

**ЭКСТРЕМАЛЬНО КОРОТКИЕ ЛАЗЕРНЫЕ ИМПУЛЬСЫ****Плотность энергии и спектр электромагнитных импульсов с одним и менее периодами поля****И.А.Артюков, А.В.Виноградов, Н.В.Дьячков, Р.М.Фещенко**

*На основе точного решения уравнений Максвелла в виде схлопывающейся векторной сферической волны, задаваемой произвольной функцией времени, рассчитана максимальная плотность энергии, достижимая при фокусировке экстремально коротких импульсов различной формы. Показано, что полученная нами ранее формула, определяющая указанную величину для гауссовых квазимонохроматических импульсов через параметры их спектра, приближенно (с точностью  $\pm 40\%$ ) справедлива также для основных типов экстремально коротких импульсов.*

**Ключевые слова:** электромагнитные импульсы с одним и менее периодами поля, схлопывающаяся векторная сферическая волна, уравнения Максвелла.

**1. Введение**

Вопросы генерации и применения сверхкоротких лазерных импульсов с малым числом периодов поля привлекают внимание уже два десятилетия [1–3]. Эти импульсы широко используются в нелинейной оптике, при исследовании быстропротекающих процессов, в лазерных технологиях и в ряде других областей. Кроме того, для них наиболее ярко проявляются пространственно-корреляционные эффекты: зависимость временных и спектральных характеристик когерентного излучения от положения, т. е. от координаты, детектора [4–7]. В нашей предыдущей статье [8] была рассмотрена эволюция полей схлопывающихся квазимонохроматических электромагнитных импульсов. В настоящей работе, следуя [8], на примере простейшего точного решения уравнений Максвелла, отвечающего пучку с конечной энергией, рассматривается эволюция схлопывающихся сверхкоротких импульсов длительностью порядка периода световой волны.

Второй раздел посвящён обзору работ по нахождению точных решений уравнений Максвелла в вакууме. В разд.3 приведён краткий вывод одного из решений, описывающего электромагнитный импульс типа схлопывающейся оболочки, и обсуждаются основные его свойства, в том числе отношение максимальной плотности энергии к полной энергии импульса. Далее в разд.4 для монохроматических пучков даны определения средней частоты и ширины линии (дисперсии), которые затем в этом разделе и в разд.6 используются для описания квазимонохроматического, а также одно- и полупериодных импульсов и параметров их фокусировки. В разд.5 оценка плотности энергии в центре схлопывающегося импульса для сравнения получена из термодинамических соображений и с ис-

пользованием интеграла Френеля. В Приложении рассмотрено свойство трёхмерного волнового уравнения, с помощью которого метод настоящей работы может быть распространён на схлопывающиеся электромагнитные оболочки более сложной геометрии.

**2. О точных решениях уравнений электромагнитного поля**

Допустим, что имеется лазерный импульс с энергией  $\mathcal{E}$ . Какую максимальную плотность электромагнитной энергии  $\epsilon_m$  можно получить при его фокусировке? Как при фокусировке меняются его форма и спектр? Подобные вопросы требуют разработки теоретических моделей, основанных на решениях уравнений Максвелла, которые удовлетворяют двум условиям: локализованности решения, что означает конечность полной энергии  $\mathcal{E}$ , равной интегралу от плотности энергии  $\epsilon(r, t)$  по всему пространству, и невозможности представления поля в виде произведения пространственной и временной частей. Отметим сразу, что обычный гауссов пучок, а также любой монохроматический пучок указанным условиям не удовлетворяют. Однако их суперпозиция может быть использована для описания пучков, имеющих конечную спектральную ширину и энергию.

С развитием лазерной физики и, особенно, лазеров сверхкоротких импульсов, содержащих малое число периодов поля, резко возрос интерес к изучению точных решений уравнений Максвелла для монохроматических пучков, которые в отличие от гауссовых пучков могут непосредственно использоваться для решения упомянутых задач физики сверхкоротких лазерных импульсов.

Перечислим основные подходы к получению точных решений уравнений электромагнитного поля, которые широко используются в оптике и лазерной физике. Наиболее известны точные решения в виде гауссовых пучков и интегралов Френеля параболического волнового уравнения, которое само является приближённым. Поэтому такие подходы применимы, строго говоря, только для моно-

**И.А.Артюков, А.В.Виноградов, Н.В.Дьячков, Р.М.Фещенко.** Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: vinograd@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 14 октября 2019 г.

