классическое и квантовое распределения плотности вероятности координаты осциллятора достаточно близки друг к другу. Поскольку практически значимые мощности диодных лазеров существенно выше 10 мкВт (то же относится и к добротности), поле в резонаторе можно с хорошей точностью анализировать в рамках классической теории. Для ИК и, тем более, для СВЧ диапазонов критическая мощность, при которой существенны квантовые эффекты, только уменьшается. Поэтому в подавляющем большинстве случаев прибегать для анализа автогенератора к квантовой теории и терминам из этой теории можно разве что из любви к искусству и привязанности к изощренной математике.

В связи с широким использованием понятия «спонтанных фотонов», поступающих в резонатор лазера, можно сделать еще одно замечание. Оно сводится к тому, что часто интуитивно используют только одно из двух представлений фотона, а именно корпускулярное. Процесс появления спонтанного излучения в резонаторе сводится как бы к двум стадиям. На первой рождаются все фотоны, а на второй какая-то их часть поступает в резонатор и суммируется с теми фотонами, которые уже существовали в резонаторе. Надо иметь в виду, что всякие арифметические операции с числом фотонов – плод очень вольной интерпретации квантовой теории. Квантовая теория имеет дело с амплитудами состояний и операторами. Рождение «спонтанных» фотонов в резонаторе лазера – это изменение амплитуды состояния поля в резонаторе за счет его взаимодействия с диполями, выражаемого оператором тока диполя и векторным потенциалом поля [7, с. 158]. Вероятность нахождения системы в том или ином состоянии определяется квадратом модуля амплитуды состояния. Что касается самих амплитуд состояний, то они имеют возможность интерферировать с учетом их фаз. Последнее соответствует представлениям классической электродинамики об интерференции амплитуд поля.

## 5. Многомодовая генерация диодного лазера

При анализе одночастотной генерации, выполненном в [1], мы исходили из того, что пространственное распределение электронов $f(r)$ за порогом генерации не изменяется или меняется незначительно. Это означает, что «выгорание» электронов за счет стимулированных переходов компенсируется превышением тока накачки над порогом, причем эта компенсация однородна по всему объему. Понятно, что, вообще говоря, это не так, и такая компенсация может иметь место только в редких случаях. Для этого необходимы лазерные резонаторы специальной конструкции. Дело в том, что пространственное распределение накачки $J(r)/ed$, съем инверсии $\sim\mathrm{Im}(\delta\varepsilon)\bar{E}^2(r,t)$ и диффузия электронов – разные механизмы, характеризуемые разными функциями. В этом свете возникает вопрос: насколько изменение $f(r)$, определяемое уравнением (7) в [1], критично, чтобы считать его «слабым». В частности, с точки зрения срыва рассмотренной выше одночастотной генерации и возбуждения многих мод.

