*ПРИГЛАШЕННАЯ СТАТЬЯ*

# Влияние анизотропии упругости на термонаведённые искажения лазерного пучка в монокристаллах кубической сингонии с радиальным теплоотводом. Ч. 1

**А.Г.Вяткин, Е.А.Хазанов**

*Исследованы термонаведённые искажения пучка в монокристаллах кубической сингонии всех групп симметрии с анизотропным тензором упругой жёсткости. Для длинного стержня и тонкого диска с радиальным теплоотводом при однородной по объёму накачке активного элемента рассчитаны среднее арифметическое и разность термонаведённых набегов фаз собственных поляризаций и угол наклона этих поляризаций. Изучено положение выделенных ориентаций кристалла, не связанных с его элементами симметрии. Найдены эффективные значения термооптической постоянной Q в двух выделенных ориентациях, а также термооптической постоянной P в произвольной ориентации.*

***Ключевые слова:*** *лазеры с высокой средней мощностью, фотоупругий эффект, термонаведённая деполяризация, термооптические постоянные, анизотропия кубических кристаллов.*

## 1. Введение

Тепловые эффекты – важный фактор, ограничивающий мощность и качество выходного излучения твердотельных лазеров [1, 2]. Тепловыделение в оптических элементах приводит не только к росту средней по объёму температуры, но и к возникновению температурных градиентов, которые, в свою очередь, являются источником упругих напряжений. Вследствие фотоупругого эффекта в оптических элементах любой природы (стёклах, монокристаллах всех групп симметрии и керамиках) появляется анизотропная и неоднородная по объёму добавка к тензору диэлектрической проницаемости, вызывающая в общем случае как фазовые, так и поляризационные искажения проходящего через них лазерного излучения.

Термонаведённая анизотропия появляется даже в изначально оптически изотропных средах (кубических монокристаллах, стёклах и керамиках). В этих средах существенное влияние на оптическое качество проходящего пучка оказывает процесс перекачки энергии из исходной поляризации в ортогональную (в смысле скалярного произведения), называемый деполяризацией [3, 4]. В средах, обладающих естественным двулучепреломлением (некубические монокристаллы и ориентированные керамики из них) термонаведённое изменение поляризации проходящего излучения обычно незначительно, за исключением случаев его распространения под малыми углами к оптической оси [2], а преобладающее влияние на качество пучка оказывает астигматическое искажение фазы. Во всех кристаллах, включая кубические, вследствие анизотропии их фотоупругих свойств характер термонаведённой анизотропии существенно зависит от ориентации кристаллографических осей в оптическом элементе [5, 6].

**А.Г.Вяткин, Е.А.Хазанов.** Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: vyatkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 18 октября 2019 г.

Термонаведённые искажения пучка в стёклах были изучены теоретически и экспериментально в 1960-е – 1970-е гг. [7 – 11]. В начале 70-х годов начались исследования искажений в кубических монокристаллах групп симметрии m3m, 432 и $\bar{4}3m$, которые мы для краткости будем называть m3m-кристаллами (обозначение объяснено в разд. 2). Вначале была изучена ориентация [111] ([3, 4, 12 – 15]), несколькими годами позже – ориентация [001] ([16, 17]) и критическая ориентация [18, 19]. В 2000-е гг. методом, предложенным в [20], была исследована термонаведённая деполяризация в m3m-кристаллах при произвольной ориентации [21, 22], тогда же было указано на особые свойства ориентации [011] в них [22 – 24]. Термонаведённая деполяризация в остальных кубических монокристаллах – групп симметрии 23 и m3 (для краткости мы будем их называть m3-кристаллами, см. разд. 2) – была теоретически рассмотрена в [25]. Исследование фазовых и поляризационных искажений пучка в кубических m3m-керамиках началось в 2000-х гг. [26 – 32]. Недавно были теоретически исследованы искажения в m3-керамиках [33 – 35].

В подавляющем большинстве теоретических работ упругие свойства кубических кристаллов (тензоры упругой жёсткости и упругой податливости) считались изотропными, хотя уже в ранние годы было не только известно, что это лишь приближение, но и было найдено решение задачи упругости для параболического профиля температуры [36, 37]. Анизотропия упругих свойств учитывалась в некоторых работах, посвящённых термооптике как кубических, так и некубических кристаллов, но только для простейших ориентаций [38 – 41].

В настоящей работе рассмотрены термонаведённые искажения пучка в монокристаллах кубической сингонии всех групп симметрии с учётом анизотропии их упругих свойств и при произвольной ориентации кристаллографических осей. В разд. 2 введены необходимые для постановки задачи обозначения. В разд. 3 обсуждён вопрос формы записи фотоупругого эффекта в средах с неоднородным распределением температуры. Раздел 4 посвящён обзору существующих аналитических решений задач теплопроводности и упругости и выбору наиболее точного решения для геометрии длинного стержня. В разд.5 получены выражения для термонаведённых искажений пучка в кубических кристаллах в виде длинного стержня и тонкого диска. Найдены среднее арифметическое и разность набегов фаз собственных поляризаций, а также угол наклона собственных поляризаций; обсуждаются выделенные ориентации кристалла; определены эффективные значения термооптических постоянных $P$ и $Q$.

## 2. Постановка задачи и некоторые обозначения

В рамках настоящей статьи мы будем считать, что оптический элемент имеет форму цилиндра, а его ось совпадает с осью $z$ лабораторной системы координат $(x,y,z)$ и с направлением распространения пробного излучения. Элемент может быть вырезан из толщи кристалла в разных направлениях. Ориентация элемента однозначно задаётся положением его оси в кристаллографической системе координат $(a,b,c)$. Это может быть сделано при помощи первых двух из трёх углов Эйлера – азимутального $(\alpha)$ и полярного $(\beta)$ (рис.1,*а*,*б*,*г*). В результате система координат $(x'',y'',z)$, полученная из кристаллографической вследствие поворота на эти два угла, будет привязана к оптическому элементу. При этом третий угол Эйлера, $\Phi$, будет равен с обратным знаком углу поворота элемента вокруг своей оси относительно лабораторной системы координат $(x,y,z)$ (рис.1,*в*,*г*). Пара углов Эйлера $(\alpha,\beta)$ задаёт ориентацию кристалла, обозначаемую также при помощи индексов Миллера $[MNP]$. В настоящей работе существенное внимание уделено ориентациям вида $[M0N]$ и $[MMN]$, показанным на рис.1,*д*,*е*. Кроме того, мы считаем эквивалентными и не будем различать ориентации, полученные друг из друга циклической перестановкой индексов ($[NPM]$, $[PMN]$) и изменением знаков индексов ($[MN\overline{P}]$, $[\overline{M}N\overline{P}]$ и др.) [25].

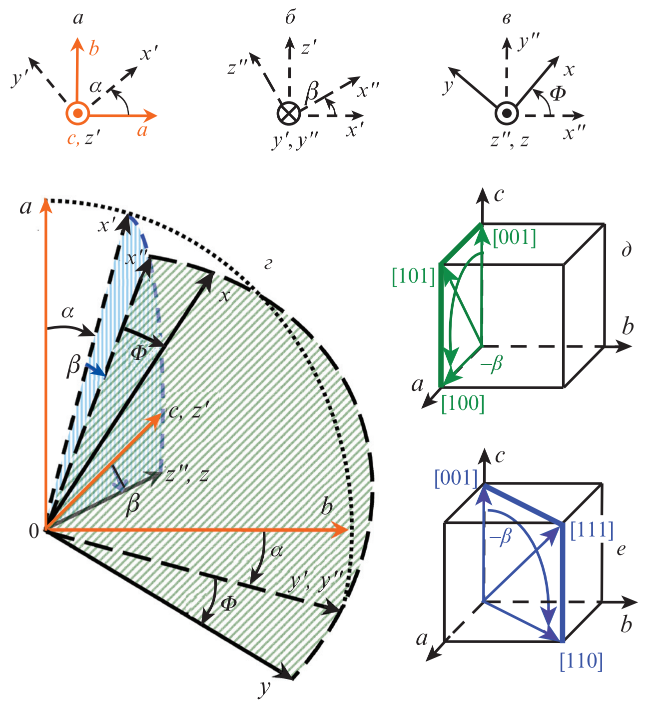


Рис.1. Переход от кристаллографических осей $(a,b,c)$ через промежуточные системы координат $(x',y',z')$ и $(x'',y'',z'')$ к лабораторной системе координат $(x,y,z)$ путём последовательного вращения на углы Эйлера $(\alpha,\beta,\Phi)$ (*а*–*г*); *д* – ориентации $[M0N]$ $(\alpha = 0)$ в кристаллографической системе координат; *е* – ориентации $[MMN]$ $(\alpha = \pi/4)$. Цветной вариант рис.1 помещён на сайте нашего журнала http://www.quantum-electron.ru.

Кроме декартовых систем координат мы будем пользоваться и цилиндрическими. Пусть лабораторной декартовой системе $(x,y,z)$ соответствует цилиндрическая $(r,\varphi,z)$, тогда системе $(x'',y'',z)$ будет соответствовать система $(r,\varphi_\Phi,z)$, где

$$\varphi_\Phi = \varphi + \Phi. \qquad (1)$$

Большое тепловыделение и большие термонаведённые искажения в лазерных системах характерны для активных элементов и ячеек Фарадея. В рамках настоящей работы мы будем рассматривать среды, не вращающие плоскость поляризации, поэтому в расчётах термооптики будем для определённости называть оптический элемент активным.

Мы также будем считать, если явно не указано иное, что длина активного элемента $L$ много больше либо много меньше его радиуса $R$ (длинный стержень или тонкий диск соответственно), его нагрев равномерен по $z$, а охлаждение осуществляется с боковой поверхности. В этих приближениях температура и упругие напряжения в диске, а также температура в стержне не зависят от $z$, а напряжения и деформации в стержне практически постоянны на расстоянии больше одного-двух радиусов от его концов, т.е. на большей части длины стержня. Поскольку термонаведённые искажения пучка накапливаются в процессе его распространения в среде, концевыми эффектами в стержне мы будем пренебрегать, следуя общепринятому подходу, за исключением одного из разделов второй части статьи.

В настоящей работе, как и в предшествующих статьях, мы рассматриваем боковое охлаждение тонкого диска. Для этого случая существует точное и простое аналитическое решение задачи упругости, вид которого не зависит от материальных параметров среды и параметров тепловых контактов с хладагентом или хладопроводами, а сами искажения сравнительно велики. Необходимо отметить, что радиальное охлаждение в случае тонкого диска приводит к далеко не оптимальному температурному режиму. В случае торцевого охлаждения перепады температур оказываются существенно ниже и, кроме того, температурные градиенты зачастую практически параллельны оси $z$. Оба этих фактора приводят к существенному уменьшению термонаведённых искажений пробного пучка. Для такого режима охлаждения в случае изотропного тензора упругой жёсткости известны несколько приближённых решений [32, 42, 43], одно из которых [32] требует слабого теплоотвода, что противоречит идеологии лазера высокой средней мощности, а во втором, так же как и в решении из [42], полностью пренебрегается радиальным потоком тепла. Решение [43] построено на основе некоторой аппроксимации радиального потока и, как следует из [44] и нашего сравнения с результатами численного моделирования кодом из [45], имеет высокую точность отнюдь не при всех наборах входных параметров. В свою очередь близость направлений температурных градиентов и распространения излучения может привести к сильному влиянию малых отклонений реального поля напряжений от приближённых решений на направления градиентов и, как следствие, на величину термонаведённых искажений пучка. В связи с этим применимость данных решений для расчёта термооптики, в отличие от геометрии с боковым охлаждением, зависит от параметров задачи (аспектного отношения, качества тепловых контактов, формы греющего пучка) и требует отдельного детального исследования, которое целесообразно проводить под конкретную задачу.

В настоящей работе мы сосредоточились на получении общей качественной зависимости степени деполяризации от ориентации в наиболее простой геометрии. Мы считаем, что выявленные закономерности будут применимы и в случае торцевого теплоотвода, несмотря на невозможность количественной оценки величины термонаведённых искажений пучка.

Существуют две распространённые формы записи фотоупругого эффекта: в виде зависимости приращения $\Delta\boldsymbol{B}$ тензора диэлектрической непроницаемости

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \qquad (2)$$

либо от тензора упругих деформаций $\boldsymbol{u}$, либо от тензора упругих напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ [5]:

$$\Delta B_{u\,ij} = p_{ijkl} u_{kl}, \qquad (3а)$$

$$\Delta B_{\sigma\,ij} = \pi_{ijkl} \sigma_{kl}, \qquad (3б)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор диэлектрической проницаемости, а $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{\pi}$ – упругооптический и пьезооптический материальные тензоры четвёртого ранга соответственно. Последние два тензора связаны между собой через тензор упругой податливости $\boldsymbol{s}$:

$$\pi_{ijkl} = p_{ijmn} s_{mnkl}. \qquad (4)$$

Также возможна запись через тензор упругой жёсткости $\boldsymbol{c}$, обратный тензору $\boldsymbol{s}$:

$$p_{ijmn} = \pi_{ijkl} c_{klmn},$$
$$s_{ijkl} s_{klmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}). \qquad (5)$$

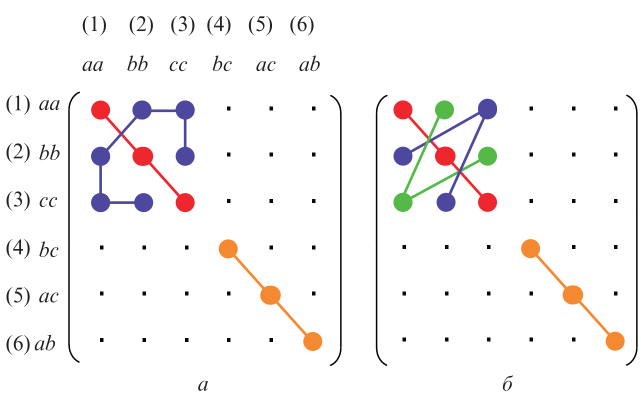


Рис.2. Общий вид материальных тензоров 4-го ранга кристаллов кубической сингонии в двухиндексном обозначении Ная [5]:
*а* – пьезооптический ($\boldsymbol{\pi}$) и упругооптический ($\boldsymbol{p}$) тензоры кристаллов групп симметрии m3m, 432 и $\bar{4}$3m, а также тензоры упругой жёсткости ($\boldsymbol{c}$) и податливости ($\boldsymbol{s}$) всех групп симметрии; *б* – тензоры $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{p}$ кристаллов групп симметрии m3 и 23. Одинаковые элементы соединены прямыми линиями.

В кубическом кристалле тензоры 4-го ранга $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{c}$ определяются тремя независимыми ненулевыми коэффициентами. Их вид в двухиндексных обозначениях Ная схематично представлен на рис.2,*а* [5]. Эти кристаллы можно разделить на два типа. В кристаллах групп симметрии m3m, 432 и $\bar{4}$3m, которые мы условились называть m3m-кристаллами, фотоупругие тензоры $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{\pi}$ имеют такой же вид. В остальных кристаллах кубической сингонии, относящихся к группам симметрии m3 и 23, которые мы называем m3-кристаллами, эти два тензора определяются четырьмя независимыми коэффициентами, их общий вид представлен на рис.2,*б*.

## 3. Выбор формы записи фотоупругой добавки к показателю преломления для изотропной задачи упругости

Входящие в (3) тензоры деформаций и напряжений связаны между собой уравнением упругости

$$u_{ij} - \alpha_{Tij}(T - T_0) = s_{ijkl}\sigma_{kl}, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{\alpha}_T$ –тензор теплового расширения; $T$ – поле температуры; $T_0$ – исходная температура, при которой ненапряжённое тело условно считается недеформированным. Из равенств (3)–(6) следует, что приращения $\Delta\boldsymbol{B}$ (3а) и (3б) не могут быть сделаны равными друг другу в среде любой симметрии даже подбором $T_0$, если температура среды зависит от координат:

$$\Delta\boldsymbol{B}_u - \Delta\boldsymbol{B}_\sigma = (T - T_0)\Delta\boldsymbol{\chi}_T,$$
$$\Delta\chi_{T\,ij} = p_{ijkl}\alpha_{T\,kl}. \qquad (7)$$

В силу (2) тензор $\Delta\boldsymbol{\chi}_T$ в линейном приближении представляет собой с точностью до множителя поправку к $\partial\boldsymbol{\varepsilon}/\partial T$ [46, 47], поэтому в задачах термоупругости важно, какой именно формулой из (3) пользоваться. Можно показать, что $\Delta\boldsymbol{\chi}_T$ имеет ту же симметрию, что и невозмущённая («холодная») диэлектрическая проницаемость среды $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(T_0)$. В связи с этим в частном случае кубического кристалла различие (7) между формулами (3) сказывается только на фазовых искажениях пучка, не влияя на поляризационные [47]:

$$\Delta\chi_{T\,ij} = \delta_{ij}\Delta\chi_T, \qquad (8а)$$

где

$$\Delta\chi_T = (p_{aaaa} + p_{aabb} + p_{bbaa})\alpha_T; \qquad (8б)$$

$\delta_{ij}$ – символ Кронекера (отметим, что последующие формулы работы [47] рассчитаны для m3m-кристаллов и к m3-кристаллам неприменимы).

Полное приращение диэлектрической проницаемости можно записать в виде

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}, T) = (\partial\varepsilon_{ij}/\partial T)_u (T - T_0) + (\partial\varepsilon_{ij}/\partial u_{mn})_{T u_{kl}} u_{mn}, \qquad (9а)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, T) = (\partial\varepsilon_{ij}/\partial T)_\sigma (T - T_0) + (\partial\varepsilon_{ij}/\partial\sigma_{mn})_{T\sigma_{kl}}\sigma_{mn}, \qquad (9б)$$

где $kl \neq mn$. В этой записи температурные производные диэлектрической проницаемости должны быть определены в разных условиях: в (9а) – при нулевых деформациях, в (9б) – при нулевых напряжениях, и потому их значения в общем случае различны, что обозначено нижними индексами. В привычных обозначениях (2), (3) выражение (9) принимает вид

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}, T) = (\partial\varepsilon_{ij}/\partial T)_u (T - T_0) - \varepsilon_{0ik}\varepsilon_{0lj}\Delta B_{ukl}, \tag{10а}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, T) = (\partial\varepsilon_{ij}/\partial T)_\sigma (T - T_0) - \varepsilon_{0ik}\varepsilon_{0lj}\Delta B_{\sigma kl}. \tag{10б}$$

В кубическом кристалле подстановка (7) в (10) даёт

$$\begin{aligned} &(n_0^3/2)\Delta\chi_T = \beta_u - \beta_\sigma, \\ &\beta_\mu = (\partial\varepsilon/\partial T)_\mu, \end{aligned} \tag{11}$$

где $n$ – показатель преломления; $n_0 = n(T_0)$ [46, 47].

