

Управление лазерным полем субизлучательных состояний системы из нескольких атомов в конфигурации, близкой к правильному многоугольнику

А.А.Макаров, В.И.Юдсон

Часть коллективных возбуждений ансамбля близкорасположенных (двухуровневых) атомов может характеризоваться чрезвычайно малыми скоростями радиационного распада, что представляет значительный интерес для хранения квантовой информации. Такие (тёмные) состояния реализуются, например, в планарной геометрии, когда атомы находятся в узлах правильного многоугольника. Однако скорость распада таких возбуждений резко возрастает при отклонении геометрии от идеальной. На примере малой деформации квадрата в ромб показано, что увеличение скорости распада тёмного состояния из-за нарушения симметрии может быть компенсировано подстройкой частоты перехода некоторых атомов при воздействии внешнего лазерного излучения.

Ключевые слова: атомные ансамбли, спонтанный распад, субизлучательные состояния, квантовая информация.

1. Введение

Система из нескольких одинаковых атомов, заключённых в объём с линейным размером $r < \lambda_{eg}$ (λ_{eg} – длина волны перехода из возбуждённого состояния одиночного атома $|e\rangle$ в основное состояние $|g\rangle$), была впервые рассмотрена Дике [1] 65 лет назад как пример образования сверхизлучательных и субизлучательных состояний. Однократно возбуждённые состояния Q_n системы из N невзаимодействующих атомов могут быть представлены в общем виде как

$$Q_n = |g_1 \dots g_{n-1} e_n g_{n+1} \dots g_N\rangle, \quad (1)$$

где атом под номером n возбуждён, а остальные атомы находятся в основном состоянии. Диполь-дипольное взаимодействие между ними приводит к образованию N суперпозиционных (запутанных) состояний, ожидаемые свойства которых могут соответствовать или так называемому *сверхизлучению* – спонтанному распаду, более быстрому, чем переход $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ в одиночном атоме, или *субизлучению* – медленному спонтанному распаду. Такая классификация наглядно реализуется при $N = 2$. В этом случае диполь-дипольное взаимодействие состояний Q_1 и Q_2 приводит к образованию двух запутанных собственных состояний: симметричного, $Q_s = 2^{-1/2}(Q_1 + Q_2)$, и антисимметричного, $Q_a = 2^{-1/2}(Q_1 - Q_2)$ [2, 3]. В то время как состояние Q_s при $r \ll \lambda_{eg}$ распадается со скоростью $\Gamma_s \approx 2\Gamma$ (т.е. с удвоенной скоростью спонтанного распада одиночного атома), для состояния Q_a имеем $\Gamma_a \sim (r/\lambda_{eg})^2\Gamma$. При изучении этой системы основное внимание в ряде работ (см., напр., [4–6] и обзор [3]) уделялось сверхизлучению. Ин-

тересный эффект переключения между состояниями Q_1 и Q_2 , обусловленный вариацией пространственной структуры возбуждающего лазерного импульса, был рассмотрен в работе [7]. Что же касается субизлучательных состояний, то повышенный интерес к ним был вызван их медленным спонтанным распадом и вытекающими отсюда потенциальными возможностями долгого хранения квантовой информации.

В связи с этим закономерным представляется вопрос: возможны ли субизлучательные состояния атомных конфигураций, скорость распада которых по параметру r/λ_{eg} меньше, чем в приведённом выше случае? Яркий пример такого рода был предложен В.С.Летоховым [8–10] – два атома в 1D случае (одномерный волновод или фотонный кристалл), расположенных на расстоянии, равном целому числу полуволн, $m\lambda_{eg}/2$. Сверхустойчивыми являются антисимметричное состояние при чётном значении m и симметричное – при нечётном; они поддерживаются полем, заполняющим пространство между атомами. Распад таких состояний при малом отличии расстояния от его критического значения исследован в работе [11]. В одномерном волноводе рассматривались также более сложные конфигурации (см., напр., [12]). Однако такие схемы могут быть реализованы только для пространственно разделённых атомов. Для двух близкорасположенных атомов в трёхмерном (3D) случае отметим две схемы контроля субизлучательных состояний [13, 14]. Интересная (хотя и весьма сложная) схема для конструирования одноквантового субизлучательного состояния в ансамбле большого числа атомов была рассмотрена в [15], возможность его контроля обсуждалась в работе [16]. Что касается эксперимента, то некоторые свидетельства в пользу изменения скорости спонтанного распада были получены, например, в [17] для ансамбля из большого числа атомов и в [18] для системы из двух ионов в ловушке. Наконец, совсем недавно достоверно наблюдалось субизлучение от облака холодных атомов [19]. Вклад этого эффекта был малым, но детектируемым по узкому спектру флуоресценции, задержанной на времена, значительно превышающие время сверхизлучения.