Рассмотрим этот вопрос применительно к диодному лазеру с резонатором Фабри – Перо и параметрами, близкими к тем, для которых выполнен расчет и даны ссылки на эксперимент в работах [2, 3]. Само существование мод и возможность их возбуждения определяются уравнениями (11) и (12) в [1]. В этих лазерах потери $\gamma_k$ в модах можно считать равными, поскольку они спектрально независимы. В связи с этим регулярная спектральная дискриминация мод обусловлена только формой спектрального контура усиления. Нетрудно показать, что в идеальном случае ( на основе измерений в [11, 12]) для продольных подпороговых мод, ближайших к лазерной, их относительный дефицит усиления по отношению к лазерной моде находится в диапазоне $10^{-5}$ – $10^{-4}$. Это означает, что генерация происходит на практически плоской вершине спектрального контура. Малейшая деформация (на уровне $10^{-4}$) такого спектрального контура усиления влечет за собой либо переключение генерации с одной моды на другую, либо вообще срыв одночастотной генерации и одновременное возбуждение нескольких мод. Расчет подобного рода деформации спектрального контура при «выгорании» распределения электронов $N(r)$ связан с самосогласованным решением сложной нелинейной задачи, которая включает в себя уравнения (7), (9) и уравнения типа (11). Например, для лазера с резонатором Фабри – Перо и «горизонтальным» волноводом, образованным усилением, представленное в [1] решение будет неоправданно упрощенным и потому некорректным. Действительно, чтобы решить уравнение (7), надо знать пространственное распределение $\bar{E}^2(r) \backsim \langle\, \bar{u}^*(r)\bar{u}(r)\,\rangle$. В свою очередь для нахождения $\bar{u}(r)$ необходимо решить уравнение (11) на собственные значения $\omega_k^2$ и собственную функцию $\bar{u}_k(r)$. Это требует знания комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega,\ r)$, а значит, и пространственного распределения $N(r)$, что замыкает круг итераций. Найденные таким образом функции $\bar{u}_k(r)$, $N(r)$ и $\varepsilon(\omega,\ r)$ оказываются взаимозависимыми. Эта взаимозависимость особенно значительна для всех так называемых gain-guided-лазеров, или лазеров со «слабым горизонтальным» волноводом (в плоскости вдоль p – n-перехода), в котором $\bar{u}_k(r)$ определяется (решение уравнения (11)) мнимой частью профиля $\varepsilon(\omega,\ r)$. Именно для таких лазеров и выполнено не совсем удачное моделирование в работе [3].

Очевидно, что такая задача не только не решается аналитически, но и представляет определенные трудности для численных решений. При этом отдельной и нетривиальной проблемой является проблема устойчивости найденного решения, а также неоднозначность решений нелинейных уравнений. Тем не менее, некоторые оценки возможны и без решения этой сложной задачи.

Можно выделить три основных физических механизма, определяющих регулярную деформацию спектрального контура модового усиления при увеличении тока накачки выше порогового.

Первый механизм – это пространственная неоднородность накачки и съема инверсии, о чем шла речь выше.

Второй механизм связан с фундаментальным свойством полупроводниковой активной среды, а именно с зависимостью спектрального контура линии усиления от концентрации электронов из-за последовательного заполнения зоны (подзоны) электронных состоянии. При этом рост усиления с увеличением концентрации сопровождается не только ростом усиления в спектральном максимуме, но и существенным смещением самого максимума в коротковолновую сторону. Это явление хорошо известно и исследовано как теоретически так и экспериментально в многочисленных работах (см., напр., [11, 12]). В лазерах с квантоворазмерной областью этот спектральный сдвиг может быть сравним с шириной линии усиления.

Третий механизм – это зависимость поперечного распределения амплитуды поля $\bar{u}(r)$ (интенсивности) вдоль плоскости слоев от распределения усиления (мнимой части $\varepsilon(r, N, \omega)$), а значит, и от длины волны (об этом тоже шла речь выше). Если теперь учесть, что даже фундаментальная поперечная мода в рассматриваемых лазерах занимает область не менее области накачки (3–5 мкм по данным работы [13]) в направлении вдоль плоскости активного слоя, то становится понятным, что усиление этой моды определяется различными формами спектральных контуров. Каждый контур соответствует своей концентрации, которая в свою очередь изменяется от максимального значения на оптической оси до нулевого на периферии активной области. Таким образом, пространственная неоднородность распределения носителей вносит свой вклад в «неоднородную» ширину линии усиления, сравнимую с квазиоднородной шириной линии. В результате насыщение усиления происходит не только пространственно, но и спектрально неоднородно. Поскольку разность ненасыщенного и насыщенного усилений одного порядка с пороговым усилением, то и спектральная деформация контура сравнима с его спектральной шириной, а относительная амплитуда такой деформации заведомо на несколько порядков превышает вышеупомянутый дефицит усиления ($10^{-5}$–$10^{-4}$). Соответственно в лазерах такого типа практически никогда не наблюдается одночастотный режим генерации. Уже при превышении порога генерации на доли процента выполняются условия возбуждения для нескольких мод. В результате иногда в таких лазерах бывает трудно определить даже порог генерации только из спектральных измерений. Типичная экспериментально наблюдаемая картина для этих лазеров при росте тока накачки выглядит как плавный переход от нескольких спектральных линий усиленного спонтанного излучения к картине из нескольких линий многомодовой лазерной генерации. При этом с увеличением тока накачки выше порогового значения последовательно растет число возбужденных мод и расширяется спектр генерации, отражая спектральное уплощение контура насыщенного эффективного модового усиления вблизи его вершины.