Из выражений (9) также следует, что тензоры $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{\pi}$ должны быть изотермическими, т.е. они должны быть определены при постоянной температуре [7, 46, 47] (в ряде задач используются адиабатические тензоры, определяемые при постоянной энтропии [5]).

Рассмотрим в свете этих соотношений термооптическую постоянную $P$ – удобную характеристику для описания средней между двумя собственными поляризациями (обозначим их I и II) тепловой линзы в кубических кристаллах:

$$[n_{\rm I}(r) + n_{\rm II}(r)]/2 = n(0) + [T(r) - T(0)]P. \tag{12}$$

Этот параметр был впервые введён для длинных стержней из стекла в [10]. В дисковой и стержневой геометриях $P$ имеет разный вид [16], а кроме того, в случае тонкого диска в него иногда включают слагаемое, отвечающее за изменение длины активного элемента [11, 16] (величину с дополнительным слагаемым в пп.5.3.2 мы обозначили как $P^{\rm tot}$). В работе [16] также отмечено, что полусумма собственных показателей преломления в кубических m3m-кристаллах в общем случае не сводится к виду (12) в ориентации [011]. Впоследствии было обнаружено, что в таких кристаллах $P$ по формуле (12) можно ввести только в ориентациях [001] и [111], а также для статистических средних показателей преломления в оптической керамике, причём получаемые три значения $P$ различны в каждой геометрии [16, 30, 32] (рассматривались m3m-кристаллы). В связи с этим $P$ часто определяют в ориентации [001] в соответствии с выражением (12), а в остальных случаях вводят в формулу дополнительные слагаемые (см. [30, 32, 33, 35, 48]). Тогда величина $P$ зависит только от материальных параметров и геометрии (длинный стержень или тонкий диск) и, таким образом, с оговоркой на заданную геометрию сама является материальным параметром. Мы также будем придерживаться этого подхода, а величину, введённую в соответствии с (12) при произвольной ориентации кристалла, обозначим $P^{\rm eff}$ (см. пп.5.3.2).

Рассмотрим активный элемент из кубического кристалла с ориентацией [001] ($\alpha = \beta = 0$) или изотропного материала. В первом случае будем дополнительно, следуя традиции (см. Введение), считать упругие свойства изотропными. Изотропный тензор упругой податливости в двухиндексном обозначении Ная имеет в любой декартовой системе координат следующие ненулевые компоненты [5] (см. также рис.2,*а*):

$$s_{11} = E^{-1},\ s_{12} = -\nu s_{11},\ s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}), \tag{13}$$

где $E$ и $\nu$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Далее мы для краткости будем называть такие среды упругоизотропными. Используя выражения для тензора напряжений в цилиндрических телах из [49], несложно показать, что при использовании формулы (10а) выражения для $P$ имеют вид

$$P_{\rm disk}(\beta_u, \boldsymbol{p}) = \beta_u - (1 + 4\zeta_p)Q_{\rm disk}, \tag{14а}$$

$$P_{\rm rod}(\beta_u, \boldsymbol{p}) = \beta_u - (1 + 2\zeta_p)Q_{\rm rod}, \tag{14б}$$

а при использовании формулы (10б) в эквивалентном виде

$$P_{\rm disk}(\beta_\sigma, \boldsymbol{\pi}) = \beta_\sigma + (1 + 2\zeta_\pi)Q_{\rm disk}, \tag{15а}$$

$$P_{\rm rod}(\beta_\sigma, \boldsymbol{\pi}) = \beta_\sigma + (1 + 4\zeta_\pi)Q_{\rm rod}, \tag{15б}$$

где

$$\begin{aligned} &Q_{\rm disk} = \frac{1}{4}\alpha_T n_0^3 E\pi_{\rm S} = \frac{1}{4}\alpha_T n_0^3 (1+\nu)p_{\rm S}; \\ &Q_{\rm rod} = Q_{\rm disk}/(1-\nu), \end{aligned} \tag{16}$$

а

$$\begin{aligned} &\zeta_p = p_{12}^{\rm a}/p_{\rm S}; && \zeta_\pi = \pi_{12}^{\rm a}/\pi_{\rm S}; \\ &p_{\rm S} = p_{11} - p_{12}^{\rm a}; && \pi_{\rm S} = \pi_{11} - \pi_{12}^{\rm a}; \\ &p_{12}^{\rm a} = \frac{1}{2}(p_{12} + p_{21}); && \pi_{12}^{\rm a} = \frac{1}{2}(\pi_{12} + \pi_{21}) \end{aligned} \tag{17}$$

(в m3m-кристаллах $p_{12}^{\rm a} = p_{12} = p_{21}$, $\pi_{12}^{\rm a} = \pi_{12} = \pi_{21}$; см. рис.2,*а*). Величина $Q$ также называется термооптической постоянной [10, 11]. Подставив (11) в (14), можно получить выражение через смешанный набор переменных:

$$\begin{aligned} &P_{\rm disk}(\beta_\sigma, \boldsymbol{p}) = \beta_\sigma + \frac{1}{4}\alpha_T n_0^3[p_{11}(1-\nu) + p_{12}^{\rm a}(1-3\nu)], \\ &P_{\rm rod}(\beta_\sigma, \boldsymbol{p}) = \beta_\sigma + \frac{1}{4}\alpha_T n_0^3[p_{11}(1-3\nu) + p_{12}^{\rm a}(3-5\nu)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Как видно из этих формул, вид выражения для тепловой линзы существенно зависит от выбора переменных. Приведённый в Приложении 1 обзор литературы, тем не менее, показывает, что общепринятого соглашения о выборе формулы для описания фотоупругого эффекта не только не существует, но зачастую различие между ними и сопутствующий вопрос об условии определения $\partial n/\partial T$ игнорируются. По нашему мнению, из упомянутых в обзоре источников приращение показателя преломления корректно, однозначно и полно описано в [7, 9, 10, 46, 47, 50] и, с небольшой оговоркой, в [4] (в ряде работ внимание уделено только двулучепреломлению, поэтому в этот список они не включены). При этом описание осуществляется одним из двух математически эквивалентных способов: с помощью $(\partial n/\partial T)_u$ и (3а) [7, 46, 47, 50]; с помощью $(\partial n/\partial T)_\sigma$ и (3б) [4, 7, 9, 10, 46, 47].

Мы считаем второй вариант предпочтительным по следующим причинам:

1. Величину $(\partial n/\partial T)_\sigma$ измерить проще, чем $(\partial n/\partial T)_u$, поскольку для однородно нагретого тела условие отсутствия напряжений выполняется автоматически [46, 50].

2. Компоненты тензора $\boldsymbol{\pi}$ также измерить проще, чем компоненты тензора $\boldsymbol{p}$, поскольку создать и измерить одноосную нагрузку легче, чем малую одноосную деформацию.

3. Как отмечено в [46], в приближениях длинного стержня и тонкого диска формулы для компонент тензора напряжений [49] проще, чем для компонент тензора деформаций [32, 51].

4. В случае анизотропного тензора упругой податливости этот вариант значительно удобнее, по крайней мере для кубических кристаллов (см. п.4.2).

Напротив, преимущество первого варианта состоит в том, что для вычисления термонаведённых искажений пучка не требуется знать модуль Юнга среды. Однако это не очень существенный фактор, поскольку данный параметр, как правило, хорошо известен. Второе преимущество проявляется в некубических кристаллах, в которых из-за несимметричной части тензора деформаций необходимо учитывать поворот оптической оси или осей, для чего обычно вводится несимметричный по последней паре индексов тензор $\boldsymbol{p}$ [52–54]. Через тензоры $\boldsymbol{\pi}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ этот эффект учесть невозможно. Это очень специфическая задача, требующая отдельного рассмотрения, поскольку нахождение несимметричной части тензора деформаций в известных на данный момент аналитических решениях задачи упругости не предусматривается (см. п.4.2).

Таким образом, термонаведённые искажения пучка (см. разд. 5) мы будем выражать через пьезооптический тензор.

## 4. Решение задачи термоупругости в анизотропных средах

### 4.1. Параболическое распределение температуры при анизотропной теплопроводности

Параболическое распределение температуры является одним из простейших в задачах термоупругости. Оно возникает в цилиндрических оптических элементах в условиях изотропной теплопроводности, однородных бокового охлаждения и тепловыделения в объёме элемента. Первое из этих условий выполняется только для изотропных сред и кубических кристаллов, а также, ввиду отсутствия продольных потоков тепла, для одноосных кристаллов в ориентациях [001] и [00$\bar{1}$].

В работе [36] было показано, что такое же распределение температуры возникает в оптических элементах с произвольным видом тензора теплопроводности среды при заданной температуре на границе, что соответствует высокоэффективному охлаждению. Удобно ввести безразмерную температуру $\tau$:

$$T - T_0 = T_{\text{int}}\tau, \tag{19}$$

где $T_{\text{int}} = P_\Sigma/(4\pi L\kappa^{\text{a}})$; $P_\Sigma$ – полная мощность тепловыделения в оптическом элементе; $T_0$ – температура хладагента или хладопровода на поверхности теплового контакта. В изотропных средах в качестве $\kappa^{\text{a}}$ используется коэффициент теплопроводности $\kappa$. В анизотропных средах последний является тензором второго ранга, а

$$\kappa^{\text{a}} = \frac{\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\kappa}_\perp)}{2} = \frac{(\kappa_{xx} + \kappa_{yy})}{2}, \tag{20а}$$

где

$$\boldsymbol{\kappa}_\perp = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{xy} & \kappa_{yy} \end{pmatrix}. \tag{20б}$$

При однородном тепловыделении безразмерная температура

$$\tau(u) = 1 - u, \qquad u = \frac{r^2}{R^2}. \tag{21}$$

Таким образом, $T_{\text{int}}$ имеет смысл перепада температуры внутри оптического элемента. В частном случае изотропного тензора поперечной теплопроводности $\boldsymbol{\kappa}_\perp$, имеющем место для одноосных сред с ориентацией [001], кубических кристаллов и изотропных тел, при произвольном граничном условии решение примет вид

$$\tau(u) = 1 + \tau_0 - u, \tag{22}$$

отличающийся от (21) наличием постоянной составляющей $\tau_0 = 2\kappa/(RH) = 2/\mathrm{Bi}$, обратно пропорциональной числу Био Bi, где величина $H$ характеризует качество теплового контакта элемента с хладагентом или хладопроводом и называется коэффициентом теплопередачи или поверхностной проводимостью.

С практической точки зрения для применимости решения (19)–(21) в случае анизотропного тензора $\boldsymbol{\kappa}_\perp$ необходимо, чтобы $\mathrm{Bi} \gg 1$, причём в качестве $\kappa$ для оценки сверху взять максимальное собственное значение тензора. Это условие означает ограничение снизу на величину $H$ и выполняется при качественной организации охлаждения. Рассмотрим, например, активный элемент радиусом $R = 1$ см из кристалла YAG, обладающего хорошей теплопроводностью ($\kappa = 10$ Вт·м$^{-1}$·К$^{-1}$). При охлаждении с использованием хладопровода через хорошую термопасту или индиевую фольгу ($H = 2$ Вт·см$^{-2}$·К$^{-1}$ [50]) получим $\tau_0 = 0.1$ (Bi = 20), а при охлаждении через индиевый припой ($H = 20$ Вт·см$^{-2}$·К$^{-1}$ [55]) $\tau_0 = 0.01$ (Bi = 200).

Таким образом, в цилиндрических оптических элементах параболический профиль температуры устанавливается при однородном по объёму тепловыделении. В некубических кристаллах необходимым требованием также является высокое качество теплового контакта с хладопроводом, которое может быть достигнуто при контакте твёрдых тел.

### 4.2. Обзор аналитических решений задачи термоупругости

В работах [36, 39] было получено решение задачи упругости для длинного стержня и тонкого диска при параболическом профиле температуры и произвольных симметрии и ориентации кристалла. Найденные поля напряжений имеют сходства с полями, наблюдающимися в упругоизотропных (см. (13)) средах. Эти решения основаны на том, что уравнения механического равновесия в указанных геометриях вследствие своей независимости от продольной координаты $z$ сводятся к двумерной форме:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0\,,\\&\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0\,.\end{aligned}\tag{23а}$$

Такой системе уравнений с краевыми условиями свободной границы

$$\begin{aligned}&(\sigma_{xx}\cos\varphi+\sigma_{xy}\sin\varphi)\big|_{x^2+y^2=R^2}=0\,,\\&(\sigma_{xy}\cos\varphi+\sigma_{yy}\sin\varphi)\big|_{x^2+y^2=R^2}=0\end{aligned}\tag{23б}$$

автоматически удовлетворяют аксиально-симметричные формулы для внутриплоскостных компонент тензора напряжений ($\sigma_{ij}$ при $i, j \neq z$)

$$\begin{aligned}&\sigma_{rr}=A(u-1),\\&\sigma_{\varphi\varphi}=A(3u-1),\\&\sigma_{r\varphi}=0,\end{aligned}\tag{24а}$$

которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}=A\,(x^2+3y^2-R^2)/R^2,\\&\sigma_{yy}=A\,(3x^2+y^2-R^2)/R^2,\\&\sigma_{xy}=-2Axy/R^2\end{aligned}\tag{24б}$$

и отличаются от решения изотропной задачи пока произвольным коэффициентом $A$.

В тонком диске внеплоскостные напряжения $\sigma_{jz}$ считаются равными нулю. Решение задачи упругости при произвольном тензоре упругой податливости $\boldsymbol{s}$ было впервые опубликовано без вывода в [36]. Оно может быть получено, например, методами, изложенными в посвящённой геометрии длинного стержня работе [39], из приведённых там же уравнений. Недавно это решение было использовано для простейших ориентаций тетрагонального кристалла в [40, 41], но в более громоздкой форме, через тензор упругой жёсткости.

Коэффициент $A$ для диска, который мы будем обозначать $A_{\text{disk}}$, определяется из обобщения закона Гука (6) и уравнения совместности деформаций Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 u_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_{yy}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x\partial y}=0\,,\tag{25}$$

сводящегося в случае параболического профиля температуры к линейному алгебраическому уравнению. Перепишем результат из [36] в удобных нам обозначениях:

$$\begin{aligned}&A_{\text{disk}}=T_{\text{int}}\alpha_T^{\text{a}}a_{\text{disk}}/4\,,\quad \alpha_T^{\text{a}}=(\alpha_{T\,xx}+\alpha_{T\,yy})/2\,,\\&a_{\text{disk}}=8\,(3s_{xxxx}+3s_{yyyy}+2s_{xxyy}+4s_{xyxy})^{-1}\,.\end{aligned}\tag{26}$$

Таким образом, в тонком диске из произвольного кристалла при параболическом распределении температуры поле напряжений аксиально-симметрично. Ввиду анизотропии материального уравнения (6) поле деформаций (а также поле смещений) этой симметрией в общем случае не обладает [40, 41].

В геометрии длинного стержня решение задачи упругости для параболического радиального профиля температуры получено ранее двумя различными способами. Решение [37, 39], которое мы в дальнейшем будем называть решением Парфёнова, построено следующим образом. Вначале рассматривается задача ($\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\sigma}_0$) о стержне с закреплёнными концами (внеплоскостные деформации $u_{0jz} = 0$). Предлагается разбить соотношения (6) на две подсистемы – для внутриплоскостных и внеплоскостных деформаций соответственно:

$$\begin{pmatrix}u_{0\,xx}\\u_{0\,yy}\\2u_{0\,xy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s'_{11}&s'_{12}&s'_{16}\\s'_{12}&s'_{22}&s'_{26}\\s'_{16}&s'_{26}&s'_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{0\,xx}\\\sigma_{0\,yy}\\\sigma_{0\,xy}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s'_{13}&s'_{14}&s'_{15}\\s'_{23}&s'_{24}&s'_{25}\\s'_{36}&s'_{46}&s'_{56}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{0\,zz}\\\sigma_{0\,yz}\\\sigma_{0\,xz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_{T\,xx}\\\alpha_{T\,yy}\\2\alpha_{T\,xy}\end{pmatrix}(T-T_0),\tag{27а}$$

$$\begin{pmatrix}u_{0\,zz}\\2u_{0\,yz}\\2u_{0\,xz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s'_{33}&s'_{34}&s'_{35}\\s'_{34}&s'_{44}&s'_{45}\\s'_{35}&s'_{45}&s'_{55}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{0\,zz}\\\sigma_{0\,yz}\\\sigma_{0\,xz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}s'_{13}&s'_{23}&s'_{36}\\s'_{14}&s'_{24}&s'_{46}\\s'_{15}&s'_{25}&s'_{56}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{0\,xx}\\\sigma_{0\,yy}\\\sigma_{0\,xy}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_{T\,zz}\\2\alpha_{T\,yz}\\2\alpha_{T\,xz}\end{pmatrix}(T-T_0),\tag{27б}$$

где штрих указывает на то, что двухиндексное обозначение Ная введено относительно лабораторной системы координат, а не кристаллографической, как на рис.2,*а*. Далее из (27) предлагается исключить внеплоскостные напряжения, а затем с использованием (24б) и (25) снова получить линейное алгебраическое уравнение для $A = A_{\text{rod}}$. Решив его, мы определим внутриплоскостные напряжения, после подстановки которых в (27б) также находятся внеплоскостные напряжения.

После этого осуществляется приближённая корректировка решения на случай стержня, способного однородно по поперечному сечению расширяться в направлении оси $z$: вводятся постоянные по сечению стержня поправки $\delta\sigma_{jz} = \sigma_{jz} - \sigma_{0jz}$, такие, чтобы средние по сечению от $\sigma_{jz}$ были равны нулю. Это условие означает изменение граничного условия на торцах стержня, а именно равенство нулю приложенных к ним суммарных сил. Вносимые поправки не влияют на дифференциальные уравнения равновесия внутри стержня, но приводят к пересчёту постоянной составляющей тензора $\boldsymbol{u}$, поскольку в соответствии с (6)

$$u_{ij}-u_{0\,ij}=s_{ijkz}(\sigma_{kz}-\sigma_{0\,kz})\ .\tag{28}$$

Получаемое решение является приближённым, т. к. на торцах стержня условие механически свободной границы не выполняется в отдельных точках поперечного сечения. В силу того что система сил, приложенных к каждому торцу, уравновешена, в соответствии с принципом Сен-Венана вносимое такой подменой граничного условия возмущение решения сосредоточено в ограниченной области (длиной порядка диаметра стержня) [49].