А.А.Макаров. Институт спектроскопии РАН, Россия, 108840 Москва, Троицк, ул. Физическая, 5; e-mail: amakarov@isan.troitsk.ru
В.И.Юдсон. Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20; Институт спектроскопии РАН, Россия, 108840 Москва, Троицк, ул. Физическая, 5; e-mail: yudson@isan.troitsk.ru

Поступила в редакцию 11 февраля 2020 г.

В связи с вышесказанным принципиальным представляется вопрос о создании субизлучательных состояний, распадающихся медленнее по параметру $r/\lambda_{\text{ег}}$, чем в системе из двух атомов (например, как $(r/\lambda_{\text{ег}})^4$ и т. д.). Совсем недавно была доказана «теорема существования» таких состояний [20, 21]. Это система, демонстрирующая эффект такого экстраординарного субизлучения – «квантовые излучатели» (атомы?) в конфигурации (геометрии) правильного многоугольника, начиная с квадрата (число атомов $N \geq 4$).

В настоящей работе нами исследуются модификации эффекта экстраординарного субизлучения по отношению к малым изменениям оптимальной геометрии. Оказывается, что изменения формы в частном случае $N = 4$ (от квадрата к ромбу) можно полностью скомпенсировать сдвигом частоты перехода в двух противоположных атомах. В разд.2 статьи формулируется модель и приводятся общие аналитические результаты, позволяющие вычислять скорости спонтанного распада атомных систем в произвольной геометрии. В разд.3 обсуждаются свойства собственных возбуждённых одноатомных состояний систем атомов в геометрии правильных многоугольников. В разд.4 приводятся результаты расчётов скорости спонтанного распада нижнего состояния системы в ромбической геометрии с нахождением оптимальных для этих структур частотных сдвигов $\Delta\omega$. Наконец, в разд.5 предлагается схема с использованием лазерного излучения, позволяющая реализовать нужные энергетические сдвиги.

2. Спонтанное излучение атомных систем

Рассматривается система из N одинаковых атомов, локализованных в точках $\mathbf{R}_n = (x_n, y_n, z_n = 0)$ на плоскости $z = 0$. Для простоты предполагается, что основное состояние $|g\rangle$ атома не вырождено (полный угловой момент $J_g = 0$), а возбуждённое состояние $|e\rangle$ трёхкратно вырождено ($J_e = 1$) с проекциями $M = 0, \pm 1$ на ось z (например, атомы II группы – Ве, Mg, Са и т. д.). Ограничиваемся состояниями с проекцией $M = 0$, т. е. излучением с линейной поляризацией на переходе $|e^{(0)}\rangle \rightarrow |g\rangle$. Гамильтониан подсистемы однократно возбуждённых состояний имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & U_{12} & \dots & U_{1n} & \dots & U_{1N} \\ U_{21} & E & \dots & U_{2n} & \dots & U_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n1} & U_{n2} & \dots & E & \dots & U_{nN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{N1} & U_{N2} & \dots & U_{Nn} & \dots & E \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где E – энергия возбуждённого состояния $|e\rangle$ одиночного атома, которую далее считаем равной нулю; U_{jk} – матричные элементы оператора диполь-дипольного взаимодействия, зависящие для данной пары атомов от расстояния $r_{jk} = \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}$ между ними. В рассматриваемом случае, когда ось квантования проекции углового момента перпендикулярна линии, соединяющей атомы, в выражении для оператора диполь-дипольного взаимодействия

$$\hat{U} = \frac{(\hat{\mathbf{d}}_j \cdot \hat{\mathbf{d}}_k)}{r^3} - 3 \frac{(\hat{\mathbf{d}}_j \cdot \mathbf{r})(\hat{\mathbf{d}}_k \cdot \mathbf{r})}{r^5} \quad (3)$$

остаётся только первый член. Следовательно, $U_{jk} = |\langle e^{(0)} | \hat{\mathbf{d}}_z | g \rangle|^2 / r_{jk}^3$, и эти матричные элементы удобно выразить через скорость спонтанного излучения Γ на переходе $|e^{(0)}\rangle \rightarrow |g\rangle$:

$$\Gamma = \frac{32\pi^3}{3\hbar\lambda_{\text{ег}}^3} |\langle e^{(0)} | \hat{\mathbf{d}}^{(z)} | g \rangle|^2; \quad (4)$$

отсюда

$$U_{jk} = \frac{3\Gamma}{4(kr_{jk})^3}, \quad (5)$$

где $k = 2\pi/\lambda_{\text{ег}}$. Далее будем характеризовать систему атомов с использованием параметра U_r , равного значению *наименьшего* матричного элемента U_{jk} , соответствующего *максимальному* из расстояний между атомами в системе.