хроматических и узконаправленных (параксиальных) пучков<sup>1</sup>. Для моделирования непараксиальных монохроматических пучков применяются комплексифицированные (получающиеся сдвигом одной из координат в комплексную плоскость) сферические волны и другие точные решения уравнения Гельмгольца, описывающие гармонические (монохроматические) электромагнитные поля [9–11]. Однако по указанным выше причинам для описания эффектов, рассматриваемых в настоящей работе, параболическое волновое уравнение и уравнение Гельмгольца не подходят, и далее речь будет идти только о полной системе векторных уравнений Максвелла. В этом случае большинство работ по нахождению точных решений опирается на известную ещё с начала прошлого века глубокую связь уравнений Максвелла со скалярным волновым уравнением [12]. В частности, любое решение последнего даёт возможность с помощью элементарных векторных операций построить точное решение уравнений Максвелла (см. ниже)<sup>2</sup>. Благодаря этому задача сводится к отысканию точных решений скалярного волнового уравнения. Простейшее сферически-симметричное решение [14, 15] и используется в нашей работе (см. разд.3). Построенное на его основе точное решение уравнений для электромагнитного поля с конечной энергией обладает уже не сферической, а более сложной симметрией, которая соответствует угловой зависимости характеристик излучения диполя.

Вероятно, впервые точные решения уравнений Максвелла были использованы для описания сверхкоротких лазерных импульсов Хелуортом и др. [16–18]. Авторы этих работ действовали ставшим к тому времени стандартным методом, основанным на скалярном волновом уравнении, но вместо сферически-симметричного воспользовались более сложным решением с цилиндрической симметрией, найденным ранее в [11]. Оно служило «образующей функцией» для пучков, соответствующих точным несингулярным решениям уравнений Максвелла и имеющим в фокусе форму «пончика» (doughnut). Результаты расчётов применялись для описания однопериодных лазерных импульсов и их пространственно-временных корреляций, ускорения ими релятивистских электронов и экспериментов с терагерцевым излучением. Обсуждались возможности получения таких импульсов в волноводах и резонаторах с изогнутыми зеркалами.

В работе [19], являющейся развитием [20], структура сфокусированных лазерных пучков исследуется с целью наблюдения квантово-электродинамических эффектов. В ней также применяется метод скалярного волнового уравнения с производящей функцией, обладающей осевой симметрией. Однако вместо стандартного оператора [12, 13] предлагается новый оператор, переводящий эту функцию

в решение уравнений Максвелла. Изучена структура сфокусированных гармонического и субпериодного импульсов. Результаты исследований используются в расчётах пороговой интенсивности, при которой в лазерном поле рождаются электронно-позитронные пары [21].

Самый простой, в смысле описания элементарными функциями, световой импульс с конечной энергией можно представить себе следующим образом. Сферическая оболочка произвольной формы, заполненная полем, сжимается к центру, проходит через него, интерферируя некоторое время сама с собой, и затем продолжает расширяться, уходя на бесконечность. При этом форма оболочки меняется незначительно, кроме момента сжатия, после чего она восстанавливается. Соответствующее решение обсуждается в [8, 22] и в настоящей работе. Авторы [22] для вывода несингулярного решения вводят вектор Герца точечного источника, а затем, как и в [19], складывают запаздывающий и опережающий потенциалы, следуя [23, 24]. Результаты расчётов используются для анализа структуры поля, оценки максимальной его величины и объёма, занятого полем при фокусировке. Предлагается метод получения рассмотренных пучков в «4π-фокусирующих системах» с параболическими зеркалами. В работе [8] то же решение находится стандартным методом скалярного волнового уравнения, однако временная структура импульса иная. Существенным недостатком, ограничивающим практическое применение результатов [8, 22], является отсутствие параметра, отвечающего за расходимость. Тем не менее они позволяют связать максимальное поле в момент сжатия с полной энергией и спектром падающего импульса [8], а также проследить эволюцию формы импульса в процессе фокусировки. Это обстоятельство указывает на принципиальную возможность формирования временной структуры импульса для достижения максимальных полей в фокусе [22].

Теории электромагнитных импульсов, их инвариантам и примерам посвящена монография [25]. Большое число точных решений скалярного волнового уравнения содержится в обзоре [9] и в более поздней работе [26]. В соответствии с вышесказанным они могут быть использованы для построения свободных электромагнитных полей. Ещё один регулярный подход может быть развит с помощью классификации решений волнового уравнения и уравнений Максвелла на основе представлений группы вращений и шаровых векторов [27, 28]. В пользу этого говорит и результат, изложенный в Приложении.

### 3. Схлопывающаяся оболочка – электромагнитный импульс с конечной энергией

Как известно, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в пустом пространстве можно записать в виде системы уравнений для вектор-потенциала  $A$ :

$$\Delta A = \frac{1}{c^2} \ddot{A}, \quad (1a)$$

$$\operatorname{div} A = 0, \quad (1b)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. При этом векторы электрического ( $E$ ) и магнитного ( $H$ ) полей выражаются через потенциал  $A$  следующим образом:

<sup>1</sup> Несмотря на это, параболическое уравнение и связанные с ним пучки нашли и находят широчайшее применение в практических задачах оптики и физики линейных и нелинейных волновых процессов. Подробнее об условиях применимости параболического волнового уравнения можно узнать в [9]. Тема настоящей работы выходит за рамки обсуждения этих условий.