Такое поведение спектра оказывается весьма чувствительным к конкретной конструкции лазера и даже к особенностям конкретного образца, которые могут быть связаны с отклонениями оптических свойств резонатора диода от идеальных из-за его технологических несовершенств. Все это отражается в поведенческом многообразии экспериментально регистрируемых спектров лазеров такого типа.

Другими словами, нам в отличие от авторов работы [3], проблема видится вовсе не в том, чтобы объяснить многомодовую генерацию, а напротив, в необходимости сформулировать условия для одночастотной генерации. Предположения о них были сделаны в работе [1]. Потенциальными кандидатами в одномодовые (одночастотные) лазеры могут быть диоды, у которых пространственное распределение амплитуды моды $\bar{u}_k(r)$, т.е. решение уравнения (11) в работе [1], определяется только реальной частью $\varepsilon(\omega, r)$ и не зависит от ее мнимой части. Это может быть осуществлено, когда «вмороженные» (заданные конструкцией диэлектрического резонатора) пространственные вариации реальной части $\delta\mathrm{Re}(\varepsilon_0(\omega, r))$ много больше вариаций ее части $|\delta\varepsilon(\omega, N(r), r)|$, связанной с электронами. В этом случае уравнение (11) выпадает из системы и решается отдельно. Кроме того, необходимо, чтобы дефицит (различие) усилений ближайших мод был достаточно значительным. Этого можно достичь, например, за счет малой длины резонатора или использования в резонаторе спектрально-селективного элемента.

Рассмотренные выше три механизма далеко не единственные, приводящие к многомодовой генерации. В некоторых конструкциях диодных лазеров многомодовая генерация есть следствие периодических самоподдерживающихся пульсаций излучения с частотой в гигагерцевом диапазоне. Исследованиям режима пульсаций посвящена одна из ранних работ по диодным лазерам [14], связь режима пульсаций с многомодовым режимом наблюдалась в работе [15]. Впоследствии были специально разработаны такие конструкции диодных лазеров [16], в которых этот режим воспроизводимо и регулярно возникал при небольшом превышении порога генерации. Такие лазеры обладают регулярным (с управляемой шириной ) спектром и нашли применение в CD устройствах для подавления спекл-картины при считывании. Другим существенным механизмом, управляющим формированием спектра многомодовой генерации, является механизм нелинейного взаимодействия мод через динамические осцилляции инверсии на разностной частоте (см., напр., [8, 17, 18]).

Цель сказанного выше – обратить внимание на то, что механизмы, приводящие к многомодовой генерации, не связаны со спонтанным излучением. Спонтанное излучение не играет никакой роли в формировании спектра многомодовой генерации, как это утверждается рядом авторов (см., напр., формулу (13) в статье [3] и формулу (6.42) в книге [5]).

В этой связи необходимо упомянуть работу [19], в которой достаточно корректно учтен вклад спонтанного излучения в режим генерации большого числа мод. Авторы совершенно справедливо разделили задачу на две независимые: первая – задача о многомодовой генерации в отсутствие спонтанного излучения, решениями которой они воспользовались, считая их известными, вторая – определение действия спонтанного излучения на каждую из мод. Этой задаче и посвящена статья. Ее результат мало отличается от результата работы [1]. Все действие спонтанного излучения сводится исключительно к спектральному уширению каждой из возбужденных мод, для которых пороговое условие выполнено независимо от присутствия или отсутствия спонтанного излучения.