Сформулировав предположения и ограничения, приведём формулу для скоростей спонтанного излучения произвольной «плоской» системы атомов из собственных состояний $|\psi_j\rangle$ ($j = 1, 2, \dots, N$), построенных с учётом диполь-дипольного взаимодействия, как суперпозиции состояний (1). Вывод общей формулы дан в Приложении 1. В рассматриваемом частном случае плоской геометрии и перехода без изменения проекции углового момента на ось, перпендикулярную плоскости $z = 0$, скорость спонтанного излучения из состояния $|\psi_j\rangle$ выражается в терминах координат атомов \mathbf{R}_n и проекций C_{nj} состояний (1) на состояние $|\psi_j\rangle$ как

$$\Gamma_j^{(N)} = \frac{3\Gamma}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{n=1}^N C_{nj} \exp(ik\mathbf{R}_n) \right|^2 \sin^3\theta d\theta d\varphi. \quad (6)$$

Здесь компоненты вектора \mathbf{k} связаны со сферическими углами θ и φ обычным соотношением: $\mathbf{k} = k(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$. Формула (6) используется в дальнейших расчётах.

3. Правильные многоугольники атомов как источник экстраординарных субизлучательных состояний

Рассмотрим изменение структуры однократно возбуждённых энергетических состояний при увеличении числа атомов в конфигурации правильного многоугольника. В тривиальном случае $N = 2$ энергии $E_1 = -U_r$, $E_2 = +U_r$, а собственные векторы являются соответственно антисимметричным и симметричным, поскольку взаимодействие – величина положительная. Координаты атомов выбираем в виде $\mathbf{R}_1 = \|-r/2, 0, 0\|$, $\mathbf{R}_2 = \|+r/2, 0, 0\|$. Скорости распада состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$ в соответствии с (6) имеют следующий вид:

$$\Gamma_1^{(2)} = \frac{3\Gamma}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\left(\frac{1}{2}kr \sin\theta \cos\varphi\right) \sin^3\theta d\theta d\varphi, \quad (7)$$

$$\Gamma_2^{(2)} = \frac{3\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{1}{2}kr \sin\theta \cos\varphi\right) \sin^3\theta d\theta d\varphi,$$

где нижний индекс при Γ обозначает номер состояния, а верхний – число атомов. При $kr \ll 1$ находим

$$\Gamma_1^{(2)} \approx \frac{3}{16}(kr)^2 \Gamma \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = \frac{1}{5}(kr)^2 \Gamma, \quad \Gamma_2^{(2)} \approx 2\Gamma. \quad (8)$$

В случае $N = 3$ (равносторонний треугольник) принципиально ничего не меняется. Имеются два уровня: двукратно вырожденный уровень с энергией $E_1 = E_2 = -U_r$, скорость распада которого при $kr \ll 1$ пропорциональна $(kr)^2$, и уровень с энергией $E_3 = 2U_r$, распадающийся при этом с утроенной скоростью. Однако при $N = 4$ (квадрат) наблюдаем новый качественный эффект по сравнению с предыдущими двумя случаями. Три верхних уровня образуют структуру, аналогичную структуре при $N = 3$: верхнее состояние с $E_4 = (4\sqrt{2} + 1)U_r$ распадается при $(kr)^2 \ll 1$ со скоростью 4Γ , следующий уровень дважды вырожден ($E_{2,3} = -U_r$) и скорость его распада пропорциональна $(kr)^2$. Существенное отличие заключается в том, что скорость спонтанного излучения из невырожденного нижнего состояния (его энергия $E_1 = (-4\sqrt{2} + 1)U_r$, а собственный вектор $C_{n1} = (1/2)(-1)^n$) пропорциональна уже $(kr)^4$ при $kr \ll 1$; в общем же случае согласно (6) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(4)} &= \frac{3\Gamma}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\cos\left(\frac{1}{2}kr \sin \theta \sin \varphi\right) - \cos\left(\frac{1}{2}kr \sin \theta \cos \varphi\right) \right]^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{3\Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \left[\frac{1}{4}kr \sin \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \right] \\ &\quad \times \sin^2 \left[\frac{1}{4}kr \sin \theta (\cos \varphi - \sin \varphi) \right] \sin^3 \theta d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