<sup>2</sup> Справедливо и другое (в каком-то смысле обратное) утверждение – теорема Уиттекера [12, 13]: любое свободное электромагнитное поле может быть выражено через два решения скалярного волнового уравнения. Более изящно теорема формулируется так: любое свободное электромагнитное поле является суперпозицией двух полей, каждое из которых построено на основе точного решения скалярного волнового уравнения.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}. \quad (2)$$

Интересующие нас решения системы (1) и соответствующие им поля (2) имеют достаточно общий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{l} \times \nabla u(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{l} \times \nabla u(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{l} \Delta u(\mathbf{r}, t) - (\mathbf{l} \nabla) \nabla u(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{l}$  – произвольный единичный аксиальный вектор, а  $u(\mathbf{r}, t)$  – произвольное решение скалярного волнового уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \ddot{u}. \quad (4)$$

Если взять решение уравнения (4) в виде плоской волны, то нетрудно убедиться в том, что подстановка его в выражения (3) и (2) даст решение уравнений Максвелла (1) в виде плоской волны с линейной поляризацией, вектор которой перпендикулярен как вектору  $\mathbf{l}$ , так и направлению распространения волны. Однако решение в виде плоской волны для упомянутой задачи не подходит, поскольку имеет бесконечную энергию.

Для решения поставленной задачи можно использовать сферически-симметричное решение уравнения (4) без особенности в нуле:

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{f(ct + |\mathbf{r}|) - f(ct - |\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|}, \quad (5)$$

где  $f(x)$  – вещественная, гладкая, быстро спадающая при больших  $x$  функция. Подстановка этого выражения в (3) даёт следующие выражения для электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{H} = \mathbf{l} \left( \Delta u - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \mathbf{n}(\mathbf{l} \mathbf{n}) r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{l}}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Точку  $\mathbf{r} = 0$  логично назвать точкой схлопывания волны. Выражения (6) сильно упрощаются в двух предельных случаях: для бесконечно удаленных по времени и пространству точек и для самой точки схлопывания. В первом случае (при  $ct \rightarrow \infty$ ,  $r = ct - x \rightarrow \infty$ ,  $x$  – переменная, модуль которой не превышает величину порядка длины импульса) имеем

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{l}}{r} g(ct - r), \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{l} - \mathbf{n}(\mathbf{l} \mathbf{n})}{r} g(ct - r), \quad (7)$$

а во втором (при  $r = 0$ ) получаем

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = \frac{4}{3} \mathbf{l} g'(ct), \quad (8)$$

где

$$g(x) = f''(x) \quad (9)$$

– новая произвольная функция, через которую могут быть выражены полная энергия импульса  $\mathcal{E}$  и плотность энер-

гии в центре  $\epsilon(\mathbf{r} = 0, t)$ . Соответствующие формулы приведены в [8].

Формулы (7) и (8) демонстрируют эффект пространственно-временных корреляций: по мере распространения к центру форма схлопывающегося импульса трансформируется в форму своей производной. Они позволяют также получить ряд полезных соотношений, например связь полной энергии импульса  $\mathcal{E}$  с максимальным значением её плотности в точке схлопывания  $\epsilon_m$ :

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{\max[g'(x)]^2}{3\pi \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx}. \quad (10)$$

Здесь для вычисления полной энергии импульса использовалась теорема Пойнтинга. Выражения (7) и (8) дают возможность получить простое соотношение для форм спектра импульса в точке схлопывания ( $F_0(\omega)$ ) и вдали от нее ( $F_\infty(\omega)$ ):

$$\begin{aligned} F_0(\omega) &\propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) \exp\left(-\frac{i\omega x}{c}\right) dx \right|^2 \\ &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\left(-\frac{i\omega x}{c}\right) dx \right|^2 \propto \omega^2 F_\infty(\omega). \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (10) является наиболее общей, однако она не позволяет выразить указанное отношение через общепринятые параметры импульса: длительность, частоту и ширину спектра. Действительно, такие выражения должны зависеть от конкретной формы (типа) импульса, некоторые из них будут рассмотрены ниже. Для начала определимся с выбором основных универсальных временных и спектральных характеристик импульса.

#### 4. Квазимонохроматический гауссов импульс

При рассмотрении вещественных импульсов произвольной формы  $g(t)$  в качестве временной характеристики выберем корень из дисперсии времени  $\sigma_t$  и назовем её длительностью:

$$\sigma_t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}, \quad \langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t g^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt}, \quad (12)$$

$$\langle t^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 g^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt}.$$

В качестве спектральных характеристик используем центральную (среднюю) частоту  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \langle \omega \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \omega |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}, \quad (13)$$

и ширину спектра  $\sigma_\omega$  (корень из дисперсии частоты):

$$\sigma_\omega = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle - \omega_0^2}, \quad \langle \omega^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \omega^2 |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}, \quad (14)$$