Вследствие линейности задачи термоупругости по аналогии с тонким диском удобно ввести обозначения

$$
\begin{aligned}
&A_{\text{rod}} = T_{\text{int}}\tilde{a}_{\text{p}}/4, \\
&\sigma_{zz\,\text{rod}} = \frac{1}{2} T_{\text{int}}[\tilde{d}_{\text{p1}}(2u-1) + \tilde{d}_{\text{p2}} u \cos 2\varphi + \tilde{d}_{\text{p3}} u \sin 2\varphi]/4
\end{aligned} \tag{29}
$$

и аналогичные обозначения для $\sigma_{xz}$ и $\sigma_{yz}$.

Отметим, что в статьях [37, 39] неправильно переведён в обозначения Ная тензор теплового расширения, из-за чего в этих работах отсутствуют коэффициенты 2 в температурных членах в (27). Правила преобразования для тензоров $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\alpha}_T$ должны быть одинаковыми, чтобы уравнение (6) выполнялось одновременно в обеих формах записи. Впрочем, в частных случаях, рассмотренных в работах [37, 39], соответствующие компоненты тензора $\boldsymbol{\alpha}_T$ были равны нулю, поэтому ошибка на конечные результаты не повлияла.

Решение Парфёнова имеет существенное ограничение. Оно не гарантирует выполнения третьего уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{30а}$$

третьего граничного условия на боковой поверхности стержня

$$(\sigma_{xz}\cos\varphi + \sigma_{yz}\sin\varphi)\big|_{x^2+y^2=R^2} = 0 \tag{30б}$$

и ещё двух уравнений Сен-Венана, получающихся из (25) циклической заменой координат ($x$, $y$, $z$). Если последние уравнения не выполняются и в решении для тонкого диска, что можно списать на приближённый характер обоих решений, то специфическое для решения Парфёнова несоблюдение (30) требует отдельного внимания.

В статье [36] приведено другое решение задачи упругости в длинном стержне, будем называть его решением Сиротина. Использовался метод функции напряжений С.Г.Лехницкого [56]. Решение получено в виде

$$
\begin{aligned}
&A_{\text{rod}} = T_{\text{int}}\tilde{a}_{\text{s}}/4, \\
&\sigma_{xz\,\text{rod}} = \frac{1}{2} T_{\text{int}}[\tilde{c}_{\text{s}}(2u-1) - \tilde{c}_{\text{s}} u \cos 2\varphi - \tilde{b}_{\text{s}} u \sin 2\varphi]/4, \\
&\sigma_{yz\,\text{rod}} = \frac{1}{2} T_{\text{int}}[\tilde{b}_{\text{s}}(2u-1) + \tilde{b}_{\text{s}} u \cos 2\varphi - \tilde{c}_{\text{s}} u \sin 2\varphi]/4, \\
&\sigma_{zz\,\text{rod}} = \frac{1}{2} T_{\text{int}}[\tilde{d}_{\text{s1}}(2u-1) + \tilde{d}_{\text{s2}} u \cos 2\varphi + \tilde{d}_{\text{s3}} u \sin 2\varphi]/4,
\end{aligned} \tag{31}
$$

где выражения для коэффициентов $\tilde{a}_{\text{s}}, \tilde{b}_{\text{s}}, \tilde{c}_{\text{s}}, \tilde{d}_{sj}$ приведены в Приложении 3. Легко показать, что уравнениям (30) это решение удовлетворяет, но не гарантирует аксиальной симметричности внеплоскостных сдвиговых деформаций $u_{rz}$ и $u_{\varphi z}$, которые в решении Парфёнова постоянны в соответствии с (27б), (28), и выполнения всех трех условий совместности, включая (25). Можно показать, что $u_{zz}$ постоянна в поперечном сечении стержня в обоих решениях.

Таким образом, в обоих решениях для длинного стержня из произвольного кристалла при параболическом распределении температуры аксиально-симметричной является только внутриплоскостная часть поля напряжений и постоянная по поперечному сечению деформация $u_{zz}$. В решении Парфёнова постоянны в поперечном сечении, а следовательно, аксиально-симметричны, и остальные внеплоскостные деформации. Другие компоненты решений аксиальной симметрией в общем случае не обладают. Кроме того, стоит отметить, что в общем случае все три внеплоскостные деформации в стержне с незакреплёнными концами отличны от нуля, так что использование термина «плоская деформация» применительно к этому случаю для кристаллов произвольной симметрии имеет смысл только после дополнительных обоснований.

Беглый анализ рассмотренных выше решений задачи упругости говорит о том, что описание фотоупругого эффекта в виде $(\partial n/\partial T)_\sigma$ и (3б) удобнее, чем в виде $(\partial n/\partial T)_u$ и (3а), не только в упругоизотропных средах, но и, по крайней мере, в кубических кристаллах, для которых хорошо развита теория, базирующаяся на аксиально-симметричном решении задачи упругости (см. ссылки во Введении). Так, в тонком диске поле напряжений отличается от упругоизотропного случая, подробно исследованного ранее [22, 25], только скалярным коэффициентом, который, как показано в п.5.1, в расчёте двулучепреломления лишь перенормировывает мощность тепловыделения. В длинном стержне, кроме аналогичной перенормировки, требуется учесть изменения в напряжении $\sigma_{zz}$, а также ставшие ненулевыми $\sigma_{xz}$ и $\sigma_{yz}$. Однако эта процедура проще, чем подстановка в (3а) не обладающего в общем случае аксиальной симметрией тензора деформаций, найденного из тензора напряжений и (6).

В случае некубических сред необходимо учесть замечание о несимметричной части тензора деформаций, приведённое в конце разд.3.

### 4.3. Решение задачи упругости для кубического кристалла

Рассмотрим подробнее описанные в п.4.2 поля напряжений в длинном стержне и тонком диске в цилиндрических элементах из кубических кристаллов. Поскольку их тензор упругой податливости (рис.2,*а*) в общем случае не изотропен, напряжения будут зависеть от ориентации кристаллографических осей.

#### 4.3.1. Решение для тонкого диска

В геометрии тонкого диска при произвольной ориентации $[MNP]$, также обозначаемой углами Эйлера $(\alpha, \beta)$ (см. разд.2 и рис.1), коэффициент $a_{\text{disk}}$ (26), определяющий величину тензора напряжений, может быть записан в виде

$$
\begin{aligned}
&a_{\text{disk}} = E_{[001]}/Z_{\text{disk}}, \\
&Z_{\text{disk}} = 1 + (1 + \nu_{[001]})(1 - \xi_s)(3f_1 - 1)/4, \\
&f_1 = -(\sin^2 2\beta + \sin^2 2\alpha \sin^4 \beta)/4 \\
&\quad = -\frac{M^2N^2 + M^2P^2 + N^2P^2}{(M^2 + N^2 + P^2)^2},
\end{aligned} \tag{32}
$$

где

$$\xi_s = \frac{s_{66}}{2(s_{11} - s_{12})} = \frac{2s_{abab}}{s_{aaaa} - s_{aabb}} \tag{33}$$

– параметр упругой анизотропии, введённый, например, в [6, 18]. В средах с анизотропным тензором $\boldsymbol{s}$ по аналогии с изотропными средами принято использовать модуль

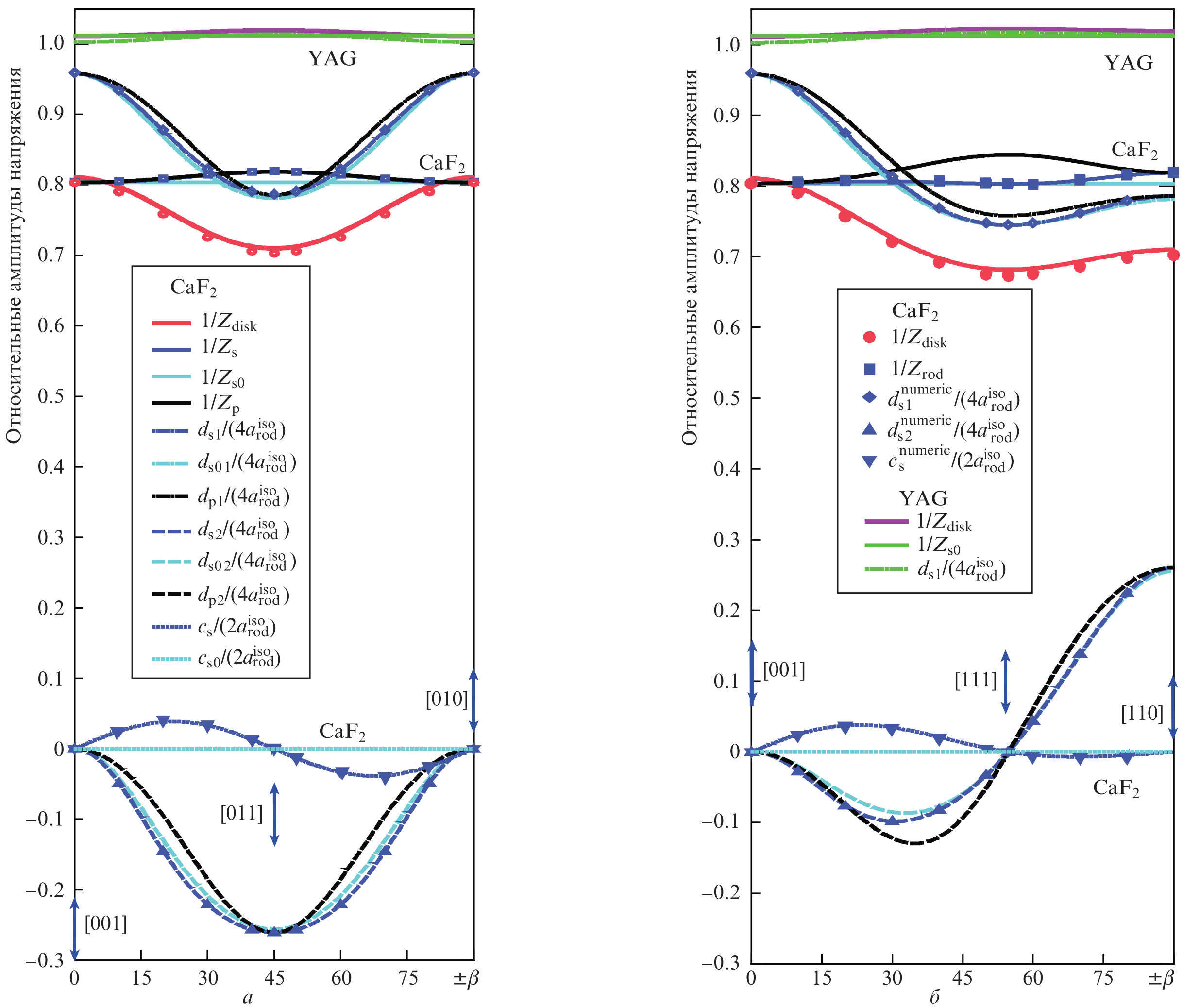


Рис.3. Аналитически (кривые) и численно (точки) рассчитанные на примере $CaF_2$ напряжения как функции угла Эйлера $\beta$ в ориентациях $[M0N]$ (угол Эйлера $\alpha = 0$) (*а*) и $[MMN]$ ($\alpha = \pi/4$) (*б*). Для тонкого диска: $1/Z_{disk}$ (красная кривая, ○). Для длинного стержня: полное (синие кривые) и упрощённое (голубые кривые) решения Сиротина, решение Парфёнова (чёрные кривые); $1/Z_{s0p}$ (сплошные кривые, □), $d_{s1\,01\,p1}\times(4a_{rod}^{iso})^{-1}$ (штрихпунктирные кривые, ◊), $\bar{d}_{s2\,02\,p2}/(2a_{rod}^{iso})$ (штриховые кривые, ) и $\bar{c}_{s0}/(2a_{rod}^{iso})$ (пунктирные кривые, ▿). В верхней части рисунка для сравнения приведены кривые для YAG : $1/Z_{disk}$ (сплошная малиновая кривая), $1/Z_s$ (сплошная зелёная кривая) и $d_{s1}/(4a_{rod}^{iso})$ (штрихпунктирная зелёная кривая). Цветной вариант рис.3 помещён на сайте нашего журнала http://www.quantum-electron.ru.

Юнга и коэффициент Пуассона, являющиеся в этом случае функциями направления (коэффициент Пуассона может быть также введён как функция двух ортогональных направлений) [6, 57, 58]. В формуле (32) используются эти параметры в направлении [001]:

$$E_{[001]} = s_{11}^{-1}, \qquad \nu_{[001]} = -s_{12}/s_{11}. \tag{34}$$

В изотропной среде выполняется (13), поэтому $\xi_s = 1$ и

$$a_{disk}^{iso} = E. \tag{35}$$

Следовательно, в предположении, что тензор упругой податливости изотропной среды отличается от анизотропного только величиной $s_{66}$,

$$Z_{disk} = \frac{a_{disk}^{iso}}{a_{disk}}. \tag{36}$$

Для направления $[MNP]$ в кристалле модуль Юнга [6, 58]

$$E_{[MNP]} = E_{[001]}[1 + 2(1 + \nu_{[001]})(1 - \xi_s)f_1]^{-1} \tag{37}$$

и не совпадает с $a_{disk}$. Необходимо также отметить, что положительная определённость тензора $s$ накладывает на упругие свойства кристаллов следующие ограничения [6]:

$$E_{[001]} \geqslant 0, \qquad -1 \leqslant \nu_{[001]} \leqslant 1/2, \qquad \xi_s \geqslant 0. \tag{38}$$

В простейших ориентациях кристалла [001], [011] и [111]

$$f_{1\,[001]} = 0, \qquad f_{1\,[011]} = -1/4, \qquad f_{1\,[111]} = -1/3. \tag{39}$$

Ориентации [001] и [111] являются точками глобального максимума и минимума величин $f_1$ и $Z_{disk}$.

На рис.3 приведены зависимости величины $1/Z_{disk}$ от ориентации кристаллографических осей в активном элементе из обладающего существенной упругой анизотропией $CaF_2$ и из слабо упругоанизотропного YAG (параметры $\xi_s$ даны в табл.1). Вариация $1/Z_{disk}$ в $CaF_2$ составляет примерно 13%, а в YAG она пренебрежимо мала.

Для расчёта тепловой линзы нам также понадобится нормальная продольная деформация $u_{zz}$. Расчёт по формуле (6) даёт

$$u_{zz} = \alpha_T(T - T_0) + (s_{xxzz} + s_{yyzz})(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})/2$$
$$+ [(s_{xxzz} - s_{yyzz})\cos 2\varphi + 2s_{xyzz}\sin 2\varphi](\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/2 \quad (40)$$

и далее

$$u_{zz} = \alpha_T T_{\rm int}\left\{(1-u) + \frac{\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\left(\frac{1}{2} - u\right) + \frac{1+\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\left[F_{1\rm s}\left(\frac{1}{2} - u\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + F_{2\rm s}\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi + F_{3\rm s}\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi\right]\right\}, \quad (41)$$

где выражения для $F_{is}$, $i = 1, ..., 3$ приведены в Приложении 3, а $\varphi_\Phi$ определена в (1).

### 4.3.2. Решения для длинного стержня

В кубическом кристалле тензор напряжений пропорционален скалярному коэффициенту теплового расширения, поэтому для стержня удобно в выражения (29), (31) ввести коэффициенты

$$\{a_{\rm p}, d_{{\rm p}i}, a_{\rm s}, b_{\rm s}, c_{\rm s}, d_{si}\} = \alpha_T^{-1}\{\tilde a_{\rm p}, \tilde d_{{\rm p}i}, \tilde a_{\rm s}, \tilde b_{\rm s}, \tilde c_{\rm s}, \tilde d_{si}\}\ , \quad (42)$$

от него не зависящие ($i = 1,...,3$). Решение Парфёнова дано в неявном виде и потому не поддаётся простому анализу. Решение Сиротина (П2.1)–(П2.3), очень громоздкое в общем виде, в ряде частных случаев может быть существенно упрощено. Для удобства дальнейшего изложения мы будем рассматривать решения задачи упругости (29) и (31) не в лабораторной системе координат $(x, y, z)$, а в привязанной к активному элементу системе $(x'', y'', z)$; поворот на угол $\Phi$ будем учитывать отдельно. Величины $a_{\rm p}$, $d_{\rm p1}, a_{\rm s}, d_{\rm s1}$ одинаковы в обеих системах координат, а остальные коэффициенты (42) переобозначим:

$$\{\bar d_{{\rm p}i}, \bar b_{\rm s}, \bar c_{\rm s}, \bar d_{si}\} = \{d_{{\rm p}i}, b_{\rm s}, c_{\rm s}, d_{si}\}\big|_{\Phi=0}. \quad (43)$$

В работе [36], кроме общего решения, были получены упрощённые формулы для некоторых простейших ориентаций кристаллов различной симметрии. Для кубических кристаллов таковыми являются ориентации [001], [011] и [111], а соответствующие решения приведены в (П2.6). В приближении изотропной задачи упругости как общее решение, так и выражения (П2.6) для всех трёх ориентаций приводятся к привычному виду

$$a_{\rm rod}^{\rm iso} = E/(1-\nu) = (s_{11} + s_{12})^{-1},$$
$$d_{\rm rod1}^{\rm iso} = 4a_{\rm rod}^{\rm iso}, \quad (44)$$
$$b_{\rm rod}^{\rm iso} = c_{\rm rod}^{\rm iso} = d_{\rm rod\,2}^{\rm iso} = d_{\rm rod\,3}^{\rm iso} = 0.$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно по аналогии с диском ввести коэффициенты

$$Z_{\rm p} = a_{\rm rod}^{\rm iso}/a_{\rm p},$$
$$Z_{\rm s} = a_{\rm rod}^{\rm iso}/a_{\rm s}, \quad (45)$$
$$\{D_1, D_2, D_3, D_b, D_c\} = \{d_{\rm s1}, \bar d_{\rm s2}, \bar d_{\rm s3}, \bar b_{\rm s}, \bar c_{\rm s}\}/(4a_{\rm s}).$$

Величины $1/Z_{\rm sp}$ представляют собой магнитуды внутриплоскостных напряжений в стержне произвольной ориентации в решениях Сиротина и Парфёнова, нормированные на магнитуду внутриплоскостных напряжений в упругоизотропном стержне, отличающемся от анизотропного величиной $s_{66}$ (см. (13), (33), (34)). Величины $D_i$ ($i = 1, 2, 3, b, c$) являются магнитудами различных слагаемых компоненты $\sigma_{zz}$ ($i = 1, 2, 3$), а также компонент $\sigma_{x''z}$ и $\sigma_{y''z}$ ($i = b, c$) в решении Сиротина, нормированными на магнитуду внутриплоскостных напряжений в той же ориентации. Величины $D_i/Z_{\rm s} = \{\bar d_{si}, \bar b_{\rm s}, \bar c_{\rm s}\}/(4a_{\rm rod}^{\rm iso})$ представляют собой магнитуды тех же составляющих напряжений, нормированные на магнитуду внутриплоскостных напряжений в упругоизотропном стержне.