## 6. Двухфотонное поглощение

Использование модели «асимптотического порога» в виде неизбежного следствия дает парадоксальный результат. Спектр излучения при достаточно большом уровне накачки всегда должен представлять собой одну доминирующую линию, интенсивность которой растет линейно с током, тогда как интенсивность остальных мод должна насыщаться до некоторого своего постоянного уровня. Понятно, что это никак не согласуется с реальностью, поскольку, как уже отмечено выше, если не приняты специальные меры относительно конструкции резонатора, то диодный лазер в подавляющем числе случаев работает в многомодовом режиме.

По-видимому, это обстоятельство стало причиной поиска «сторонних» физических механизмов, способных модифицировать эту модель, чтобы устранить такое несоответствии «теории» и эксперимента. Таким механизмом авторы [3] сочли нелинейные оптические потери за счет двухфотонного поглощения. С учетом такого поглощения в рамках своей модели они выполнили моделирование многомодового спектра генерации диодного лазера. Исходными уравнениями служили следующие скоростные уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}S_m}{\mathrm{d}t} = \left[G_m(1-\varepsilon S_m) - \frac{1}{\tau_{\mathrm{ph}}}\right]S_m + \beta R_{\mathrm{sp}} - \gamma S_m^2, \tag{6а}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{eV_{\mathrm{act}}} - R_\Sigma - \Sigma G_m(1-\varepsilon S)S_m. \tag{6б}$$

Здесь $S_m$, $G_m$ – плотность фотонов и коэффициент усиления $m$-й моды; $\tau_{\mathrm{ph}}$ – время жизни фотона; $\beta$ – коэффициент, учитывающий вклад спонтанного излучения в моду; $\gamma$ – нелинейные потери из-за двухфотонного поглощения; $\varepsilon$ – коэффициент спектрального выгорания; $R_{\mathrm{sp}}$ – скорость спонтанной рекомбинации; $R_\Sigma$ – суммарная скорость излучательной и безызлучательной рекомбинаций; $V_{\mathrm{act}}$ – объем активной области; $e$ – заряд электрона; $I$ – ток накачки. Эта запись скоростных уравнений, использованная авторами [3], совпадает с типичной записью таких уравнений другими авторами, за исключением последнего слагаемого в правой части уравнения (6а).

О несостоятельности самих уравнений (6) при анализе спектральных характеристик диодных лазеров было сказано выше. Авторы [3] пошли дальше. Они путем численного моделирования якобы показали, что введение отрицательной добавки в виде слагаемого $-\gamma S_m^2$ в уравнение (6а) приводит к смене режима одномодовой генерации на многомодовую. Ниже будет показано, что это еще один ошибочный результат.

Вначале отметим, что в режиме генерации нескольких мод полная интенсивность $S(t)$ является принципиально динамической величиной, поскольку происходят биения интенсивности полей на разностных частотах. Представим комплексную амплитуду напряженности поля многомодовой лазерной генерации $\mathcal{E}(t)$ в виде разложения по модам:

$$\mathcal{E}(t) = \sum_k A_k(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_k t).$$

Тогда полная интенсивность $S(t)$ запишется в виде средней величины $\tilde{S}$ и переменной части $a(t)$, среднее значение которой для квазистационарного многомодового режима генерации равно нулю:

$$S(t) = \tilde{S} + a(t), \tag{7}$$

$$a(t) = \frac{1}{2}\sum_{k\neq j} A_k(t)A_j^*(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_k - \omega_j)t], \tag{8}$$

где

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}\sum_m |A_m(t)|^2 = \sum_m S_m(t).$$

Из уравнения (8) видно, что при достаточно медленном изменении амплитуд $A_k(t)$ динамика интенсивности $a(t)$ представляет собой квазипериодическую функцию с периодом $T_0 = 2\pi/\Omega = 2Ln_{\mathrm{gr}}/c$, который соответствует времени обхода волны по резонатору диода, где $\Omega = |\omega_j - \omega_{j+1}|$ – частота межмодовых биений интенсивности.