где

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i\omega t) dt \tag{15}$$

– фурье-образ функции  $g(t)$ . Начнем с импульса, рассмотренного в [8, 22], для которого функция  $g(x = ct)$  задается выражением

$$g(x) = C \exp(-x^2/a^2) \sin(qx). \tag{16}$$

В случае, если

$$qa \gg 1, \tag{17}$$

этот импульс можно назвать квазимонохроматическим гауссовым, а длительность  $\sigma_t$ , ширина спектра  $\sigma_\omega$  и центральная частота  $\omega_0$  согласно (12)–(14) определяются соотношениями

$$\sigma_t = a/(4c), \quad \omega_0 = qc, \quad \sigma_\omega = cla. \tag{18}$$

Подставим теперь функцию (16) в выражение (10) и с учётом (18) получим

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{q^2}{3a} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} = \frac{8}{3} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0}\right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0}. \tag{19}$$

Здесь  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$  – центральная длина волны для рассматриваемого импульса. Выражение (19) имеет наглядный смысл: отношение максимальной плотности энергии импульса к полной его энергии пропорционально относительной ширине спектра и обратно пропорционально объёму области пространства с линейными размерами порядка  $\lambda_0$ .

### 5. Приближенная оценка максимальной плотности энергии для квазимонохроматического случая («термодинамический предел»)

Формулу, подобную (19), для квазимонохроматического пучка можно получить путём оценки максимально достижимой яркости излучения в точке фокусировки. Пусть импульс представляет собой плоскую волну, которая падает на идеальную фокусирующую систему. Вход этой системы круглый и имеет радиус  $R$ , а выход виден из точки фокусировки под телесным углом  $\Omega$  (рис.1). Для оценки яркости излучения в точке фокусировки воспользуемся теоремой о том, что она не может превышать яр-

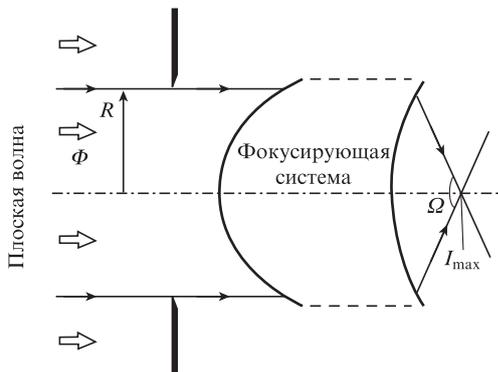


Рис.1. Схема фокусировки плоской волны.

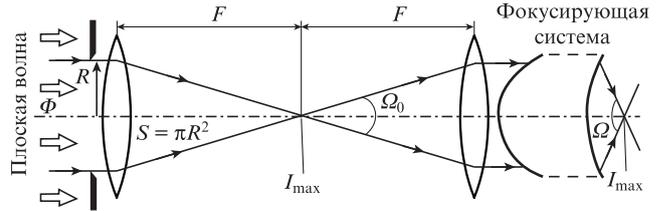


Рис.2. Эквивалентная дополненная схема фокусировки плоской волны.

кость источника. Как известно, яркость является понятием геометрической оптики, в то время как указанный предел плотности энергии полностью определяется волновыми свойствами излучения. Однако отмеченное несоответствие можно преодолеть, заменив упомянутую систему фокусировки эквивалентной (рис.2), в которой для оценки «волновых» ограничений можно использовать параксиальное приближение.

Представленная на рис.2 дополненная схема отличается от исходной (рис.1) наличием перед фокусирующей системой диафрагмы радиусом  $R$  и двух одинаковых линз с общим фокусом. Здесь предполагается, что

$$1 \gg R/F \gg \lambda_0/R. \tag{20}$$

В данном случае пучок на выходе второй линзы практически не будет отличаться от пучка на входе первой, поскольку при выполнении второго неравенства в (20) справедливы законы геометрической оптики. При этом можно сказать, что наша фокусирующая система вместе со второй линзой фактически создает изображение дифракционного пятна, расположенного в точке общего фокуса линз. Максимальную интенсивность излучения в этом дифракционном пятне легко найти с помощью интеграла Френеля, зная соответствующий максимальный поток излучения  $\Phi_{\max}$  через входную диафрагму:

$$I_{0\max} = \frac{\Phi_{\max}}{\pi R^2} \left(\frac{\pi R^2}{\lambda_0 F}\right)^2 = \Phi_{\max} \frac{\Omega_0}{\lambda_0^2}. \tag{21}$$

Здесь  $\Omega_0 = \pi R^2/F^2$  – фактически телесный угол, в котором сосредоточено излучение из дифракционного пятна. Таким образом, дифракционное пятно в фокусе линз можно рассматривать как протяженный источник излучения с максимальной яркостью

$$B_{\max} = \frac{I_{0\max}}{\Omega_0} = \frac{\Phi_{\max}}{\lambda_0^2}. \tag{22}$$

Тогда, согласно упомянутой теореме, величиной (22) ограничена яркость излучения в точке фокусировки. Это значит, что для искомой максимальной плотности энергии  $\epsilon_m$  можно записать следующую оценку:

$$\epsilon_m = \frac{I_{\max}}{c} \leq \frac{\Omega B_{\max}}{c} = 4\pi \frac{\Phi_{\max}}{\lambda_0^2 c}. \tag{23}$$

Здесь мы предполагаем, что максимальный телесный угол, в котором проводится фокусировка, равен  $4\pi$ .