Как и в случае тонкого диска, в обоих решениях для длинного стержня внутриплоскостные напряжения отличаются от упругоизотропных множителями $1/Z_{\rm sp}$ (рис.3), которые, как и для диска, зависят от ориентации кристалла, но значительно слабее, особенно слабо – в решении Сиротина. Кроме того, внеплоскостные напряжения необходимо рассчитывать по формулам, отличным от формул для упругоизотропного случая.

Тензор деформаций в длинном стержне из кубического кристалла имеет следующие свойства: в решении Парфёнова деформации $u_{rz} = u_{\varphi z} = 0$, $u_{zz}$ также постоянна по сечению,

$$u_{zz} = \alpha_T T_{\rm int}/2, \quad (46)$$

т. е. такое состояние стержня в этих средах можно считать обобщённым плоскодеформированным, как и в случае изотропной упругости. В решении Сиротина деформация $u_{zz}$ такая же, а $u_{rz}$ и $u_{\varphi z}$ отличны от нуля и зависят от координат в поперечном сечении активного элемента.

Мы изучили внеплоскостные скалывающие напряжения и внеплоскостные сдвиговые деформации в решении Сиротина подробнее. Максимальное значение внеплоскостной недиагональной составляющей произвольного симметричного тензора 2-го ранга $\boldsymbol{X}$ в заданной точке есть

$$X_\perp = \max_{\mu\perp z}(X_{\mu z}) = \sqrt{X_{rz}^2 + X_{\varphi z}^2}\,, \quad (47)$$

а максимальное значение диагональной внутриплоскостной составляющей

$$X_\parallel = \max_{\mu\perp z}(X_{\mu\mu}) = \frac{1}{2}\Big[|X_{rr} + X_{\varphi\varphi}| + \sqrt{(X_{rr} - X_{\varphi\varphi})^2 + 4X_{r\varphi}^2}\Big]. \quad (48)$$

Мы сравнили между собой максимальные по поперечному сечению оптического элемента нормированные значения $\sigma_\perp$ и $u_\perp$ в оптических элементах из различных кубических материалов (табл.1) различных ориентаций (отметим, что компоненты напряжений достигают максимума на образующей цилиндра):

$$M_1 = \max_S(\sigma_\perp)/\max_S(\sigma_\parallel) = \sqrt{b_{\rm s}^2 + c_{\rm s}^2}/(2a_{\rm s}),$$
$$M_2 = \max_S(\sigma_\perp)/\max_S(\sigma_{zz}) = 2\sqrt{b_{\rm s}^2 + c_{\rm s}^2}/\left(d_{\rm s1} + \sqrt{d_{\rm s2}^2 + d_{\rm s3}^2}\right),$$
$$N_1 = \max_S(u_\perp)/\max_S(u_\parallel), \quad (49)$$

Табл.1. Материальные свойства использованных в расчётах реальных и модельных m3m-кристаллов.

| Среда | $\xi_\pi$ | $\xi_s$ | $\nu_{[001]}$ |
|---|---|---|---|
| $CaF_2$ | −0.47 [59, 60] | 1.77 [61] | 0.212 [61] |
| $SrF_2$ | −0.284 [60] | 1.25 [62] | 0.266 [62] |
| KCl | −1.2 [16] | 2.69 [62] | 0.135 [62] |
| YAG | 3.2 [2] | 0.965 [62] | 0.25 [62] |
| 1 | 3.2 | 1.77 | 0.212 |
| 2 | 3.2 | 0.44 | 0.212 |

$$N_2 = \max_S(u_\perp)/\max_S(u_{zz}).$$

В наших расчётах $M_i$ составляли единицы процентов, тогда как $N_i$ находились в пределах 7% – 15%, превышая $M_i$ в 3–6 раз. Из этого мы заключили, что, вопреки нашим интуитивным предположениям, решение задачи упругости в анизотропном стержне ближе к плосконапряжённому состоянию, характерному для тонкого диска, чем к плоскодеформированному, по крайней мере в кубических кристаллах. Таким образом, считать решение Сиротина обобщением плоской деформации, по нашему мнению, нельзя.

#### 4.3.3. Упрощённое решение Сиротина для стержня

Важным частным случаем решения Сиротина является случай, когда $\xi_s$ слабо отличается от единицы. Анализ решения показал, что при

$$\frac{1}{2} < \xi_s < 2, \qquad 0 < \nu_{[001]} < 0.4 \tag{50}$$

величина $a_s$ от ориентации практически не зависит, а $\bar{b}_s$ и $\bar{c}_s$ малы (т. е. малы $\sigma_{x''z}$ и $\sigma_{y''z}$; часть зависимостей приведена на рис.3). Пренебрегая этими малыми поправками, можно упростить формулы (П2.3) (с учётом (42)) до вида

$$\begin{aligned}
&\{d_{s1}, \bar{d}_{s2}, \bar{d}_{s3}\} \approx \{d_{01}, \bar{d}_{02}, \bar{d}_{03}\} = 4a_0\{D_{01}, D_{02}, D_{03}\},\\
&\{\bar{b}_s, \bar{c}_s\} \approx \{\bar{b}_0, \bar{c}_0\} = 0,\\
&D_{01} = \frac{(s_{11}a_0)^{-1} + \nu_{[001]} + (1+\nu_{[001]})F_{1s}}{1+2(1+\nu_{[001]})F_{1s}},\\
&D_{02} = -D_0F_{2s},\\
&D_{03} = -D_0F_{3s},\\
&D_0 = \frac{1+\nu_{[001]}}{1+2(1+\nu_{[001]})F_{1s}},
\end{aligned} \tag{51}$$

пригодного для аналитического анализа (см. обозначения в Приложении 3), где в качестве $a_0$ можно использовать любое из выражений для $a_s$ из (П2.6), например исходя из близости исследуемой ориентации к простейшим. В настоящей работе мы для определённости будем использовать выражение для $a_{s[001]}$. Для удобства дальнейшего анализа введём по аналогии с полными решениями множитель

$$Z_0 = a_{\mathrm{rod}}^{\mathrm{iso}}/a_0, \tag{52}$$

являющийся в данном приближении постоянным. В приближении изотропной задачи упругости $Z_0 = D_{01} = 1$, $D_{02} = D_{03} = 0$.

#### 4.3.4. Численная проверка аналитических решений задачи упругости

Для проверки рассмотренных выше аналитических решений задачи упругости мы в частном случае кубического кристалла рассчитали поля напряжений в длинном стержне и тонком диске при помощи трёхмерного коммерческого FEM-кода для различных $\xi_s$ и $\nu_{[001]}$. Аспектное отношение $L/2R$ увеличивалось в стержне и уменьшалось в диске до тех пор, пока численное решение не начинало совпадать с одним из аналитических. Полученные зависимости некоторых напряжений в YAG и $CaF_2$ в среднем по продольной координате $z$ сечении для $L/2R = 5$ и $L/2R = 1/40$ приведены на рис.3 как функции угла Эйлера $\beta$ для ориентаций $[M0N]$ ($\alpha = 0$) и $[MMN]$ ($\alpha = \pi/4$) в сравнении с аналитическими кривыми. Из рис.3 можно заключить, что решение для диска и решение Сиротина для стержня хорошо согласуются с численным, тогда как решение Парфёнова заметно от него отклоняется за исключением окрестностей ориентаций [001] и [101], в которых два аналитических решения для стержня совпадают.

Из рис.3 также видно, что упрощённое решение хорошо аппроксимирует полное решение Сиротина, за исключением напряжений $\sigma_{jz}$, которыми мы пренебрегли при упрощении: разность решений не превышает единиц процентов и в целом меньше разности решений Парфёнова и Сиротина.

Таким образом, в дальнейшем мы будем считать достаточно точными для практического использования аналитическое решение для диска и решение Сиротина для стержня. Данный результат получен нами только для кубических кристаллов, но мы предполагаем, что он справедлив для кристаллов любой симметрии.

## 5. Расчёт термооптики в упругоанизотропных кубических кристаллах

Искажения пучка, наводимые активным элементом с линейным двулучепреломлением, не зависящим от продольной координаты $z$, определяются тремя функциями поперечных координат $(x, y)$: средним арифметическим $\delta_0$ набегов фаз собственных поляризаций (индексы I и II в выражении (12)), углом наклона этих поляризаций $\Psi$ и разностью набегов их фаз $\delta$. Рассмотрим пучок, исходно линейно поляризованный под углом $\theta$ в плоскости $xy$ и прошедший через такой активный элемент.

В отсутствие циркулярного двулучепреломления локальной степенью деполяризации пучка принято называть отношение интенсивности поля, поляризованного после прохождения одного или нескольких двулучепреломляющих элементов ортогонально исходной поляризации пучка, к его полной интенсивности. Интегральной степенью деполяризации называют отношение соответствующих мощностей. В приближении плоских волн методом матриц Джонса [63] несложно получить, что после прохождения пучком одного активного элемента, результирующий диэлектрический тензор которого (10) не зависит от $z$, локальная степень термонаведённой деполяризации может быть вычислена по формуле

$$\Gamma(x,y) = \sin^2(\delta/2)\sin^2 2(\Psi - \theta). \tag{53}$$

При слабом двулучепреломлении она упрощается до

$$\Gamma_0(x,y) \approx \frac{1}{4}\delta^2 \sin^2 2(\Psi-\theta) \tag{54}$$

и, как легко видеть, определяется линейной комбинацией величин $\delta\cos2\Psi$ и $\delta\sin2\Psi$ с коэффициентами, зависящими от угла наклона входной поляризации.

Интегральная степень деполяризации по определению представляет собой локальную степень деполяризации, усреднённую по входному пробному пучку:

$$\gamma = \left[\iint_S |\boldsymbol{E}_{\rm in}|^2 {\rm d}S\right]^{-1} \iint_S \Gamma |\boldsymbol{E}_{\rm in}|^2 {\rm d}S, \tag{55}$$

где $\boldsymbol{E}_{\rm in}$ – напряжённость поля (здесь и далее для простоты полагаем, что поглощение и усиление пробного излучения в среде отсутствуют). При сильном двулучепреломлении $\gamma$ стремится к установившемуся значению

$$\gamma_\infty = \left[\iint_S |\boldsymbol{E}_{\rm in}|^2 {\rm d}S\right]^{-1} \iint_S \gamma_{\infty\,{\rm loc}} |\boldsymbol{E}_{\rm in}|^2 {\rm d}S, \tag{56}$$

где

$$\gamma_{\infty\,{\rm loc}} = \langle \Gamma_\infty(x,y)\rangle = \frac{1}{2}\sin^2 2(\Psi-\theta) \tag{57}$$

(см., напр., [25]). Величина $\gamma_{\infty\,{\rm loc}}$ представляет собой локальную степень деполяризации (53), усреднённую по небольшой области поперечного сечения, в границах которой в условиях сильного двулучепреломления разность фаз изменяется на величину, много большую 2π, в то время как поля температуры и напряжений, а также профиль интенсивности пробного пучка меняются слабо.

Тем же методом искажение фазы исходно поляризованной компоненты пучка может быть найдено в виде

$$\Delta\varphi(x,y) = \delta_0 + \arctan[\tan(\delta/2)\cos 2(\Psi-\theta)]. \tag{58}$$

В приближении изотропной задачи упругости было показано, что зависимость термонаведённых искажений пучка от ориентации кристаллографических осей в m3m-кристаллах определяется параметром фотоупругой анизотропии $\xi$, который, в зависимости от выбора между (3а) и (3б), может быть записан в виде упругооптического ($\xi_p$) либо пьезооптического ($\xi_\pi$) отношений [21, 22, 25]:

$$\xi_p = 2p_{66}/p_{\rm S} = 2p_{abab}/p_{\rm S}, \tag{59а}$$

$$\xi_\pi = \pi_{66}/\pi_{\rm S} = 2\pi_{abab}/\pi_{\rm S} \tag{59б}$$

(см. обозначения в (17)). Несложно показать, что (см. (4))

$$\xi_\pi = \xi_p \xi_s, \tag{60}$$

поэтому в упругоанизотропных кристаллах ($\xi_s \neq 1$) отношения (59) различаются. В m3-кристаллах, кроме параметра $\xi$, необходимо определить второй параметр фотоупругой анизотропии [25], не зависящий от формы записи выражения (3):

$$\xi_{\rm d} = (\pi_{12}-\pi_{21})/\pi_{\rm S} = (p_{12}-p_{21})/p_{\rm S}. \tag{61}$$

Поскольку мы считаем описание фотоупругого эффекта в виде (3б) предпочтительным, а тензор $\boldsymbol{\sigma}$ в упругоанизотропных кристаллах полностью либо частично аксиально-симметричен (см. п.4.2), формулы для термонаведённого изменения диэлектрической проницаемости будут похожи на упругоизотропные выражения из работ [21, 22, 25], в которых для $\xi$ используется (59б).

### 5.1. Искажения пучка в упругоанизотропных цилиндрических активных элементах

В соответствии с формулой (10б) величины $\Psi, \delta$ и $\delta_0$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
\cot 2\Psi(r,\varphi) &= \frac{\Delta B_{\sigma\,xx} - \Delta B_{\sigma\,yy}}{2\Delta B_{\sigma\,xy}},\\
\delta(r,\varphi) &= k_0 L(n_{\rm I} - n_{\rm II}) = -\frac{k_0 L n_0^3}{2}\frac{2\Delta B_{\sigma\,xy}}{\sin 2\Psi}\\
&= -\frac{k_0 L n_0^3}{2}\frac{(\Delta B_{\sigma\,xx} - \Delta B_{\sigma\,yy})}{\cos 2\Psi},\\
\delta_0(r,\varphi) &= k_0 L(n_0-1)u_{zz} + k_0 L[(n_{\rm I}+n_{\rm II})/2 - n_0]\\
&= k_0 L[(n_0-1)u_{zz} + \beta_\sigma (T - T_0)\\
&\quad - (n_0^3/2)(\Delta B_{\sigma\,xx} + \Delta B_{\sigma\,yy})/2].
\end{aligned} \tag{62}$$

Здесь и далее мы для определённости полагаем, что на торцы элемента не нанесено отражающих покрытий, а показатель преломления окружающей среды равен единице. В противном случае слагаемое в $\delta_0$, отвечающее за изменение длины элемента (пропорциональное $(n_0-1)u_{zz}$), должно быть соответствующим образом скорректировано.

Подставив в эти выражения (3б), тензор напряжений из пп.4.3.1 и пьезооптический тензор кубического кристалла (см. рис.2) при произвольной ориентации кристаллографических осей, в геометрии тонкого диска получим

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= \frac{p}{2Q_{\rm disk}}\Big\{\beta_\sigma(1-u) + \alpha_T(n_0-1)\\
&\quad\times\Big[(1-u) + \frac{\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\Big(\frac{1}{2}-u\Big)\Big] + \alpha_T(n_0-1)\frac{1+\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\\
&\quad\times\Big[F_{1\,\rm s}\Big(\frac{1}{2}-u\Big) + \frac{u}{2}(F_{2\,\rm s}\cos 2\varphi_\Phi + F_{3\,\rm s}\sin 2\varphi_\Phi)\Big]\Big\}\\
&+\frac{p}{2Z_{\rm disk}}\Big[(1+2\zeta_\pi + F_1)\Big(\frac{1}{2}-u\Big) + \frac{u}{2}(F_2\cos 2\varphi_\Phi + F_3\sin 2\varphi_\Phi)\Big],\\
\delta\cos 2\Psi &= \frac{p}{Z_{\rm disk}}\Big[A_{1\,\Phi}\Big(\frac{1}{2}-u\Big) + \frac{u}{2}(A_{2\,\Phi}\cos 2\varphi_\Phi + A_{3\,\Phi}\sin 2\varphi_\Phi)\Big],\\
\delta\sin 2\Psi &= \frac{p}{Z_{\rm disk}}\Big[B_{1\,\Phi}\Big(\frac{1}{2}-u\Big) + \frac{u}{2}(B_{2\,\Phi}\cos 2\varphi_\Phi + B_{3\,\Phi}\sin 2\varphi_\Phi)\Big],
\end{aligned} \tag{63}$$

где

$$p = QP_\Sigma/(\lambda\kappa) \tag{64}$$

– безразмерная мощность тепловыделения; величина $u$ определена в (21); $\lambda$ – длина волны в свободном пространстве, а выражения для $A_{i\,\Phi}$, $B_{i\,\Phi}$, $F_i$ и $F_{is}$, $i = 1, .., 3$ приведены в Приложении 3. Выражения (63) даны в виде, наиболее удобном при слабом двулучепреломлении.

Выполнив ту же подстановку с использованием решения Сиротина из пп.4.3.2, для длинного стержня получим

$$\delta_0 = \frac{p}{2Q_{\rm rod}}\left[\beta_\sigma(1-u) + \frac{\alpha_T}{2}(n_0-1)\right] + \frac{p}{2Z_{\rm s}}\left\{(1+4\zeta_\pi)\left(\frac{1}{2}-u\right)\right.$$
$$-2\zeta_\pi\left[(D_1-1)\left(u-\frac{1}{2}\right)+\frac{u}{2}(D_2\cos 2\varphi_\Phi + D_3\sin 2\varphi_\Phi)\right]$$
$$+[(2D_1-1)F_1 - 2(D_bF_4 + D_cF_5)]\left(u-\frac{1}{2}\right)$$
$$+[F_2 + 2D_2F_1 + 2(D_cF_5 - D_bF_4)]\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi$$
$$\left.+[F_3 + 2D_3F_1 + 2(D_cF_4 + D_bF_5)]\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi\right\}, \tag{65}$$

$$\delta\cos 2\Psi = \frac{p}{Z_{\rm s}}\left\{[(2D_1-1)A_{1\Phi} - 2(D_bA_{4\Phi} + D_cA_{5\Phi})]\left(u-\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$+[A_{2\Phi} + 2D_2A_{1\Phi} + 2(D_cA_{5\Phi} - D_bA_{4\Phi})]\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi$$
$$\left.+[A_{3\Phi} + 2D_3A_{1\Phi} + 2(D_cA_{4\Phi} + D_bA_{5\Phi})]\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi\right\},$$

$$\delta\sin 2\Psi = \frac{p}{Z_{\rm s}}\left\{[(2D_1-1)B_{1\Phi} - 2(D_bB_{4\Phi} + D_cB_{5\Phi})]\left(u-\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$+[B_{2\Phi} + 2D_2B_{1\Phi} + 2(D_cB_{5\Phi} - D_bB_{4\Phi})]\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi$$
$$\left.+[B_{3\Phi} + 2D_3B_{1\Phi} + 2(D_cB_{4\Phi} + D_bB_{5\Phi})]\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi\right\},$$

где выражения для $A_{i\Phi}, B_{i\Phi}$ и $F_i$ ($i = 4, 5$) также приведены в Приложении 3. Для сохранения общности формы записи с упругоизотропным случаем мы ввели термооптическую постоянную $Q$ следующим образом:

$$Q_{\rm disk} = \frac{1}{4}\alpha_T n_0^3 \pi_{\rm S}/s_{11} = \frac{1}{4}\alpha_T n_0^3 E_{[001]}\pi_{\rm S},$$
$$Q_{\rm rod} = \frac{1}{4}\alpha_T n_0^3 \pi_{\rm S}/(s_{11}+s_{22}) = Q_{\rm disk}/(1-\nu_{[001]}). \tag{66}$$

Легко видеть, что в упругоизотропном случае (13) выражения (66) принимают вид (16).