В уравнении (8), как и в уравнениях (6), проигнорирована координатная зависимость, которая соответствует пространственному распределению интенсивности внутри резонатора. Это принципиальный недостаток и свойство скоростных уравнений, однако в данном случае важно другое. Уравнения (6) вообще не содержат динамического члена $\backsim a(t)$. Это уже изначально делает их неадекватными, т. к. двухфотонное поглощение – «быстрый»» процесс, который реагирует на мгновенное значение интенсивности, и всякое усреднение необходимо выполнять с учетом этого обстоятельства. Просуммировав уравнение (6а) по $m$ и усреднив по «медленному» времени $T \geqslant T_0$, получим для многомодового режима

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}}{\mathrm{d}t} = [G(N) - \alpha]\tilde{S}(T) - \gamma\tilde{S}^2(T) - \gamma b(T), \tag{9}$$

где $b(T) = \overline{a^2(T)} > 0$.

Стационарное уравнение для одночастотного режима интенсивности $S_0$ таково:

$$\frac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}T} = 0 = [G(n_0) - \alpha]S_0 - \gamma S_0^2. \tag{10}$$

Представим, что $S(0) = S_0$ в момент времени $T = 0$. Использовав уравнение (10), а также то, что $\gamma b(t) \geqslant 0$ – положительная величина, получим $\mathrm{d}\tilde{S}/\mathrm{d}t = -\gamma b(t) \leqslant 0$. Учитывая, что величина $\tilde{S}$ может быть только положительной или равной нулю, получим, что двухфотонное поглощение приводит к дополнительной стабилизации одночастотного режима и к подавлению многомодового режима. К режиму срыва одночастной генерации и к переходу в многомодовый режим, напротив, может привести механизм нелинейного поглощения, обладающий противоположным знаком ($\gamma < 0$), например насыщающееся поглощение. Он хорошо известен в лазерной физике и используется в лазерах с пассивной модуляцией добротности и в лазерах с пассивной синхронизацией мод [20]. Приходится констатировать, что авторы [3], по-видимому, не знали, что двухфотонное поглощение ранее (без малого 50 лет назад) не совсем удачно было предложено в работе [21] в качестве механизма многомодовой генерации в диодном лазере.

## 7. Заключение

Таким образом, в настоящей работе показано, что область применимости скоростных уравнений для диодных лазеров ограничена моделированием динамики полной интенсивности этих лазеров и не касается деталей спектрального распределения излучения.

Попытки учета действия спонтанного излучения в рамках скоростных уравнений для стационарного режима генерации ведут, скорее, к ошибочным, а не к адекватным результатам. Это связано с тем, что в скоростных уравнениях полностью игнорируется одна из главных характеристик лазера – когерентность его излучения. Возможна дополнительная модификация скоростных уравнений путем включения в них уравнений для фаз. Однако вряд ли от этого анализ станет проще, чем при использовании уравнений для амплитуд, полученных непосредственно из уравнений Максвелла.

Моделирование спектра излучения диодного лазера в стационарном режиме генерации с использованием скоростных уравнений, в том числе и в работе [3], следует признать ошибочным.

В настоящее время актуальность моделирования многомодового режима генерации диодного лазера выглядит весьма сомнительной с точки зрения как практических задач, так и развития теории. Можно привести только одну практическую задачу, в которой требовалось уменьшение когерентности лазера. Она упомянута в [16] в связи с разработкой CD устройств. Эта задача в свое время была решена, а сейчас потеряла актуальность, поскольку производство CD либо ограничено, либо отсутствует вообще. Для теории в этой задаче тоже трудно найти что-то новое, а возможные результаты вряд ли могут быть полезными из-за их заведомо частного характера.