Остаётся выразить максимальный поток энергии  $\Phi_{\max}$  через параметры импульса. Для импульса вида (16) с учётом (17) временную зависимость потока энергии  $\Phi(t)$  можно представить в виде

$$\Phi(t) = \Phi_{\max} \exp\left(-\frac{2c^2 t^2}{a^2}\right) \sin^2(qct). \quad (24)$$

Тогда полная энергия

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{a}{c} \Phi_{\max}. \quad (25)$$

Окончательно выражение (23) с учетом (25) и (18) можно представить в виде

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} \leq \frac{8\sqrt{2\pi}}{\lambda_0^2 a} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{q^2}{a} = 8 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0}\right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0}. \quad (26)$$

Заметим, что получившаяся формула отличается от точной формулы (19) числовым коэффициентом 3.

## 6. Сверхкороткие импульсы различной формы

Рассмотрим теперь случай сверхкоротких импульсов и попробуем для них получить похожие на (19) выражения. Отметим, что для этих импульсов средняя частота и средняя длина волны не связаны таким простым соотношением, как (19) для квазимонохроматического импульса. В то же время значение средней длины волны, вычисленное путём усреднения по частотам, может оказаться бесконечным. В связи с этим характерную длину волны для импульса  $\lambda_0$  будем определять через среднюю частоту  $\omega_0$  так же, как и в квазимонохроматическом случае:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \langle \omega \rangle. \quad (27)$$

Здесь мы не будем рассматривать задачу в общем виде, а ограничимся типами импульсов, приведёнными в [29].

*Однопериодный гауссов импульс.* Его можно задать в виде (16), предположив при этом, что  $q \rightarrow 0$ . В таком случае это выражение перейдёт в выражение

$$g(x) = Cx \exp(-x^2/a^2). \quad (28)$$

Отношение максимальной плотности энергии в точке сложопывания к полной энергии (10) принимает вид

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{2}{3a^3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3. \quad (29)$$

Теперь выразим ту же величину через спектральные параметры. Подставляя спектр импульса

$$|G(\omega)|^2 = A^2 \omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2 a^2}{2c^2}\right)$$

в (13), (14), находим соотношения

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx \frac{1.77}{a}, \quad \frac{\langle \omega^2 \rangle}{c^2} = \frac{3}{a^2}, \quad (30)$$

$$\frac{\sigma_\omega}{c} = \frac{1}{a} \sqrt{3 - \frac{8}{\pi}} \approx \frac{0.67}{a}.$$

Здесь  $A$  – константа, связанная с константой  $C$  из (28). Выполняя несложные преобразования, получаем аналог выражения (19):

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{2}{3} \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0}\right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0} \approx 1.6 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0}\right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0}. \quad (31)$$

*Полупериодный гауссов импульс.* Он получается также путём предельного перехода к нулевой частоте модуляции в (16), но только при предварительной замене синуса косинусом:

$$g(x) = C \exp(-x^2/a^2). \quad (32)$$

Выражение (10) принимает вид

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{2}{3a^3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (33)$$

Спектр импульса и его параметры определяются соотношениями

$$|G(\omega)|^2 = A^2 \exp\left(-\frac{\omega^2 a^2}{2c^2}\right), \quad \frac{\omega_0}{c} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx \frac{0.8}{a}, \quad (34)$$

$$\frac{\langle \omega^2 \rangle}{c^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\sigma_\omega}{c} = \frac{1}{a} \sqrt{3 - \frac{2}{\pi}} \approx \frac{0.603}{a},$$

а приведенная плотность энергии

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} \approx 2.56 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0}\right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0}. \quad (35)$$

*Полупериодный солитоноподобный импульс.* Для солитонов (устойчивых конфигураций поля, поддерживаемых пространственным профилем нелинейной добавки к показателю преломления среды) поле не может убывать быстрее, чем экспонента от модуля координаты. Наиболее близко соответствующей такому закону регулярной функцией является гиперболический секанс. В работе [9] полупериодный солитоноподобный импульс задается следующей зависимостью поля:

$$g(x) = \frac{C}{\cosh^2(x/a)}. \quad (36)$$

Выражение (10) для него имеет вид

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{4}{27\pi a^3}. \quad (37)$$