Выражения (63), (65) схожи с упругоизотропными, однако имеют ряд важных отличий, помимо иного определения величины $Q$. В тонком диске слагаемые для среднего арифметического набегов фаз $\delta_0$, отвечающие за изменение длины кристалла (пропорциональные $\alpha_T(n_0-1)$), теперь зависят от ориентации кристалла и в общем случае не являются аксиально-симметричными. В стержне соответствующее слагаемое в нашем приближении постоянно по сечению активного элемента. Слагаемые в набегах фаз, вызванные фотоупругим эффектом, имеют множитель $1/Z$, также зависящий от ориентации кристалла (легко показать, что $\Psi$ от $Z$ не зависит). В тонком диске это единственное отличие двулучепреломления от упругоизотропного случая. Следовательно, при слабом двулучепреломлении степень деполяризации изменится пропорционально квадрату разности фаз $\delta$ в $Z_{\rm disk}^{-2}$ раз, а при сильном двулучепреломлении, когда степень деполяризации $\gamma_\infty$ (56), (57) зависит только от угла наклона собственных поляризаций $\Psi$, останется прежней. В длинном стержне формулы для упругоанизотропного случая содержат новые слагаемые, влияющие как на $\delta$, так и на $\Psi$. Следовательно, в этом случае зависимость степени деполяризации от ориентации кристалла является сложной функцией параметров фотоупругой и упругой анизотропий.

В приближении (51) выражения (65) упрощаются к следующему виду:

$$\delta_0 \approx \frac{p}{2Q_{\rm rod}}\left[\beta_\sigma(1-u) + \frac{\alpha_T}{2}(n_0-1)\right] + \frac{p}{2Z_0}\left\{(1+4\zeta_\pi)\left(\frac{1}{2}-u\right)\right.$$
$$-2\zeta_\pi\left[(D_{01}-1)\left(u-\frac{1}{2}\right) - D_0\frac{u}{2}(F_{2\rm s}\cos 2\varphi_\Phi + F_{3\rm s}\sin 2\varphi_\Phi)\right]$$
$$+(2D_{01}-1)F_1\left(u-\frac{1}{2}\right) + \frac{u}{2}[(F_2 - 2D_0F_{2\rm s}F_1)\cos 2\varphi_\Phi$$
$$\left.+\ (F_3 - 2D_0F_{3\rm s}F_1)\sin 2\varphi_\Phi]\right\}, \tag{67}$$

$$\delta\cos 2\Psi \approx \frac{p}{Z_0}\left[(2D_{01}-1)A_{1\Phi}\left(u-\frac{1}{2}\right) + (A_{2\Phi} - 2D_0F_{2\rm s}A_{1\Phi})\right.$$
$$\left.\times\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi + (A_{3\Phi} - 2D_0F_{3\rm s}A_{1\Phi})\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi\right],$$

$$\delta\sin 2\Psi \approx \frac{p}{Z_0}\left[(2D_{01}-1)B_{1\Phi}\left(u-\frac{1}{2}\right) + (B_{2\Phi} - 2D_0F_{2\rm s}B_{1\Phi})\right.$$
$$\left.\times\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi + (B_{3\Phi} - 2D_0F_{3\rm s}B_{1\Phi})\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi\right].$$

Формулы (63), (65) и (67) могут быть также записаны иначе: они останутся верными, если опустить индекс $\Phi$ у коэффициентов $A_i$ и $B_i$ и заменить $\Psi$ на

$$\Psi_\Phi = \Psi + \Phi. \tag{68}$$

В частности, при $\Phi = 0$ для упрощения этих формул достаточно опустить индекс $\Phi$ везде.

В частном случае $\alpha = 0$ (ориентации $[M0N]$, см. рис.1,*д*) в тонком диске

$$\delta_0 = \frac{p}{2Q_{\rm disk}}\left\{\beta_\sigma(1-u) + \alpha_T(n_0-1)\right.$$
$$\times\left[(1-u) + \frac{\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\left(\frac{1}{2}-u\right)\right] + \alpha_T(n_0-1)\frac{1+\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}$$
$$\left.\times\left[F_{1\rm s}\left(\frac{1}{2}-u\right) + F_{2\rm s}\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi\right]\right\}$$
$$+\frac{p}{2Z_{\rm disk}}\left[(1+2\zeta_\pi+F_1)\left(\frac{1}{2}-u\right) + F_2\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi\right], \tag{69}$$

$$\delta\cos 2\Psi_\Phi = \frac{p}{Z_{\rm disk}}\left[A_1\left(\frac{1}{2}-u\right) + A_2\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi\right],$$

$$\delta\sin 2\Psi_\Phi = \frac{p}{Z_{\rm disk}}\xi_\pi\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi,$$

а в длинном стержне $D_b = D_3 = 0$, и

$$\delta_0 = \frac{p}{2Q_{\rm rod}}\left[\beta_\sigma(1-u) + \frac{\alpha_T}{2}(n_0-1)\right] + \frac{p}{2Z_{\rm s}}\left\{(1+4\zeta_\pi)\left(\frac{1}{2}-u\right)\right.$$
$$-2\zeta_\pi\left[(D_1-1)\left(u-\frac{1}{2}\right) + \frac{u}{2}D_2\cos 2\varphi_\Phi\right]$$
$$+[(2D_1-1)F_1 - 2D_cF_5]\left(u-\frac{1}{2}\right)$$
$$\left.+(F_2 + 2D_2F_1 + 2D_cF_5)\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi\right\}, \tag{70}$$

$$\delta\cos 2\Psi_\Phi = \frac{p}{Z_{\rm s}}\left\{[(2D_1-1)A_1 - 2D_cA_5]\left(u-\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left.+(A_2 + 2D_2A_1 + 2D_cA_5)\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi\right\},$$

$$\delta \sin 2\Psi_\Phi = \frac{p}{Z_s}\xi_\pi \frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi .$$

Во избежание путаницы отметим, что при $\beta = \pi/2$ (ориентации $[NM0]$, эквивалентные $[M0N]$) $D_cF_5 = D_cA_5 = 0$, зато отличны от нуля $D_bF_4$ и $D_bA_4$, в остальном формулы такие же. В приближении (51) выражения (70) принимают вид

$$\delta_0 \approx \frac{p}{2Q_{\rm rod}}\Big[\beta_\sigma(1-u) + \frac{\alpha_T}{2}(n_0-1)\Big] + \frac{p}{2Z_0}\Big\{(1+4\zeta_\pi)\Big(\frac{1}{2}-u\Big)$$
$$-2\zeta_\pi\Big[(D_{01}-1)\Big(u-\frac{1}{2}\Big) + D_0\frac{u}{2}F_{2\rm s}\cos 2\varphi_\Phi\Big]$$
$$+(2D_{01}-1)F_1\Big(u-\frac{1}{2}\Big) + \frac{u}{2}(F_2 - 2D_0F_{2\,\rm s}F_1)\cos 2\varphi_\phi\Big\},$$
$$\delta\cos 2\Psi_\Phi \approx \frac{p}{Z_0}\Big[(2D_{01}-1)A_1\Big(u-\frac{1}{2}\Big) \qquad (71)$$
$$+(A_2 - 2D_0F_{2\rm s}A_1)\frac{u}{2}\cos 2\varphi_\Phi\Big],$$
$$\delta\sin 2\Psi_\Phi \approx \frac{p}{Z_0}\,\xi_\pi\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi .$$

В m3m-кристаллах при $\alpha = \pi/4$ (ориентации $[MMN]$, см. рис.1,*е*) в тонком диске

$$\delta\sin 2\Psi_\Phi = \frac{p}{Z_{\rm disk}}B_3\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi, \qquad (72)$$

в длинном стержне снова $D_b = D_3 = 0$, и

$$\delta\sin 2\Psi_\Phi = \frac{p}{Z_s}(B_3 + 2D_cB_4)\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi, \qquad (73)$$

а в приближении (51)

$$\delta\sin 2\Psi_\Phi \approx \frac{p}{Z_0}B_3\frac{u}{2}\sin 2\varphi_\Phi . \qquad (74)$$

Величины $\delta_0$ и $\delta\cos 2\Psi_\Phi$ в этих случаях определяются выражениями (69), (70) и (71) (значения всех коэффициентов должны быть пересчитаны с учетом изменения угла $\alpha$). Также напомним, что в простейших ориентациях [001], [011] и [111] возможно дальнейшее упрощение выражений (69)–(74) с использованием формул (П2.6).

### 5.2. Выделенные ориентации в упругоанизотропных кристаллах

В работе [22] утверждается, что в упругоизотропном m3m-кристалле в отсутствие критической ориентации [[C]] наилучшей и наихудшей с точки зрения минимизации степени деполяризации (55) являются простейшие ориентации, связанные с элементами симметрии кристалла ([001], [011] и [111]). В подавляющем большинстве случаев это утверждение справедливо. Во всех случаях справедливо более слабое утверждение: простейшие ориентации являются точками локальных экстремумов либо седловыми точками степени деполяризации. Из-за совпадения симметрии упругого и фотоупругого тензоров в m3m-кристаллах (см. рис.2,*а*) учёт анизотропии упругих свойств оставляет эти ориентации экстремальными, хотя в редких случаях тип экстремума может измениться. Такой случай будет рассмотрен во второй части статьи.

В отличие от простейших, ориентация [[C]] [18, 19] не связана с элементами симметрии кристалла, и её положение может измениться. Пьезооптические тензоры m3-кристаллов имеют пониженную симметрию (рис.2,*б*), поэтому для таких кристаллов в большинстве случаев оптимальными являются ориентации, также не связанные с элементами симметрии кристалла и с хорошей точностью определяющиеся аналитическими оценками [[A]] и [[B]] [25]. Положение этих ориентаций также может измениться при учёте анизотропии упругих свойств кристалла. В п.5.2 рассчитывается положение ориентаций [[A]], [[B]] и [[C]] в упругоанизотропных кристаллах. Кроме того, найдена ориентация [[D]], также не связанная с элементами симметрии кристалла, которая является точкой локального минимума либо седловой точкой, а в редких случаях – точкой глобального минимума степени деполяризации при сильном двулучепреломлении.

#### 5.2.1. Ориентация [[C]] в m3m-кристаллах

В работе [18] в упругоизотропном приближении вычислено положение ориентации [[C]] в m3m-кристаллах для длинного стержня и тонкого диска произвольного поперечного сечения при произвольной форме греющего пучка. Вывод основан на требовании

$$\Delta B_{xy} = 0 \qquad (75)$$

при $\Phi = 0$ и произвольном в рамках этих геометрий тензоре напряжений. Поскольку в кубических кристаллах $\alpha_{T\,xy} \equiv 0$, то в (3) $\Delta B_{\sigma\,xy} = \Delta B_{u\,xy}$. В связи с этим одновременное применение (3б) для тонкого диска (плосконапряжённое состояние) и (3а) для длинного стержня (плоскодеформированное состояние) не приводит к ошибкам. В остальном вывод формул в диске и стержне идентичен и приводит к одной из ориентаций $[MMN]$ (см. рис.1,*е*)

$$\alpha = \pi/4 + \pi k/2,$$
$$\tau\alpha v^2\beta = -\xi^{-1}, \qquad (76)$$

где $\xi = \xi_\pi$ в диске и $\xi = \xi_p$ в стержне. Из этого выражения следует, что при сильной анизотропии упругого тензора критические ориентации в диске и в стержне из одного и того же материала должны заметно различаться.

В упругоанизотропном диске решение [18] работает. Однако, как мы отметили в пп.4.3.4, в стержне нужно пользоваться решением Сиротина, которое не является плоской деформацией (см. пп.4.3.2), поэтому выражение (76) в этом случае неприменимо. Несложно получить, что в рассмотренном в [18] наборе ориентаций $[MMN]$ ($\alpha = \pi/4$) при $\Phi = 0$

$$\Delta B_{\sigma\,xy} = \pi_{xyyz}\sigma_{yz} + \pi_{xyxy}\sigma_{xy},$$
$$\pi_{xyyz} = \pi_{\rm S}\sin 2\beta(\xi_\pi - 1)/4,$$
$$\pi_{xyxy} = \frac{\pi_{\rm S}(\cos^2\beta + \xi_\pi\sin^2\beta)}{2}, \qquad (77)$$
$$\pi_{xyxx} = \pi_{xyyy} = \pi_{xyzz} = \pi_{xyxz} = 0 .$$

Можно видеть, что $\pi_{xyxy}$ обращается в нуль только при условии (76) с $\xi = \xi_\pi$, но в этом случае $\pi_{xyyz} \neq 0$. Поскольку в решении Сиротина в этих ориентациях $D_c \neq 0$ (см. рис.3,*б*) и, следовательно, $\sigma_{yz} \neq 0$, в упругоанизотропном случае существование и положение критической ориентации зависят от тензора напряжений. Подставляя (24б) и (31) в (77) и требуя выполнения условия (75), получаем трансцендентное уравнение для угла $\beta$:

$$\cos 2\beta - 2D_c(\beta)\sin 2\beta = \frac{\xi_\pi + 1}{\xi_\pi - 1}. \quad (78)$$

Критическую ориентацию в упругоанизотропном стержне, определяемую этим уравнением, мы будем обозначать [[C$_s$]]. Поскольку, как следует из выполненного нами сравнения отношений (49), коэффициент $D_c$ мал по сравнению с аналогичной величиной, полученной из тензора деформаций, то мы ожидаем, что [[C$_s$]] слабо отличается от критической ориентации в диске, совпадающей с [[C]], и значительно дальше от предсказанного в [18] положения (76) с $\xi = \xi_p$ (см. вторую часть статьи). Так как в упрощённом решении Сиротина мы этой компонентой тензора напряжений вовсе пренебрегли, то получаемая критическая ориентация совпадает с таковой для диска. В силу того, что в выделенных ориентациях [001], [111] и [011] $D_c = 0$ (см. П2.6)], ориентации [[C$_s$]] и [[C]] совпадают с ними при одних и тех же значениях $\xi_\pi$ ($-\infty$, $-0.5$ и 0 соответственно). Поскольку две из них ([001] и [011]) являются в упругоизотропном случае пограничными для существования критической ориентации, то и область её определения не меняется при учёте анизотропии упругих свойств.

### 5.2.2. Ориентация [[C]] в m3-кристаллах

В m3-, как и в m3m-кристаллах, также может существовать критическая ориентация. В работе [25] нами было показано, что в упругоизотропном приближении ориентация [[C]] существует при

$$\begin{gathered} \xi < 0, \\ (-\xi - 3)\xi_{\rm d}^2 < 4(1 - \xi), \end{gathered} \quad (79)$$

а её положение определяется громоздкой системой трансцендентных уравнений. При $\xi_{\rm d} \neq 0$ в обозначениях

$$\begin{gathered} X = \cos 2\alpha \sin^2\beta, \\ Y = \cos^2\beta \end{gathered} \quad (80)$$

нам удалось свести эти уравнения к системе

$$\begin{gathered} 3(\kappa_{\rm d} Y - q)[q + (2Y - 1)\kappa_{\rm d}]^2 = q^2(\kappa_{\rm d} - 1)[3q + (9Y - 4)\kappa_{\rm d}], \\ 2X[q + (2Y - 1)\kappa_{\rm d}] = q_{\rm d} q(1 - 3Y), \end{gathered} \quad (81)$$

где

$$q = \xi_\pi/(\xi_\pi - 1); \; q_{\rm d} = \xi_{\rm d}/(\xi_\pi - 1); \; \kappa_{\rm d} = 1 + 3q_{\rm d}^2/4. \quad (82)$$

Система (81) имеет три решения, соответствующие физически эквивалентным друг другу ориентациям общего вида [$MNP$], [$NPM$] и [$PMN$]. Численный анализ показал, что за пределами области (79) решения системы (81) комплексны, т. е. ориентации [[C]] не существует. Заметим, что в вырожденном случае m3m-кристалла ($\xi_{\rm d} = 0$) система (81) позволяет найти только решение (76), а для двух других корней не определены значения $X$ и, соответственно, угла $\alpha$ (эти решения приведены в [25]).

Как и в m3m-кристаллах, в упругоанизотропном диске критическая ориентация совпадает с [[C]], а в упругоанизотропном стержне она также совпадает с ней в упрощённом решении и слабо отклоняется ([[C$_s$]]) в точном (см. вторую часть статьи). В последнем случае существование критической ориентации в строгом смысле не доказано, однако при некоторых значениях углов Эйлера в численном расчёте происходит характерное для критической ориентации существенное уменьшение степени деполяризации.

### 5.2.3. Ориентация [[A]] в m3-кристаллах

В работе [25] в упругоизотропных m3-кристаллах нами были определены ещё две выделенные ориентации вида [$M0N$] (см. рис.1,$\partial$) [[A]] и [[B]]. В ориентации [001] m3m-кристаллов $\Psi$ не зависит от $r$, поскольку в выражениях (63), (65) и (67) $A_{1\Phi} = B_{1\Phi} = 0$ (см. [22] и (П3.2)–(П3.4)). В m3-кристаллах это условие не выполняется из-за ненулевого коэффициента $A_1$, который обращается в нуль в ориентации [[A]], определяющейся, например, углами Эйлера

$$\alpha = 0, \quad \cos 2\beta = q_{\rm d}\left(1 - \sqrt{1 + q_{\rm d}^{-2}}\right). \quad (83)$$

В частном случае $\xi_{\rm d} = 0$ ориентация [[A]] совпадает с [001], а при $|\xi_{\rm d}| \gg |\xi_\pi - 1|$ ориентация [[A]] → [101]. В упругоанизотропных кристаллах этот расчёт справедлив для диска и в приближении (51) – для стержня. При несоблюдении приближения (51) в стержне вместо $A_1 = 0$ необходимо требовать, чтобы

$$(2D_1 - 1)A_1 - 2(D_b A_4 + D_c A_5) = 0 \quad (84)$$

(в ориентациях вида [$M0N$], [$0MN$] и т. п. $A_4$ и $D_{\rm b}$ либо $A_5$ и $D_{\rm c}$ всегда обращаются в нуль). Условие (84) выполняется в некоторой ориентации [[A$_s$]] также вида [$M0N$], слегка отличающейся от (83).