Работа выполнена в рамках темы ГЗ №0023-2019-0002.


1. Богатов А.П., Дракин А.Е. *Квантовая электроника*, **49** (8), 717 (2019) [*Quantun Electron*., **49** (8), 717 (2019)].
2. Иванов А.В., Курносов В.Д., Курносов К.В., Романцевич В.И., Рябоштан Ю.А., Чернов Р.В. *Квантовая электроника*, **36** (10), 918 (2006) [*Quantun Electron.*, **36** (10), 918 (2006)].
3. Курносов В.Д., Курносов К.В. *Квантовая электроника*, **48** (9), 807 (2018) [*Quantun Electron*., **48** (9), 807 (2018)].
4. Басов Н.Г., Никитин В.В., Семенов А.С. *УФН*, **97** (4), 561 (1969).
5. Suhara T. *Semiconductor Laser Fundamentals* (New York–Basel: Marcel Dekker Inc., 2004, Ch. 6.6.3).
6. Lamb W.E., Jr. *Phys. Rev*., **134** (6a), A1429 (1964).
7. В сб. *Квантовая оптика и квантовая радиофизика* (М.: Мир, 1966).
8. Bogatov A.P., Eliseev P.G., Sverdlov B.N. *IEEE J. Quantum Electron*., **QE-11** (7), 510 (1975).
9. Пиппард А. *Физика колебаний. Квантово-механические системы* (М.: Высшая школа, 1989, с. 11).
10. Шифф Л. *Квантовая механика* (М.: Изд-во Иностранной литературы, 1957, с.78).
11. Батрак Д.В., Богатова С.А., Бородаенко А.В., Дракин А.Е., Богатов А.П. *Квантовая электроника*, **35** (4), 316 (2005) [*Quantun Electron*., **35** (4), 316 (2005)].
12. Богатов А.П., Болтасева А.Е., Дракин А.Е., Белкин М.А., Коняев В.П. *Квантовая электроника*, **30** (4), 315 (2000) [*Quantun Electron*., **30** (4), 315 (2000)].
13. Горлачук П.В., Иванов А.В., Курносов В.Д., Курносов К.В., Мармалюк А.А., Романцевич В.И., Симаков В.А., Чернов Р.В. *Квантовая электроника*, **48** (6), 495 (2018) [*Quantun Electron.*, **48** (6), 495 (2018)].
14. Басов Н.Г., Морозов В.Н., Никитин В.В., Семенов А.С. *ФТП*, **1**, 1570 (1967).
15. Bogatov A.P., Eliseev P.G., Ivanov L.P., Logginov A.S., Manko M.A., Senatorov K.Ya. *IEEE J. Quantum Electron*., **QE-9** (2), 392 (1973).
16. Мифтахутдинов Д.Р., Батрак Д.В., Богатов А.П., Дракин А.Е., Плисюк С.А. *Квантовая электроника*, **36** (8), 751 (2006) [*Quantun Electron*., **36** (8), 751 (2006)].
17. Батрак Д.В., Богатов А.П., Каменец Ф.Ф. *Квантовая электроника*, **33** (11), 941 (2003) [*Quantun Electron*., **33** (11), 941 (2003)].
18. Батрак Д.В., Богатов А.П. *Квантовая электроника*, **37** (8), 745 (2007) [*Quantun Electron*., **37** (8), 745 (2007)].
19. Меллер А.С., Хандохин П.А., Ханин Я.И. *Квантовая электроника*, **13** (11), 2278 (1986) [*Sov. J. Quantun Electron*., **16** (11) 1502].
20. Летохов В.С. *ЖЭТФ*, **55** (3), 1077 (1968).
21. Попов Ю.М., Шуйкин Н.Н. *ЖЭТФ*, **58** (5), 1727 (1970).