Преобразование Фурье от функции (36) берётся путём интегрирования по контуру на комплексной плоскости  $-\infty \rightarrow +\infty \rightarrow +\infty + i\pi a \rightarrow -\infty + i\pi a \rightarrow -\infty$  и сводится к одному вычету (в точке  $i\pi a/2$ ). В результате имеем соотношения

$$G(\omega) = \frac{A\omega}{\sinh(\pi\omega a/c)}, \quad (38)$$

$$|G(\omega)|^2 = \frac{A^2 \omega^2}{\sinh^2(\pi\omega a/c)}, \quad \frac{\omega_0}{c} = \frac{18}{\pi^3 a} \zeta(3) \approx \frac{0.698}{a}, \quad (39)$$

$$\frac{\langle \omega^2 \rangle}{c^2} = \frac{4}{5a^2}, \quad \frac{\sigma_\omega}{c} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{1}{5} - \left(\frac{3}{\pi}\right)^4 \left[\frac{\zeta(3)}{\pi}\right]^2} \approx \frac{0.56}{a}.$$

Здесь

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$$

– соответствующее значение дзета-функции Римана. В итоге отношение (37) выражается через параметры спектра следующим образом:

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} \approx 2.72 \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0} \right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0}. \quad (40)$$

*Однопериодный солитоноподобный импульс.* Ему соответствует производная от импульса вида (36), т. е.

$$g(x) = \frac{C \sinh(x/a)}{\cosh^3(x/a)}. \quad (41)$$

Для неё выражение (10) имеет вид

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{5}{4\pi a^3}. \quad (42)$$

Поскольку производная (41) пропорциональна производной от полупериодного импульса (36), его спектр получается из соответствующего выражения (39) умножением на  $\omega^2$ :

$$|G(\omega)|^2 = \frac{A^2 \omega^4}{\sinh^2(\pi \omega a / c)}. \quad (43)$$

Для вычисления параметров спектра будем использовать общую формулу для интегралов:

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^n d\omega}{\sinh^2[\pi \omega a / (2c)]} = 4 \frac{n!}{(\pi a)^{n+1}} \zeta(n), \quad (44)$$

применимую также для получения результатов по формулам (39). Таким образом, для параметров спектра (43) получаем соотношения

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{450}{\pi^5 a} \zeta(5) \approx \frac{1.525}{a}, \quad \frac{\langle \omega^2 \rangle}{c^2} = \frac{20}{7a^2}, \quad \frac{\sigma_\omega}{c} \approx \frac{0.729}{a}. \quad (45)$$

Окончательно выражение для приведённой плотности энергии принимает вид

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} \approx 2.7 \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0} \right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0}. \quad (46)$$

*Полупериодный лоренцевский импульс.* Его образующая функция имеет форму резонансной кривой:

$$g(x) = \frac{C}{a^2 + x^2}. \quad (47)$$

Отношение (10) имеет вид

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{9}{32\pi^2 a^3}. \quad (48)$$

Спектр импульса (47) и его параметры определяются соотношениями

$$|G(\omega)|^2 = A^2 \exp\left(-\frac{2a\omega}{z}\right), \quad \frac{\omega_0}{c} = \frac{1}{2a}, \quad (49)$$

$$\frac{\langle \omega^2 \rangle}{c^2} = \frac{1}{2a^2}, \quad \frac{\sigma_\omega}{c} = \frac{1}{2a},$$

а выражение для приведённой плотности энергии (48) преобразуется в выражение

$$\frac{\epsilon_m}{\mathcal{E}} = \frac{9}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0} \right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0} \approx 3.59 \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_0} \right)^3 \frac{\sigma_\omega}{\omega_0}. \quad (50)$$

Рассмотренные характеристики одно- и полупериодных непараксиальных схлопывающихся импульсов приведены в табл. 1.

Таким образом, формулы (31), (35), (40), (46) и (50) показывают, что выражение для предельной приведённой плотности электромагнитной энергии схлопывающегося импульса (19), найденное в [8] для квазимонохроматического случая, остаётся справедливым и для одно- и полупериодного импульсов с точностью до множителя 0.6–1.4. Различие связано с формой сверхкороткого импульса. Максимальное значение приведённой плотности энергии получается для полупериодного лоренцевского импульса. Отметим, что согласно [29] вероятность ионизации атома в поле одно- и полупериодных импульсов также зависит от их формы.

## 7. Выводы

Итак, в настоящей работе на примере простейшего точного решения уравнений Максвелла с конечной энергией поля исследованы свойства электромагнитных пучков, не связанные с приближениями их параксиальности и монохроматичности, что дало возможность рассмотреть одно- и полупериодные импульсы.