В работе [25] нами получено, что при слабом двулучепреломлении, а также для большого пробного пучка при сильном двулучепреломлении в m3-кристаллах степень деполяризации, как правило, минимальна в ориентации, близкой к [[A]] (см. вторую часть статьи). Для простоты изложения, если не указано иное, мы будем этим различием пренебрегать.

### 5.2.4. Ориентация [[B]] в m3-кристаллах

Ориентация [011] m3m-кристаллов интересна тем, что угол наклона собственных поляризаций $\Psi$ в центральной области активного элемента оказывается слабо зависящим от координат, что позволяет получить сравнительно небольшую деполяризацию в режиме сильного двулучепреломления для пучков небольшого радиуса (см. [24] и вторую часть статьи). Степень деполяризации в этом режиме аппроксимируется выражениями (56), (57), зависящими от $\Psi$ и не зависящими от $\delta$.

Угол наклона собственных поляризаций $\Psi$ в цилиндрических активных элементах в различных приближениях (см. [22, 25], (63), (65), (67)) имеет общий вид

$$\cot 2\Psi = \tilde{A}/\tilde{B}, \quad (85а)$$

где

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 g(r) + (\tilde{A}_2 \cos 2\varphi_\Phi + \tilde{A}_3 \sin 2\varphi_\Phi) h(r);$$
$$\tilde{B} = \tilde{B}_1 g(r) + (\tilde{B}_2 \cos 2\varphi_\Phi + \tilde{B}_3 \sin 2\varphi_\Phi) h(r); \quad (85б)$$

при $r \to 0$ величина $h(r) \to 0$, $g(r) \to \mathrm{const}$. Для минимизации степени деполяризации выберем входную поляризацию так, чтобы $\theta = \Psi(r = 0)$, тогда (57) с учётом (85) будет иметь следующий вид:

$$\gamma_{\infty\,\mathrm{loc}} = \frac{(\tilde{A}\tilde{B}_1 - \tilde{B}\tilde{A}_1)^2}{(\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2)(\tilde{A}_1^2 + \tilde{B}_1^2)}. \quad (86)$$

Рассмотрим случай малого диаметра пробного пучка, в пределах которого $h \ll g$. В первом приближении интегральная степень деполяризации (56) будет такова:

$$\gamma_\infty \approx \frac{I_\infty}{2\int_0^R |\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}|^2 r\mathrm{d}r} \int_0^R \frac{h^2}{g^2} |\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}|^2 r\mathrm{d}r,$$
$$I_\infty = \frac{(\tilde{A}_2\tilde{B}_1 - \tilde{B}_2\tilde{A}_1)^2 + (\tilde{A}_3\tilde{B}_1 - \tilde{B}_3\tilde{A}_1)^2}{(\tilde{A}_1^2 + \tilde{B}_1^2)^2}. \quad (87)$$

Поскольку в данном расчёте изменение угла $\Phi$ компенсируется автоматическим выбором угла $\theta$, величина $I_\infty$ зависит только от ориентации кристалла и его упругих и фотоупругих свойств, и мы можем без ограничения общности считать, что $\Phi = 0$. В критической ориентации $I_\infty$ по определению обращается в нуль. Численный анализ показывает, что кроме этого $I_\infty$ и вместе с ней $\gamma_\infty$ имеют минимум либо седловую точку в одной из ориентаций вида $[M0N]$ (см. рис.1,*д*). В этих ориентациях при $\Phi = 0$ коэффициент $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 = 0$, поэтому

$$I_{\infty\,[M0N]} = (\tilde{B}_3^2/\tilde{A}_1^2)\big|_{\Phi=0}. \quad (88)$$

В частности, в упругоизотропном приближении и в геометрии тонкого диска

$$I_{\infty\,[M0N]0} = \xi_\pi^2/A_1^2. \quad (89)$$

Эта величина имеет минимум в искомой ориентации, названной [[B]], определяющейся, например, углами Эйлера [25]

$$\alpha = 0,$$
$$\cos 2\beta = q_{\mathrm{d}}. \quad (90)$$

В частном случае $\xi_{\mathrm{d}} = 0$ (в m3m-кристалле) ориентация [[B]] совпадает с [101], а если $|\xi_{\mathrm{d}}| = |\xi_\pi - 1|$, то [[B]] совпадает с [001]. Для удобства изложения мы будем говорить, в отличие от [25], что при $|\xi_{\mathrm{d}}| > |\xi_\pi - 1|$ эта ориентация не существует. В данном случае минимум $I_{\infty\,[M0N]0}$ достигается в ориентации [001].

В работе [25] нами получено, что степень деполяризации для тонкого пробного пучка при сильном двулучепреломлении в m3-кристаллах, как правило, минимальна в ориентации, близкой к [[B]] (см. вторую часть статьи). Для простоты изложения, если не указано иное, мы будем этим различием пренебрегать.

При небольших по модулю отрицательных $\xi_\pi$ ориентация [[B]], будучи близкой к критической ориентации, является не точкой минимума зависимости степени деполяризации от углов Эйлера ($\alpha$, $\beta$), а седловой точкой. В частности, в упругоизотропных m3m-кристаллах это происходит при $-1/3 < \xi_\pi < 0$.

В случае длинного стержня при соблюдении (51) выражение (88) принимает вид

$$I_{\infty\,[M0N]s0} = \xi_\pi^2[(2D_{01} - 1)A_1]^{-2}. \quad (91)$$

Подстановка сюда (П3.3) позволяет преобразовать его к

$$I_{\infty\,[M0N]s0} = G_1^2/J_{[M0N]s0}^2, \qquad W = \cos 2\beta,$$
$$J_{[M0N]s0} = \frac{2q_{\mathrm{d}}W + 1 - W^2}{2 - \eta(1 - W^2)}, \qquad \eta = (1 + \nu_{[001]})(1 - \xi_s), \quad (92)$$

где константа $G_1$ не зависит от ориентации, а вследствие (38)

$$-\infty < \eta \leqslant 3/2. \quad (93)$$

В результате исследования функции $J_{[M0N]s0}(W)$ на экстремум получаем квадратное уравнение. Анализ его корней показывает, что $I_{\infty\,[M0N]s0}$ минимальна в ориентации, которую мы назовём [[B$_\sim$]], определяющейся, например, углами Эйлера

$$\alpha = 0,$$
$$\cos 2\beta = (\eta q_{\mathrm{d}})^{-1}\{[1 - q_{\mathrm{d}}^2\eta(\eta - 2)]^{1/2} - 1\}, \quad (94)$$

которая с учётом (93) существует при

$$(1 - \eta)|q_{\mathrm{d}}| \leqslant 1, \quad (95)$$

и совпадает с [001], когда (95) обращается в равенство. За пределами области существования [[B$_\sim$]] величина $I_{\infty\,[M0N]s0}$ минимальна в ориентации [001]. При $\eta = 0$ ($\xi_s = 1$) [[B$_\sim$]] совпадает с [[B]], а в m3m-кристаллах (при $q_{\mathrm{d}} = 0$) [[B$_\sim$]] совпадает с [101].

При сильно анизотропных упругих свойствах условие (51) не выполняется, и среди ряда ориентаций ($[M0N]$, $[0MN]$ и др.) нужно минимизировать величину

$$I_{\infty\,[M0N]s} = \xi_\pi^2[(2D_1 - 1)A_1 - 2(D_b A_4 + D_c A_5)]^{-2}. \quad (96)$$

Она имеет минимум в некоторой ориентации [[B$_s$]], немного отличающейся от [[B$_\sim$]], если таковая существует, а в противном случае – в ориентации [001].

### 5.2.5. Ориентация [[D]] в m3m- и m3-кристаллах

В m3m-кристаллах величина $I_\infty$ (87) обращается в $+\infty$ и потому имеет точки максимума в ориентациях [001] и [111]. В силу того, что интегральная степень деполяризации в таких кристаллах ориентаций $[M'M''N]$ и $[M''M'N]$ одинакова (см. [25]), величина $I_\infty$ должна иметь ещё одну точку минимума либо седловую точку в одной из ориентаций вида $[MMN]$, где $M < N$. В этих ориентациях аналогично (88)

$$I_{\infty\,[MMN]\mathrm{m3m}} = (\tilde{B}_3^2/\tilde{A}_1^2)\big|_{\Phi=0}. \quad (97)$$

В частности, в упругоизотропном приближении и в геометрии тонкого диска

$$I_{\infty\,[MMN]\mathrm{m3m}\,0} = 16/J^2_{[MMN]0}, \tag{98а}$$

где

$$J_{[MMN]0} = \frac{(1-Y)(1-3Y)}{Y-q}, \tag{98б}$$

величина $Y$ определена в (80). Знаменатель $J_{[MMN]\,0}$ обращается в нуль в ориентации [[C]]. Исследование функции $J_{[MMN]\,0}(Y)$ на другие экстремумы, так же как и в случае с $J_{[M0N]\,s0}(W)$, сводится к квадратному уравнению. Анализ его корней показывает, что $I_{\infty\,[MMN]\,\mathrm{m3m}\,0}$ минимальна в ориентации, которую мы назовём [[D]], определяющейся углами Эйлера

$$\begin{aligned} &\alpha = \pi/4 + \pi k/2, \\ &\cos^2\beta = \frac{\xi_\pi - [(2\xi_\pi + 1)/3]^{1/2}}{\xi_\pi - 1}. \end{aligned} \tag{99}$$

Эта ориентация существует при $\xi_\pi > -1/2$ и является точкой минимума величины $I_\infty(\alpha,\,\beta)$ при $\xi_\pi > \xi_{0\,[[D]]}$, где $\xi_{0\,[[D]]} \approx 1.65$, а при меньших значениях – седловой точкой. Величина $I_\infty$ в ориентации [[D]] становится меньше, чем в [011], при $\xi_\pi > \xi_{[[D]]}$, где $\xi_{[[D]]} \approx 10$. В этой области ориентация [[D]] может быть лучше, чем [011], при сильном двулучепреломлении. В диске при $\xi_\pi < 0$ для минимизации степени деполяризации лучше использовать ориентацию [[C]], в стержне необходимо принять во внимание важное ограничение, рассмотренное в конце второй части статьи.

В длинном стержне с анизотропной упругостью при соблюдении (51) выражение (88) принимает вид

$$I_{\infty\,[MMN]\mathrm{m3m}\,s0} = B_3^2[(2D_{01}-1)A_1]^{-2}. \tag{100}$$

Подстановка сюда (П3.3) позволяет преобразовать его к

$$I_{\infty\,[MMN]\,\mathrm{m3m}\,s0} = G_2^2/J^2_{[MMN]\,s0}\ , \tag{101а}$$

где

$$J_{[MMN]\,s0} = [1-(1-Y)(1+3Y)\eta/2]J_{[MMN]\,0}; \tag{101б}$$

константа $G_2$ не зависит от ориентации. Условие экстремума $J_{[MMN]\,s0}(Y)$ сводится к уравнению 4-й степени общего вида. Ориентацию, в которой эта величина имеет минимум, назовём [[D$_\sim$]]. Поскольку в приближении (51) $\eta \ll 1$, мы ожидаем, что эта ориентация будет близка к [[D]]. Наконец, при сильно анизотропных упругих свойствах среди ориентаций $[MMN]$ надо минимизировать величину

$$I_{\infty\,[MMN]\,s} = \left[\frac{B_3 + 2D_cB_4}{(2D_1-1)A_1 - 2D_cA_5}\right]^2. \tag{102}$$

Численный расчёт показал, что она имеет минимум в некоторой ориентации [[D$_s$]], смещённой относительно [[D]] и [[D$_\sim$]].

Численный анализ степени деполяризации $\gamma_\infty$ в упругоизотропном приближении показал, что ориентация [[D]] является наилучшей в двух случаях. Во-первых, при $\xi > 10$ и очень малом радиусе пробного пучка (примерно $0.2R$ или меньше для прямоугольного профиля) выигрыш в степени деполяризации по сравнению с [011] может быть существенным; при увеличении радиуса пробного пучка [011] становится предпочтительнее. Во-вторых, существует узкий диапазон, $1.2 < \xi < 1.7$, в котором ориентация, близкая к [[D]], но не совпадающая с ней, незначительно лучше ориентаций [011] и [001] для пучков радиусом около $0.5R$.

Таким образом, условия, в которых использование ориентации [[D]] выгодно, очень специфичны, поэтому практическое применение кристаллов этой ориентации маловероятно. В связи с этим в расчётах во второй части статьи ориентация [[D]] использоваться не будет.

В m3-кристаллах поиск ориентации [[D]] значительно осложнён тем, что она, как и [[C]], является ориентацией общего вида $[MNP]$, и ввиду малой практической ценности этой ориентации аналитически он не проводился. Численный анализ величины $I_\infty$ показывает, что ориентация [[D]], как и [[C]], исчезает при превышении параметром $|\xi_\mathrm{d}|$ некоторого критического уровня, сливаясь либо с [[B]], либо с [001].

Таким образом, в геометрии тонкого диска выделенные ориентации [[A]], [[B]], [[C]] и [[D]], не связанные с элементами симметрии кристалла, совпадают с ориентациями в упругоизотропном материале. В геометрии длинного стержня в приближении слабой анизотропии отличаются ориентации [[B]] и [[D]], а при сильной анизотропии – все четыре ориентации. Для удобства читателя номера формул, характеризующих эти выделенные ориентации, приведены в табл.2.

### 5.3. Определение эффективных значений термооптических постоянных $Q$ и $P$ в различных ориентациях кристалла

В работах по измерению термонаведённого двулучепреломления в оптических средах величина $Q$ часто используется не только и не столько в смысле определения (16), сколько как материальная константа, характеризующая величину степени деполяризации в монокристаллах отдельных ориентаций и в керамике [48, 64]. Рассмотрим такое применение подробнее.

#### 5.3.1. Термооптическая постоянная $Q$

Из (53) следует, что локальная ($\Gamma$), а вслед за ней и интегральная ($\gamma$) степени деполяризации являются периодическими функциями угла наклона поляризации пробного пучка $\theta$ с периодом $\pi/2$. Следовательно, $\gamma$ периодична и по углу поворота кристалла $\Phi$ относительно оси $z$ с тем

Табл.2. Выделенные ориентации кубических кристаллов, не связанные с элементами их симметрии.

| Симметрия | Изотропная упругость или тонкий диск | Длинный стержень при слабой анизотропии | Длинный стержень при произвольной анизотропии |
|---|---|---|---|
| m3 | [[A]] (83) | [[A]] (83) | [[A$_s$]] (84) |
| | [[B]] (90) | [[B$_\sim$]] (94), (95) | [[B$_s$]] (96) |
| | [[C]] (79), (81) | [[C]] (79), (81) | [[C$_s$]] – |
| | [[D]] – | [[D$_\sim$]] – | [[D$_s$]] – |
| m3m | [[C]] (76), $\xi = \xi_\pi$ | [[C]] (76), $\xi = \xi_\pi$ | [[C$_s$]] (78) |
| | [[D]] (99) | [[D$_\sim$]] (101) | [[D$_s$]] (102) |

же периодом. Интегральная степень деполяризации при слабом двулучепреломлении в частном случае $\theta = 0$ в упругоизотропном случае для m3m-кристалла ориентации [001] ($\alpha = 0, \beta = 0$) имеет экстремумы при $\varPhi = 0$ и $\pi/4$, при этом квадратичная по мощности тепловыделения аппроксимация локальной степени деполяризации

$$\varGamma_0 = \frac{1}{4}(\delta \sin 2\varPsi)^2 \tag{103}$$

такова:

$$\varGamma_{0\,\mathrm{m3m}}([001], \varPhi = \pi/4) = Q^2/(4\lambda\kappa)^2 P_\Sigma^2\, u^2 \sin^2 2\varphi,$$
$$\varGamma_{0\,\mathrm{m3m}}([001], \varPhi = 0) = \xi^2 \varGamma_{0\,\mathrm{m3m}}([001], \varPhi = \pi/4). \tag{104}$$

Она зависит от параметров среды $Q/\kappa$ и $\xi$ (напомним, что $Q$ различна в диске и в стержне). Чтобы привести к такому же виду степень деполяризации при слабом двулучепреломлении в ориентации [111], которая при любом $\varPhi$ есть

$$\varGamma_{0\,\mathrm{m3m}}([111]) = \left(\frac{Q}{4\lambda\kappa}\,\frac{1+2\xi}{3}\right)^2 P_\Sigma^2 u^2 \sin^2 2\varphi\ , \tag{105}$$

вводят величины [48]

$$Q^{\mathrm{eff}}_{[111]\,\mathrm{m3m\ iso}} = \frac{(1+2\xi)\,Q}{2},$$
$$\xi^{\mathrm{eff}}_{[111]\,\mathrm{m3m\ iso}} = 1. \tag{106}$$

В других ориентациях m3m-кристаллов ввести эти величины в общем случае невозможно, поскольку степень деполяризации не удаётся свести к виду (104) для двух значений $\varPhi$, различающихся на 45° (см. теорему 4 в [22]).

В упругоанизотропном случае для приведения степени деполяризации к виду (104) в ориентации [001] m3m-кристалла необходимо ввести

$$Q^{\mathrm{eff}}_{[001]\,\mathrm{m3m}} = Q/Z([001]),$$
$$\xi^{\mathrm{eff}}_{[001]\,\mathrm{m3m}} = \xi_\pi, \tag{107}$$

где $Q$ и $Z$ различны в диске и стержне. Формула для стержня была получена в [65]. В m3-кристаллах аналогом ориентации [001] является ориентация [[A]], в которой

$$Q^{\mathrm{eff}}_{[[\mathrm{A}]]} = A_{2[[\mathrm{A}]]} Q/Z([[\mathrm{A}]]),$$
$$\xi^{\mathrm{eff}}_{[[\mathrm{A}]]} = \xi_\pi / A_{2[[\mathrm{A}]]}, \tag{108}$$
$$A_{2[[\mathrm{A}]]} = 1 - \frac{1}{2}(1-\xi_\pi)\left(\sqrt{q_\mathrm{d}^4 + q_\mathrm{d}^2} - q_\mathrm{d}^2\right).$$

В частном случае $\xi_\mathrm{d} = 0$ ориентация [[A]] совпадает с [001], а $A_2$[[A]] = 1. Если $|\xi_\mathrm{d}| \gg |\xi_\pi - 1|$, то [[A]] → [101], а $A_{2[[\mathrm{A}]]} \to (\xi_\pi + 3)/4$. При несоблюдении приближения (51) в стержне значения $Q^{\mathrm{eff}}$ и $\xi^{\mathrm{eff}}$, соответствующие ориентации [[A$_\mathrm{s}$]], будут отличаться от рассчитываемых по формуле (108).