откуда при $kr \ll 1$ находим

$$\Gamma_1^{(4)} \approx \frac{3}{512\pi} (kr)^4 \Gamma \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \cos^2 2\varphi d\theta d\varphi =$$



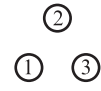

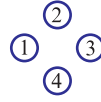

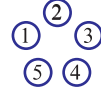
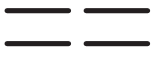
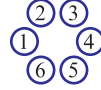

Геометрия	Собственные состояния	Скорости распада Γ_i
	 Сим. Асим.	$\Gamma_i \approx 2\Gamma$ $\propto (r/\lambda)^2$
		$\Gamma_i \approx 3\Gamma$ $\propto (r/\lambda)^2$
		$\Gamma_i \approx 4\Gamma$ $\propto (r/\lambda)^2$ $\propto (r/\lambda)^4$
		$\Gamma_i \approx 5\Gamma$ $\propto (r/\lambda)^2$ $\propto (r/\lambda)^4$
		$\Gamma_i \approx 6\Gamma$ $\propto (r/\lambda)^2$ $\propto (r/\lambda)^4$ $\propto (r/\lambda)^6$

Рис.1. Атомные системы в геометрии правильных многоугольников, их собственные состояния и соответствующие им скорости спонтанного распада.

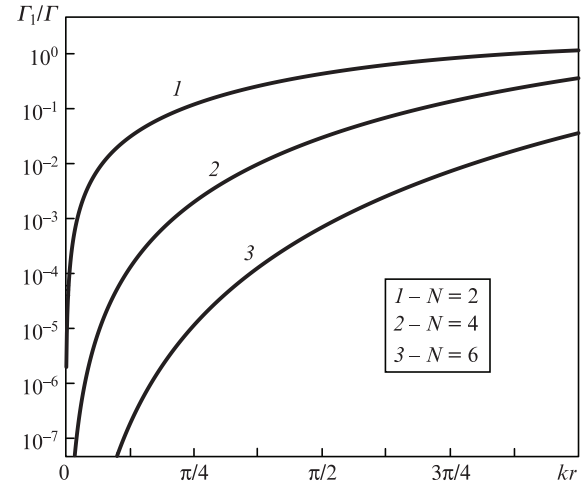


Рис.2. Зависимости скоростей спонтанного распада нижнего состояния систем из двух, четырёх и шести атомов от размеров атомной системы с геометрией, показанной на рис.1.

$$= \frac{3}{512} (kr)^4 \Gamma \int_0^\pi \sin^7 \theta d\theta = \frac{3}{560} (kr)^4 \Gamma \approx 5.4 \times 10^{-3} (kr)^4 \Gamma. \quad (10)$$

Аналогичная закономерность устанавливается при дальнейшем увеличении числа атомов (рис.1). Так, при $N = 5$ к нижнему состоянию добавляется ещё одно, так что нижний уровень становится двукратно вырожденным, а далее при $N = 6$ внизу добавляется новый невырожденный уровень, скорость распада которого при $kr \ll 1$ пропорциональна $(kr)^6$. На рис.2 показан ряд зависимостей $\Gamma_1^{(N)}$ от размера системы r .

4. Система из четырёх атомов в геометрии «ромб»: эффект сдвига энергетических уровней одной из противоположных атомных пар

Оказывается, что время жизни экстраординарных субизлучательных состояний весьма чувствительно к небольшим изменениям геометрии. Это обстоятельство иллюстрирует рис.3, где показана зависимость скорости распада нижнего состояния от угла, характеризующего

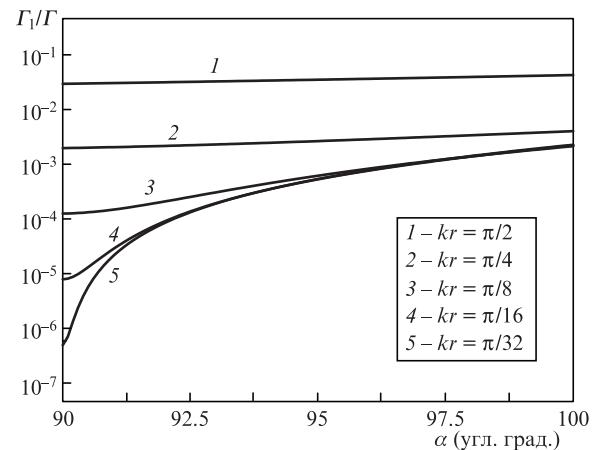


Рис.3. Зависимости скорости спонтанного распада нижнего состояния системы атомов в геометрии ромба от тупого угла в двух противоположных вершинах, представленные для различных расстояний kr между атомами, находящимися в вершинах при остром угле.