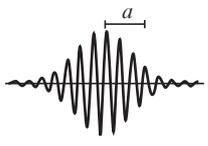
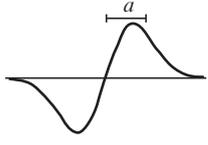
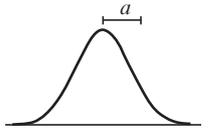
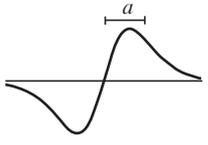
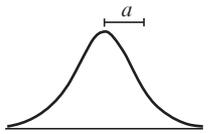
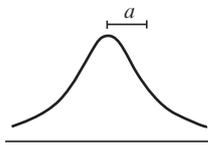
Показано, что приведённая максимальная плотность электромагнитной энергии схлопывающегося импульса, найденная ранее для квазимонохроматического гауссова импульса, сохраняет свою величину в случаях одно- и полупериодных импульсов с точностью до множителя 0.6–1.4, зависящего от формы импульса. Установлено, что форма произвольного импульса по мере его распространения к центру схлопывания преобразуется в форму своей производной.

Исследованные решения уравнений для электромагнитного поля соответствуют сферически-симметричным решениям скалярного волнового уравнения. Последнее имеет также точные аналитические решения без радиальной симметрии, отвечающие сферическим гармоникам с индексом  $l \neq 0$  (см. Приложение). Очевидно, что для них тоже может быть построена изложенная в настоящей статье теория.

Установленные соотношения между максимально достижимой плотностью электромагнитной энергии и спектром схлопывающегося импульса могут быть полезны для эвристических оценок. Для практических целей желательно провести аналогичное исследование параметров электромагнитных импульсов, соответствующих решениям скалярного волнового уравнения с цилиндрической симметрией.

Отметим в заключение, что в ряде работ (см. разд. 2) рассматривается движение заряженных частиц в пучках, описываемых точными решениями уравнений Максвелла. Это несомненно представляет определённый интерес в случаях (включая и эту работу), когда решения содержат произвольную функцию времени и позволяют моделировать импульсы произвольной временной формы с произвольным числом периодов. В то же время пространственная структура поля, как правило, вполне конкретна (в на-

Табл.1. Спектральные параметры и коэффициенты при приведённой плотности энергии (10) для различных типов импульсов.

Тип импульса	Форма	Параметры импульса		Коэффициент приведённой плотности энергии
		$\omega_0$	$\sigma_\omega$	
Квазимонохроматический гауссов		$qc$	$cla$	1 (см. (19))
Однопериодный гауссов		$1.77cla$	$0.67cla$	0.6
Полупериодный гауссов		$0.8cla$	$0.603cla$	0.96
Однопериодный солитоноподобный		$1.525cla$	$0.729cla$	1.013
Полупериодный солитоноподобный		$0.698cla$	$0.56cla$	1.02
Полупериодный лоренцевский		$0.5cla$	$0.5cla$	1.347

стоящей работе – это сферическая гармоника) и может быть весьма далека от той, которая обычно встречается на практике. Поэтому в работах [16–18, 22] предлагались оптические системы для преобразования лазерного излучения в пучки, описываемые точными решениями уравнений для поля. Другой подход заключается в поиске новых точных решений уравнений Максвелла, более полно воспроизводящих характеристики реального лазерного излучения [19, 26, 30].

Авторы благодарны А.М.Федотову, А.П.Киселёву, М.В.Перель, А.Б.Плачену, М.В.Фёдорову и П.В.Зинину за полезные обсуждения.

Работа поддержана Базовым финансированием в рамках темы №0023-0002-2018, грантами РФФИ №19-02-00394, 18-08-01066, 18-29-17039 и 17-08-01286, а также Программой научных исследований Президиума РАН «Актуальные проблемы фотоники, зондирование неоднородных сред и материалов» (ПП РАН №7).

### Приложение

Кроме сферически-симметричного решения (5) скалярное волновое уравнение (4) имеет решение в виде сферических гармоник:

$$u(r, t) = Y_{lm}(\theta, \varphi) R_l(r, t), \tag{П1}$$

где  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  – сферическая функция, а радиальная функция  $R_l(r, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_l}{\partial r} \right) - l(l+1)R_l = \frac{r^2}{c^2} \ddot{R}_l. \tag{П2}$$

Выразим теперь функцию  $R_l(r, t)$  через произвольную гладкую функцию  $f(x)$ , пользуясь тем, что для  $l = 0$  решение представимо в виде (5). Для этого повторим рассуждения, приведённые в [31]. Предположим, что мы нашли решение  $R_l(r, t)$  уравнения (П2) для некоторого  $l$ . Запишем уравнение (П2) при  $l = l + 1$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{l+1}}{\partial r} \right) - (l+1)(l+2)R_{l+1} = \frac{r^2}{c^2} \ddot{R}_{l+1}. \tag{П3}$$

Подставим в (П3) функцию

$$R_{l+1} = r^l \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{R_l}{r^l} \right). \tag{П4}$$

Для правой части (П3) с учётом (П2) получим выражение

$$\frac{r^2}{c^2} \ddot{R}_{l+1} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{c^2} \dot{R}_l \right) - \frac{l+2}{r} \left( \frac{r^2}{c^2} \dot{R}_l \right) = r^2 \frac{\partial^3 R_l}{\partial r^3} - (l-2)r \frac{\partial^2 R_l}{\partial r^2} - (l+1)(l+2) \frac{\partial R_l}{\partial r} + l(l+1)(l+2) \frac{R_l}{r}, \quad (\text{П5})$$

а для левой части (П3) – выражение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R_{l+1}}{\partial r} \right) - (l+1)(l+2) R_{l+1} = r^2 \frac{\partial^3 R_l}{\partial r^3} - (l-2) \frac{\partial^2 R_l}{\partial r^2} - (l+1)(l+2) \left( \frac{\partial R_l}{\partial r} - \frac{R_l}{r} \right). \quad (\text{П6})$$

Из (П5) и (П6) следует, что равенство (П3) выполняется.