В ориентации [111] при слабом двулучепреломлении и любом $\varPhi$ степень деполяризации имеет вид

Табл.3. Формулы для параметров $Q^{\mathrm{eff}}$ и $\xi^{\mathrm{eff}}$.

| Ориентация | $\xi_s = 1$, m3m | $\xi_s = 1$, m3 | m3m | m3 |
|---|---|---|---|---|
| [001] | $Q, \xi$ | – | (107) | – |
| [[A]] | ≡ [001] | (108) при $Z = 1$ | ≡ [001] | (108) |
| [111] | (106) | (111) при $Z = 1$ | (111) при $\xi_\mathrm{d} = 0$ | (111) |

Примечание. В длинном стержне формулы для ориентации [[A]] справедливы в приближении (51).

$$\varGamma_0([111]) = \left(\frac{Q}{4\lambda\kappa}\right)^2 \frac{P_\Sigma^2}{Z([111])^2}$$
$$\times\left[\left(\frac{1+2\xi_\pi}{3}\right)^2 + \frac{\xi_\mathrm{d}^2}{12}\right] u^2 \sin^2 2(\varphi \pm \chi_\mathrm{d}), \tag{109}$$

где

$$\tan 2\chi_\mathrm{d} = \sqrt{3}\,\xi_\mathrm{d}/(2 + 4\xi_\pi), \tag{110}$$

а выбор знака зависит от того, какая из восьми эквивалентных ориентаций ([111], $[11\bar{1}], [1\bar{1}1]$ и т.д.) выбрана. Это выражение не может быть приведено к виду (104), но максимально похоже на него при

$$Q^{\mathrm{eff}}_{[111]} = \left[\left(\frac{1+2\xi_\pi}{3}\right)^2 + \frac{\xi_\mathrm{d}^2}{12}\right]^{1/2} \frac{Q}{Z([111])},$$
$$\xi^{\mathrm{eff}}_{[111]} = 1, \tag{111}$$

отличаясь только ненулевым значением $\chi_\mathrm{d}$.

Отметим, что между двумя противоположными по знаку значениями $\xi_\mathrm{d}$ не существует физической разницы, поскольку при повороте кубического кристалла с параметрами ($\xi_\pi$, $\xi_\mathrm{d}$, $\xi_s$) на ±90° относительно любого из направлений [001], [010] и [100] после переобозначения кристаллографических осей мы получим кристалл с ($\xi_\pi$, $-\xi_\mathrm{d}$, $\xi_s$).

Для удобства читателя все частные случаи, в которых можно ввести $Q^{\mathrm{eff}}$ и $\xi^{\mathrm{eff}}$, сведены в табл.3. Отметим, что ввести эти величины в произвольной ориентации возможно, например, в схеме с противовращением [66], однако они не будут сводиться к рассмотренным здесь (в частности, они не будут зависеть от $\xi_\mathrm{d}$) и не будут иметь смысла для одиночного активного элемента.

### 5.3.2. Термооптическая постоянная *P*

Из-за множителя $1/Z$, присутствующего в фотоупругих слагаемых набегов фазы в (63), (65) и (67), но отсутствующего в слагаемых, отвечающих за $\partial n/\partial T$, термооптическую постоянную $P$ в случае анизотропии упругих свойств не удаётся ввести в виде, аналогичном (15), как материальный параметр, позволяющий компактизировать запись выражений для $\delta_0$, как это сделано, например, в [30, 32, 33, 35, 48]. Можно определить $P^{\mathrm{eff}}$, зависящую от ориентации, по формуле (12), но, как и в упругоизотропных m3m-кристаллах [64], лишь для двух ориентаций, в которых $\delta_0$ аксиально-симметрична – в данном случае для [111] и [[A′]]. Последняя отличается от [[A]] (83) знаком $q_\mathrm{d}$ и аналогично ей в случае m3m-кристалла тождественна [001], а в случае стержня из m3-кристалла определена аналитически только в приближении (51). Чтобы определить $P^{\mathrm{eff}}$ для произвольной ориентации, обобщим выражение

(12), усреднив показатели преломления по полярному углу:

$$\int_0^{2\pi}[n_{\rm I}(r)+n_{\rm II}(r)]\,{\rm d}\varphi/(4\pi)=n(0)+[T(r)-T(0)]P^{\rm eff}. \quad (112)$$

Величину, которая получается при включении в $P^{\rm eff}$ слагаемого, отвечающего за изменение длины активного элемента (см. [11, 16]), обозначим $P^{\rm tot}$. Она определяется выражением

$$\int_0^{2\pi}\delta_0(r)\,{\rm d}\varphi/(2\pi)=\delta_0(0)+k_0L[T(r)-T(0)]P^{\rm tot}. \quad (113)$$

В длинном стержне в пренебрежении концевыми эффектами $P^{\rm eff}$ и $P^{\rm tot}$ идентичны.

Использовав (63), (65) и (67), для произвольной ориентации получим

$$\begin{aligned}
P^{\rm eff}_{\rm disk}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm disk}}{Z_{\rm disk}}(1+2\zeta_\pi+F_1),\\
P^{\rm tot}_{\rm disk}&=P^{\rm eff}_{\rm disk}+\alpha_T(n_0-1)\left(1+\frac{\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}+\frac{1+\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}F_{1\rm s}\right),\\
P^{\rm eff}_{\rm rod}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm rod}}{Z_{\rm s}}[1+4\zeta_\pi+2\zeta_\pi(D_1-1)\\
&\quad-(2D_1-1)F_1+2(D_bF_4+D_cF_5)]\\
&\approx\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm rod}}{Z_0}[1+4\zeta_\pi+2\zeta_\pi(D_{01}-1)-(2D_{01}-1)F_1].
\end{aligned} \quad (114)$$

Отметим, что в этом выражении от $\xi_{\rm d}$ зависят только коэффициенты $F_4$ и $F_5$. В выделенных ориентациях выражение (114) может быть упрощено. В частности, в ориентации [001]

$$\begin{aligned}
P^{\rm eff}_{\rm disk}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm disk}}{Z_{\rm disk}}(1+2\zeta_\pi),\\
P^{\rm tot}_{\rm disk}&=P^{\rm eff}_{\rm disk}+\alpha_T(n_0-1)\left(1+\frac{\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\right),\\
P^{\rm eff}_{\rm rod}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm rod}}{Z_{\rm s}}\left(1+4\zeta_\pi+\zeta_\pi\frac{\xi_s-1}{2}\right);
\end{aligned} \quad (115а)$$

в ориентации [011]

$$\begin{aligned}
P^{\rm eff}_{\rm disk}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm disk}}{Z_{\rm disk}}\left(1+2\zeta_\pi+\frac{\xi_\pi-1}{4}\right),\\
P^{\rm tot}_{\rm disk}&=P^{\rm eff}_{\rm disk}+\alpha_T(n_0-1)\left(1+\frac{\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}+\frac{1+\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\,\frac{\xi_s-1}{4}\right),\\
P^{\rm eff}_{\rm rod}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm rod}}{Z_{\rm s}}\Big[1+4\zeta_\pi+2\zeta_\pi(D_{1[011]}-1)\\
&\quad-(2D_{1[011]}-1)\frac{\xi_\pi-1}{4}\Big];
\end{aligned} \quad (115б)$$

в ориентации [111]

$$\begin{aligned}
P^{\rm eff}_{\rm disk}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm disk}}{Z_{\rm disk}}\left(1+2\zeta_\pi+\frac{\xi_\pi-1}{3}\right),\\
P^{\rm tot}_{\rm disk}&=P^{\rm eff}_{\rm disk}+\alpha_T(n_0-1)\left(1+\frac{\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}+\frac{1+\nu_{[001]}}{Z_{\rm disk}}\,\frac{\xi_s-1}{3}\right),\\
P^{\rm eff}_{\rm rod}&=\beta_\sigma+\frac{Q_{\rm rod}}{Z_{\rm s}}\left[1+4\zeta_\pi+\zeta_\pi\frac{\xi_s^{-1}-1}{3}-(2+\xi_s^{-1})\frac{\xi_\pi-1}{9}\right].
\end{aligned} \quad (115в)$$

В этих выражениях для расчёта $Z_{\rm disk}$ нужно использовать (39), а для $Z_{\rm s}$ – (П2.6). В ориентациях [[A]], [[A′]], [[B]] и [[B$_\sim$]], а также в m3m-кристаллах в ориентациях [[C]] и [[D]] выражения для $P^{\rm eff}$ и $P^{\rm tot}$ получаются (в стержне подразумевается приближение (51)) подстановкой в (114) в качестве множителя $f_1$ в функции $F_1$, $F_{1\,\rm s}$, $Z_{\rm disk}$ и $D_{01}$ величин

$$\begin{aligned}
f_{1[[\rm A]]}&=f_{1[[\rm A']]}=\frac{1}{2}q_{\rm d}^2\left(1-\sqrt{1+q_{\rm d}^{-2}}\right),\\
f_{1[[\rm B]]}&=-\frac{1}{4}(1-q_{\rm d}^2),\\
f_{1[[\rm B_\sim]]}&=\left[1-q_{\rm d}^2\eta(\eta-1)-\sqrt{1-q_{\rm d}^2\eta(\eta-2)}\right]/(2q_{\rm d}^2\eta^2),\\
f_{1[[\rm C]]\rm m3m}&=\left(\xi_\pi-\frac{1}{4}\right)/(1-\xi_\pi)^2,\\
f_{1[[\rm D]]\rm m3m}&=\frac{3\xi_\pi-(2\xi_\pi+1)^{3/2}/\sqrt{3}}{2(1-\xi_\pi)^2}
\end{aligned} \quad (116)$$

соответственно.

В упругоизотропных средах (114) упрощается до известных выражений [30, 32, 33, 35, 48]

$$\begin{aligned}
P^{\rm eff}_{\rm disk}&=P_{\rm disk}+Q_{\rm disk}F_1,\\
P^{\rm tot}_{\rm disk}&=P^{\rm eff}_{\rm disk}+\alpha_T(n_0-1)(1+\nu_{[001]}),\\
P^{\rm eff}_{\rm rod}&=P_{\rm rod}-Q_{\rm rod}F_1,
\end{aligned} \quad (117)$$

где $P_{\rm disk}$ и $P_{\rm rod}$ определены в (15).

## 6. Заключение

В настоящей работе изучены термонаведённые искажения пучка в цилиндрических активных элементах в форме длинного стержня и тонкого диска из монокристаллов кубической сингонии всех групп симметрии с анизотропным тензором упругой жёсткости при однородной по объёму накачке и боковом теплоотводе. Показано, что описание фотоупругого эффекта с помощью пьезооптического тензора предпочтительнее описания через упругооптический тензор. Сделан обзор существующих аналитических решений задач теплопроводности и упругости в анизотропных средах произвольной симметрии. В длинном стержне из кубического кристалла сделан выбор между двумя решениями задачи упругости в пользу решения, не соответствующего плоской деформации; при слабой анизотропии тензора упругой жёсткости найдено упрощённое решение задачи упругости.

При произвольной ориентации кристаллографических осей рассчитаны среднее арифметическое и разность термонаведённых набегов фаз собственных поляризаций, а также угол наклона этих поляризаций. Введена выделенная ориентация [[D]]. Показано, что выделенные ориентации [[A]], [[B]], [[C]] и [[D]], не связанные с элементами симметрии кристалла, в диске из упругоанизотропного кристалла такие же, как и в упругоизотропном приближении. В стержне в приближении слабой анизотропии тензора упругой жёсткости от них отличаются ориентации [[B]] и [[D]], а при сильной анизотропии – все четыре ориентации. Найдены эффективные значения термооптической постоянной $Q$ в двух выделенных ориентациях ([[A]] и [111]). Определение эффективного значения термооптической постоянной $P$ было обобщено, его величина найдена в произвольной ориентации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, проект № 075-02-2018-183 (уникальный идентификатор RFMEFI60718X0201).

## Приложение 1

В данном приложении приведён обзор способов записи фотоупругой добавки к диэлектрическому тензору, используемых в литературе. В книге [5] термооптика не рассматривается, а закон Гука в главах, посвящённых упругим свойствам кристаллов и фотоупругому эффекту, записывается без температурного слагаемого:

$$u_{kl} = s_{ijmn}\sigma_{kl} \tag{П1.1}$$

(формула (6) присутствует в главе, посвящённой термодинамике состояний равновесия в кристаллах). В статье [7], посвящённой длинным стержням из стёкол, используются обе формы записи (3), а переход между ними осуществляется корректно: вводятся обе производные $\partial n/\partial T$. В работах [9, 10] используются $(\partial n/\partial T)_\sigma$ и (3б); в [10] получено выражение (15б), и оно непосредственно следует из формул статьи [9]. В работе [11] для тонкого диска из стекла также используется выражение (3б), а $\partial n/\partial T$ не конкретизируется, выражение (15а) может быть получено из приведённых в [11] формул. Joiner с соавторами [18, 19] в силу специфики задачи (от $\partial n/\partial T$ их результат не зависит, см. пп.5.2.1) используют (3а) для стержня и (3б) – для диска.

В работе [4], посвящённой стержням из Nd:YAG в ориентации [111], различаются понятия термической деформации ($\boldsymbol{u}$, thermal strain) и упругой деформации ($\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\alpha}T$, elastic strain). В законе Гука (6) при этих довольно необычных обозначениях не содержится температурный член, и он имеет вид (П1.1) с точностью до замены $\boldsymbol{u}$ на $\boldsymbol{u}'$. Авторы [4] описывают фотоупругий эффект выражением $\Delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{u}'$, что с учетом (4) и модифицированной формулы (П1.1) эквивалентно (3б) с точностью до не используемой ими константы $T_0$, но приводит к более громоздким выражениям для набега фазы, из которых следует (18). Для $\partial n/\partial T$ используется двусмысленная характеристика, «не включающая какие-либо деформационные эффекты».

В обзоре [8] используется формула (3а). Значение $\partial n/\partial T$ не конкретизируется, закон Гука записан в форме (П1.1), тензор $\boldsymbol{u}$, в отличие от [4], называется просто деформацией без каких-либо пояснений. Несмотря на это, выражения для фазовых набегов как в стержне, так и в диске из стекла соответствуют формуле (18). Формулы для радиальной зависимости тензора $\boldsymbol{u}'$, идентичные приведённым в [4], использует для Nd:YAG-стержней Koechner в [12], также заимствуя измеренное в [4] значение $\partial n/\partial T$, но сам тензор он тоже называет просто деформацией. Те же формулы используются им с соавтором в [3], причём тензор $\boldsymbol{u}'$ они называют упругой деформацией в приложении к статье и просто деформацией в основной ее части. Формулы из [3, 4, 12] для показателей преломления собственных волн в стержнях, сводящиеся к (18), приведены в классической книге [1], в которой тензор $\boldsymbol{u}'$ также называется просто деформацией, а выражений для него не приводится, равно как и закона Гука (6) либо (П1.1) (мы просмотрели все шесть изданий с 1976 по 2006 гг.). Тезис о том, что закон Гука в книге [1] записан неверно, а именно в форме (П1.1) с отсутствующим температурным членом, приведённый в приложении к [67] и позже повторенный в [50] в отношении как книги, так и статьи того же автора [13], по-видимому, ошибочен (в [67] приведены конкретные номера формул, якобы содержащих ошибки, но схема нумерации не соответствует принятой ни в одном из изданий книги). Однако мы считаем, что причиной возникшей путаницы явилась неаккуратность автора книги в обращении с определениями физических величин.

В статье [16] используется $(\partial n/\partial T)_\sigma$, но выражения для $P$ как в стержне, так и в диске из кубического кристалла приводятся в виде (14), получаемом с использованием формулы (3а). В книге [2] приводится физическая модель, описывающая температурное изменение показателя преломления в среде в изотропном приближении. В этой модели присутствуют как слагаемое, связанное с температурным сдвигом резонансных частот среды (и представляющее собой вклад $(\partial n/\partial T)_u$), так и слагаемые, зависящие от плотности и пропорциональные коэффициенту теплового расширения, т.е., формирующие $\Delta\chi_T$. Далее при описании фотоупругого эффекта делается неверное утверждение, что выражение (3б) описывает зависимость индикатрисы показателя преломления от плотности и потому обобщает соответствующее слагаемое в рассмотренной модели. (Ошибочность этого утверждения следует, к примеру, из мысленного эксперимента, в котором равномерно нагретое тело сжимается со всех сторон внешними силами так, что его размеры и, следовательно, плотность равны первоначальным. При этом поле напряжений, а следовательно, и тензор (3б), в таком теле, очевидно, будет ненулевым.) В результате в выражении для приращения показателя преломления в [2] соседствуют $(\partial n/\partial T)_u$ и (3б). Затем (3б) заменяется на (3а) (очевидно, с использованием неправильной формулы (П1.1)), в результате чего формула по случайности вновь становится верной и соответствующей выражению (10а). Для термооптической постоянной $P$ приводятся оба выражения, (14б) и (15б), с одинаковыми значениями $\beta$, а потому противоречащие друг другу.

В [39] используется (3б), а значение $\partial n/\partial T$ не конкретизируется. В ряде недавних работ [30, 32, 68] используется (3а), а $\partial n/\partial T$ также не конкретизируется. В [22, 27] также используется (3а), но тепловая линза не исследуется. В обзоре [50] авторы вначале определяют изменение показателя преломления через комбинацию (3а) с $(\partial n/\partial T)_u$. Затем они замечают, что $(\partial n/\partial T)_u$ гораздо сложнее измерить, чем $(\partial n/\partial T)_\sigma$, и строят модель температурного изменения показателя преломления, похожую на приведённую в [2], но эта модель также требует ряда допущений о симметрии среды и, как отмечают авторы, не позволяет свести разность двух значений $\partial n/\partial T$ к легко измеримым физическим величинам. Мы считаем, что обе эти модели в прикладных задачах термоупругости не имеют явных преимуществ по сравнению с предлагаемым в [46, 47] феноменологическим подходом (см. (7), (11)), тем более что в [46] говорится о неадекватности расчётов по модели [50] для YAG.