В итоге мы имеем рекуррентную формулу (П4), которая вместе с формулой (5) даёт решение радиального волнового уравнения для сферической волны при любом  $l$ , содержащее произвольную гладкую функцию  $f(x)$ .

Приведём в заключение выражения для радиальных функций  $R_l(r, t)$  для первых трёх гармоник:

$$\begin{aligned} R_0(r, t) &= \frac{f(ct+r) - f(ct-r)}{r}, \\ R_1(r, t) &= \frac{f'(ct+r) + f'(ct-r)}{r} - \frac{f(ct+r) - f(ct-r)}{r^2}, \\ R_2(r, t) &= \frac{f''(ct+r) - f''(ct-r)}{r} - 3 \frac{f'(ct+r) + f'(ct-r)}{r^2} + 3 \frac{f(ct+r) - f(ct-r)}{r^3}. \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

1. Brabec T., Krausz F. *Rev. Mod. Phys.*, **72** (2), 545 (2000).
2. Kärtner F.X. (Ed.) *Few-Cycle Laser Pulse Generation and Its Applications* (Springer Science & Business Media, 2004, Vol. 95, Topics in Applied Physics).
3. Silva F. et al. *Opt. Lett.*, **43** (2), 337 (2018).
4. Akturk S. et al. *J. Opt.*, **12** (9), 093001 (2010).

5. Alonso B., Miranda M., Sola I.J., Crespo H. *Opt. Express*, **20** (16), 17880 (2012).
6. Pariente G., Gallet V., Borot A., Gobert O., Quéré F. *Nat. Photonics*, **10** (8), 547 (2016).
7. Alonso B., Perez-Vizcaino J., Minguez-Vega G., Sola I.J. *Opt. Express*, **26** (8), 10762 (2018).
8. Артюков И.А., Виноградов А.В., Дьячков Н.В., Фещенко Р.М. *Квантовая электроника*, **48** (11), 1073 (2018) [*Quantum Electron.*, **48** (11), 1073 (2018)].
9. Киселёв А.П. *Оптика и спектроскопия*, **102** (4), 661 (2007).
10. Heyman E., Felson L.B. *J. Opt. Soc. Am. A*, **6**, 806 (1989).
11. Ziolkowski R.W. *Phys. Rev. A*, **39**, 2005 (1989).
12. Bateman H. *The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave-motion on the Basis of Maxwell's Equations* (Cambridge: University Press, 1915).
13. Zangwill A. *Modern Electrodynamics* (Cambridge: University Press, 2012).
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 2004).
15. Исакович М.А. *Общая акустика* (М.: Наука, 1973).
16. Hellwarth R.W., Nouchi P. *Phys. Rev. E*, **54**, 889 (1996).
17. Feng S., Winful H.G., Hellwarth R.W. *Opt. Lett.*, **23**, 385; 1141 (1998).
18. Feng S., Winful H.G., Hellwarth R.W. *Phys. Rev. E*, **59**, 4630 (1999).
19. Fedotov A.M., Korolev K.Yu., Legkov M.V. *Proc. SPIE*, **6726**, 672613 (2007).
20. Нарожный Н.Б., Фофанов М.С. *ЖЭТФ*, **117**, 867 (2000) [*JETP*, **90**, 753 (2000)].
21. Fedotov A.M. *Laser Phys.*, **19** (2), 214 (2009).
22. Gonoskov I., Aiello A., Heugel S., Leuchs G. *Phys. Rev. A*, **86**, 053836 (2012).
23. Dirac P.A.M. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **5**, 148 (1938).
24. Wheeler J.A., Feynman R.P. *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 157 (1945).
25. Lekner J. *Theory of Electromagnetic Pulses* (San Rafael, USA: Morgan & Claypool Publishers).
26. Kiselev A.P., Plachenov A.B., Chamorro-Posada P. *Phys. Rev. A*, **85**, 043835 (2012).
27. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения* (М.: Физматлит, 1958, с. 119–125).
28. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1969).
29. Келдыш Л.В. *УФН*, **187** (11), 1280 (2017) [*Phys. Usp.*, **60**, 1187 (2017)].
30. Fialkovsky I.V., Perel M.V., Plachenov A.B. *J. Math. Phys.*, **55**, 112902 (2014).
31. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Физматлит, 2002, § 33).