Следует также отметить, что из всех перечисленных выше работ $\partial n/\partial T$ имеет вид частной производной только в [7, 9, 16, 39, 46, 47, 50, 67], в остальных статьях записана полная производная, что дополнительно маскирует проблему правильного выбора формы записи фотоупругих слагаемых.

## Приложение 2

В данном приложении приводятся найденные в [36] выражения для коэффициентов $\tilde{a}_s, \tilde{b}_s, \tilde{c}_s, \tilde{d}_{sj}$ формулы (31). Аналогично этой работе введём матрицы, получаемые из тензоров упругой податливости и теплового расширения (тензорами эти величины не являются):

$$n_{ijkl} = s_{ijkl} - s_{zzzz}^{-1} s_{ijzz} s_{zzkl}, \qquad \gamma_{Tij} = \alpha_{Tij} - s_{zzzz}^{-1} s_{ijzz} \alpha_{Tzz}, \tag{П2.1}$$

где $i, j, k, l$ принимают значения $x, y, z$, и обозначим

$$\begin{aligned} &K = 2n_{xzyz},\\ &K_x = 3n_{yzyz} + n_{xzxz},\\ &K_y = n_{yzyz} + 3n_{xzxz},\\ &Q_x = 3n_{xxxz} + 2n_{xyyz} + n_{yyxz},\\ &Q_y = 3n_{yyyz} + 2n_{xyxz} + n_{xxyz},\\ &\Delta = K_x K_y - K^2,\\ &D = 3n_{xxxx} + 3n_{yyyy} + 2n_{xxyy} + 4n_{xyxy}. \end{aligned} \tag{П2.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_s = 4\frac{\Delta(\gamma_{Txx}+\gamma_{Tyy})+(KQ_y - K_xQ_x)\gamma_{Txz}+(KQ_x - K_yQ_y)\gamma_{Tyz}}{D\Delta + 2KQ_xQ_y - K_xQ_x^2 - K_yQ_y^2},\\ &\tilde{b}_s = \Delta^{-1}[(KQ_x - K_yQ_y)\tilde{a}_s - 4K\gamma_{Txz} + 4K_y\gamma_{Tyz}],\\ &\tilde{c}_s = \Delta^{-1}[(KQ_y - K_xQ_x)\tilde{a}_s - 4K\gamma_{Tyz} + 4K_x\gamma_{Txz}],\\ &\tilde{d}_{s1} = 2s_{zzzz}^{-1}\left[2\alpha_{Tzz} - \tilde{a}_s(s_{xxzz} + s_{yyzz}) - \tilde{b}_s s_{yzzz} - \tilde{c}_s s_{xzzz}\right],\\ &\tilde{d}_{s2} = 2s_{zzzz}^{-1}\left[\tilde{a}_s(s_{xxzz} - s_{yyzz}) - \tilde{b}_s s_{yzzz} + \tilde{c}_s s_{xzzz}\right],\\ &\tilde{d}_{s3} = 2s_{zzzz}^{-1}\left[2\tilde{a}_s s_{xyzz} + \tilde{b}_s s_{xzzz} + \tilde{c}_s s_{yzzz}\right]. \end{aligned} \tag{П2.3}$$

В частном случае кубического кристалла выражения (П2.1)–(П2.3) при произвольной ориентации не удаётся, к сожалению, существенно упростить, несмотря на значительное упрощение материальных тензоров в кристаллографической системе координат. В ориентациях $[M0N]$ ($\alpha = 0$) и $[MMN]$ ($\alpha = \pi/4$) тензор $\boldsymbol{s}$ в системе координат $(x'', y'', z)$ имеет упрощённый вид, благодаря чему

$$K = 0, \quad \Delta = K_x K_y, \qquad Q_y = 0, \quad \gamma_{Tyz} = 0, \tag{П2.4}$$

и (П2.3) удаётся сократить: в частности, с учётом переобозначений (42), (43), (45)

$$D_3 = D_b = 0. \tag{П2.5}$$

При этом решение все равно остаётся сложным для аналитического анализа его зависимости от ориентации.

В простейших ориентациях – [001] ($\alpha = 0, \beta = 0$), [011] ($\alpha = \pi/2, \beta = -\pi/4$) и [111] ($\alpha = \pi/4$, $\tan^2\beta = 2$) – коэффициенты (П2.3) приводятся к виду

$$\begin{aligned} &D_3 = D_b = D_c = 0,\\ &a_{s[001]} = [(s_{11} + s_{12}) + s_{11}(\xi_s - 1)/4]^{-1},\\ &D_{1[001]} = (3 + \xi_s)/4,\\ &D_{2[001]} = 0,\\ &a_{s[011]} = \frac{4(1 + 3\xi_s)}{(15\xi_s + 1)s_{11} + 8(\xi_s + 1)s_{12} + 2(\xi_s - 1)^2(s_{11} - s_{12})},\\ &D_{1[011]} = 1 + \frac{1 - \xi_s}{1 + 3\xi_s}\,\frac{s_{12} + s_{66}/2}{2s_{11} + 2s_{12} + s_{66}},\\ &D_{2[011]} = \frac{(1 - \xi_s)(s_{11} - s_{12})}{2s_{11} + 2s_{12} + s_{66}},\\ &a_{s[111]} = \frac{18\xi_s}{4\xi_s^2(s_{11} - s_{12}) + \xi_s(13s_{11} + 20s_{12}) + s_{11} + 2s_{12}},\\ &D_{1[111]} = (5 + \xi_s^{-1})/6,\\ &D_{2[111]} = 0 \end{aligned} \tag{П2.6}$$

(выражения для $a_s$, $D_b$ и $D_c$ были получены непосредственно из формул работы [36]). Отметим, что коэффициент $D_{2[011]}$ может входить в выражения (65), (70) с разным знаком: в ориентации [101] ($\alpha = 0, \beta = -\pi/4$ или $\alpha = \pi, \beta = \pi/4$) $D_2 = D_{2[011]}$, а в ориентации [110] ($\alpha = \pi/4, \beta = -\pi/2$ или $\alpha = 5\pi/4, \beta = \pi/2$) $D_2 = -D_{2[011]}$.

## Приложение 3

Здесь приведены коэффициенты, используемые в формулах (41), (51), (63), (65), (67):

$$\begin{aligned} &F_1(\xi) = (1 - \xi)f_1 = (1 - \xi)(a_3 + b_3 - 1),\\ &F_2(\xi, \xi') = (1 - \xi)a_1 - \xi' a_2,\\ &F_3(\xi, \xi') = (1 - \xi)b_1 - \xi' b_2, \end{aligned} \tag{П3.1}$$

$$\begin{aligned} &A_{i\Phi} = A_i \cos 2\Phi + B_i \sin 2\Phi,\\ &B_{i\Phi} = B_i \cos 2\Phi - A_i \sin 2\Phi, \end{aligned} \tag{П3.2}$$

$$\begin{aligned} &A_1(\xi, \xi') = (1-\xi)a_1 + \xi' a_2, \quad B_1(\xi, \xi') = (1-\xi)b_1 + \xi' b_2,\\ &A_2(\xi) = \xi + (1 - \xi)a_3, \quad B_2(\xi, \xi') = (1 - \xi)c_1 + \xi' c_2,\\ &A_3(\xi, \xi') = (1 - \xi)c_1 - \xi' c_2, \quad B_3(\xi) = \xi + (1 - \xi)b_3, \end{aligned} \tag{П3.3}$$

причём коэффициенты с дополнительным нижним индексом «s» должны быть вычислены при $\xi = \xi_s$, $\xi' = 0$, коэффициенты без этого индекса – при $\xi = \xi_\pi$, $\xi' = \xi_d$. В этих выражениях

$$a_1 = \frac{1}{4}[\sin^2 2\alpha(1 - \cos^4\beta) - \sin^2 2\beta],$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\cos 2\alpha \cos 2\beta,$$

$$a_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)\sin^4\beta + \cos^2 2\alpha \cos^2\beta,$$

$$b_1 = \frac{1}{8}\sin\beta \sin 2\beta \sin 4\alpha,$$

$$b_2 = \frac{1}{4}\sin 2\alpha \cos\beta(1 - 3\cos^2\beta), \qquad (\text{П}3.4)$$

$$b_3 = \sin^2 2\alpha \cos^2\beta,$$

$$c_1 = -\frac{1}{4}\sin 4\alpha \cos\beta(1 + \cos^2\beta),$$

$$c_2 = \frac{3}{4}\sin 2\alpha \cos\beta \sin^2\beta,$$

а $f_1$ введена в (32). Заметим, что

$$A_{1\mathrm{s}} = F_{2\mathrm{s}},$$

$$B_{1\mathrm{s}} = F_{3\mathrm{s}}. \qquad (\text{П}3.5)$$

Для расчёта термонаведённых искажений пучка в упругоанизотропном длинном стержне (см. (65)) также нужны коэффициенты

$$F_4 = [-(1 - \xi_\pi)b_1 + \xi_{\mathrm{d}} b_2]\tan\beta,$$

$$F_5 = -(1 - \xi_\pi)c_4 + \xi_{\mathrm{d}} c_5,$$

$$A_4 = [-(1 - \xi_\pi)c_1 + \xi_{\mathrm{d}} c_2]\tan\beta, \qquad (\text{П}3.6)$$

$$A_5 = (1 - \xi_\pi)c_3 - 3\xi_{\mathrm{d}} c_5,$$

$$B_4 = -(1 - \xi_\pi)b_3 \tan\beta,$$

$$B_5 = 2[(1 - \xi_\pi)b_1 + \xi_{\mathrm{d}} c_2]\cot\beta,$$

где

$$c_3 = \frac{1}{4}\left[\sin^2 2\alpha\left(1 + \cos^2\beta\right)\sin 2\beta - \sin 4\beta\right],$$

$$c_4 = \frac{1}{4}(\sin^2 2\alpha \sin^2\beta \sin 2\beta + \sin 4\beta), \qquad (\text{П}3.7)$$

$$c_5 = \frac{\cos 2\alpha \sin 2\beta}{4}.$$

Отметим, что, несмотря на присутствие тангенса и котангенса, функции (П3.6) не имеют особенностей при $\beta = i\pi/2$ (где $i$ – целое) благодаря обращению в нуль соответствующих коэффициентов $b_i$ и $c_i$.


1. Koechner W. *Solid-State Laser Engineering* (Berlin: Springer-Verlag, 1999).
2. Мезенов А.В., Сомс Л.Н., Степанов А.И. *Термооптика твердотельных лазеров* (Л.: Машиностроение, 1986).
3. Koechner W., Rice D.K. *IEEE J. Quantum Electron*., **6**, 557 (1970).
4. Foster J.D., Osterink L.M. *J. Appl. Phys*., **41**, 3656 (1970).
5. Най Д. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц* (М.: Иностранная литература, 1960).
6. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. *Основы кристаллофизики* (М.: Наука, 1979).
7. Quelle F.W. *Appl. Opt*., **5**, 633 (1966).
8. Snitzer E. *Proc. IEEE*, **54**, 1249 (1966).
9. Riedel E.P., Baldwin G.D. *J. Appl. Phys*., **38**, 2720 (1967).
10. Ананьев Ю.А., Гришманова Н.И. *ЖПС*, **12**, 668 (1970).
11. Митькин В.М., Щавелев О.С. *Опт.-мех. пром*., **9**, 26 (1973).
12. Koechner W. *Appl. Opt*., **9**, 2548 (1970).
13. Koechner W. *Appl. Opt*., **9**, 1429 (1970).
14. Massey G.A. *Appl. Phys. Lett*., **17**, 213 (1970).
15. Karr M.A. *Appl. Opt*., **10**, 893 (1971).
16. Сомс Л.Н., Тарасов А.А. *Квантовая электроника*, **6**, 2546 (1979) [*Sov. J. Quantum Electron*., **9**, 1506 (1979)].
17. Сомс Л.Н., Тарасов А.А., Шашкин В.В. *Квантовая электроника*, **7**, 619 (1980) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **10**, 350 (1980)].
18. Joiner R.E., Marburger J., Steier W.H., in *Laser Induced Damage in Optical Materials* (Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, 1977, pp 89–95).
19. Joiner R.E., Marburger J., Steier W.H. *Appl. Phys. Lett.*, **30**, 485 (1977).
20. Koechner W., Rice D.K. *J. Opt. Soc. Am*., **61**, 758 (1971).
21. Khazanov E., Andreev N., Palashov O., Poteomkin A., Sergeev A., Mehl O., Reitze D. *Appl. Opt*., **41**, 483 (2002).
22. Мухин И.Б., Палашов О.В., Хазанов Е.А., Иванов И.А. *Письма в ЖЭТФ*, **81**, 120 (2005) [*JETP Lett*., **81**, 90 (2005)].
23. Shoji I., Taira T. *Appl. Phys. Lett*., **80**, 3048 (2002).
24. Mukhin I.B., Palashov O.V., Khazanov E.A. *Opt. Express*, **17**, 5496 (2009).
25. Vyatkin A.G., Khazanov E.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **28**, 805 (2011).
26. Shoji I., Sato Y., Kurimura S., Lupei V., Taira T., Ikesue A., Yoshida K. *Opt. Lett*., **27**, 234 (2002).
27. Khazanov E.A. *Opt. Lett*., **27**, 716 (2002).
28. Каган М.А., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **33**, 876 (2003) [*Quantum Electron*., **33**, 876 (2003)].
29. Kagan M.A., Khazanov E.A. *Appl. Opt*., **43**, 6030 (2004).
30. Снетков И.Л., Мухин И.Б., Палашов О.В., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **37**, 633 (2007) [*Quantum Electron*., **37**, 633 (2007].
31. Soloviev A.A., Snetkov I.L., Zelenogorsky V.V., Kozhevatov I.E., Palashov O.V., Khazanov E.A. *Opt. Express*, **16**, 21012 (2008).
32. Соловьев А.А., Снетков И.Л., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **39**, 302 (2009) [*Quantum Electron*., **39**, 302 (2009)].
33. Vyatkin A.G. *IEEE J. Quantum Electron*., **50**, 1061 (2014).
34. Vyatkin A.G., Khazanov E.A. *IEEE J. Quantum Electron*., **51**, 1700108 (2015).
35. Vyatkin A.G., Khazanov E.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **32**, 1084 (2015).
36. Сиротин Ю.И. *Кристаллография*, **1**, 708 (1956).
37. Гречушников Б.Н., Бродовский Д. *Кристаллография*, **1**, 597 (1956).
38. Голяев Ю.Д., Евтюхов К.Н., Капцов Л.Н. *Вестник Моск. ун-та*, **21**, 29 (1980).
39. Parfenov V., Shashkin V., Stepanov A. *Appl. Opt*., **32**, 5243 (1993).
40. Yumashev K.V., Loiko P.A. *Opt. Commun*., **333**, 175 (2014).
41. Yumashev K.V., Loiko P.A. *Laser Phys*., **25**, 015003 (2015).
42. Алпатьев А.Н., Смирнов В.А., Щербаков И.А. *Квантовая электроника*, **39**, 1033 (2009) [*Quantum Electron*., **39**, 1033 (2009)].
43. Алпатьев А.Н., Лис Д.А., Смирнов В.А., Щербаков И.А. *Квантовая электроника*, **40**, 604 (2010) [*Quantum Electron*., **40**, 604 (2010)].
44. Алпатьев А.Н., Лис Д.А., Смирнов В.А., Щербаков И.А. *Квантовая электроника*, **40**, 752 (2010). [*Quantum Electron*., **40**, 752 (2010)].
45. Вяткин А.Г., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **39**, 814 (2009) [*Quantum Electron*., **39**, 814 (2009)].
46. Dement'ev A.S. *Laser Phys*., **25**, 095004 (2015).
47. Bričkus D., Dement'ev A.S. *Lithuan. J. Phys*., **56**, 9 (2016).
48. Хазанов Е.А. *УФН*, **186**, 975 (2016).
49. Тимошенко С.П., Гудьир Д. *Теория упругости* (М.: Наука, 1975).
50. Chenais S., Druon F., Forget S., Balembois F., Georges P. *Progr. Quantum Electron*., **30**, 89 (2006).
51. Mukhin I.B., Palashov O.V., Snetkov I.L., Khazanov E.A. *Proc. SPIE*, **66100**, 66100N-1, 2007).
52. Nelson D.F., Lax M. *Phys. Rev. Lett*., **24**, 379 (1970).

53. Nelson D.F., Lax M. *Phys. Rev. B*, **3**, 2778 (1971).
54. Nelson D.F., Lax M. *Phys. Rev. B*, **4**, 3779 (1971).
55. Kuznetsov I.I., Mukhin I.B., Silin D.E., Vyatkin A.G., Vadimova O.L., Palashov O.V. *IEEE J. Quantum Electron*., **50**, 133 (2014).
56. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела* (М.: Наука, 1977).
57. Turley J., Sines G. *J. Phys. D: Appl. Phys*., **4**, 264 (1971).
58. Date E.H.F., Andrews K.W. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **2**, 1373 (1969).
59. Snetkov I.L., Vyatkin A.G., Palashov O.V., Khazanov E.A. *Opt. Express*, **20**, 13357 (2012).
60. Snetkov I.L., Yakovlev A.I., Palashov O.V. *Laser Phys. Lett*., **12**, 095001 (2015).
61. Ho P.S., Ruoff A.L. *Phys. Rev*., **161**, 864 (1967).
62. Crystran Ltd. Optical Materials, http://www.crystran.co.uk/optical-materials.
63. Jones R.C. *J. Opt. Soc. Am*., **31**, 488 (1941).
64. Khazanov E., Andreev N.F., Mal'shakov A., Palashov O., Poteomkin A.K., Sergeev A., Shaykin A.A., Zelenogorsky V., Ivanov I.A., Amin R., Mueller G., Tanner D.B., Reitze D.H. *IEEE J. Quantum Electron*., **40**, 1500 (2004).
65. Mironov E.A., Palashov O.V. *IEEE J. Quantum Electron*., **53**, 1700208 (2017).
66. Vyatkin A.G., Snetkov I.L., Palashov O.V., Khazanov E.A. *Opt. Express*, **21**, 22338 (2013).
67. Cousins A.K. *IEEE J. Quantum Electron*., **28**, 1057 (1992).
68. Chenais S., Balembois F., Druon F., Lucas-Leclin G., Georges P. *IEEE J. Quantum Electron.*, **40**, 1217 (2004).