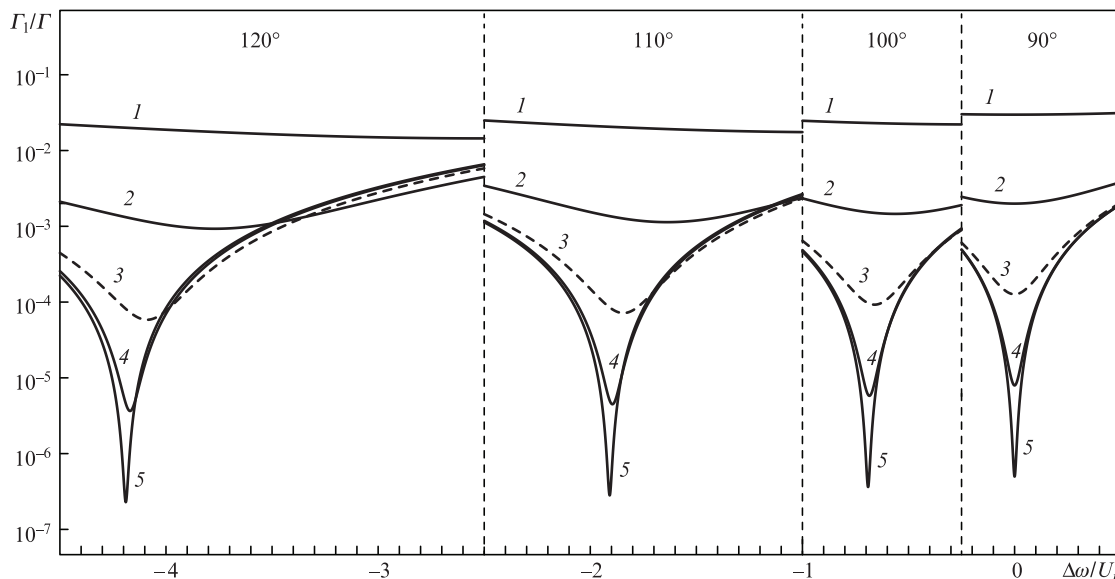


Рис.4. Зависимости скорости спонтанного распада нижнего состояния системы атомов в геометрии ромба от сдвига частоты перехода в паре атомов в тупоугольных вершинах при различных значениях расстояния в другой паре атомов при $kr = \pi/2$ (1), $\pi/4$ (2), $\pi/8$ (3), $\pi/16$ (4) и $\pi/32$ (5).

отклонение ромбической геометрии от квадратной. Видно, что при $kr \approx 1$ увеличение Γ составляет 2–3 раза при переходе от квадрата к ромбу (при увеличении тупого угла примерно на 10°). Однако при $kr \ll 1$ скорость роста распада Γ_1 увеличивается на порядки.

Итак, при относительно малом изменении структуры происходит кардинальное разрушение эффекта «экстраординарного субизлучения». Его восстановление (и даже некоторое усиление) возможно при осуществлении сдвига частоты перехода в паре атомов, находящихся в противоположных вершинах ромба, относительно частоты перехода в другой паре атомов. В частности для атомов, находящихся в вершинах тупого угла, сдвиг $\Delta\omega$ должен быть отрицательным. Зависимости Γ_1 от $\Delta\omega$, показанные на рис.4, демонстрируют резкие минимумы при оптимальных значениях сдвига частоты. Минимальные значения Γ_1 при соответствующих оптимальных $\Delta\omega$ даны в табл.1 для различных r . Аналитические выражения для собственных состояний и энергий ромбической конфигурации атомов приведены в Приложении 2.

5. Создание сдвига полем лазера в форме стоячей волны

Из имеющихся вариантов осуществления сдвига частот в двух парах атомов (в тупоугольных и остроугольных вершинах ромба) мы рассматриваем использование стоячей лазерной волны (рис.5). Возможно, например, как показано на рисунке, использование перехода из основного состояния $|g\rangle$ во вспомогательное состояние $|a\rangle$,

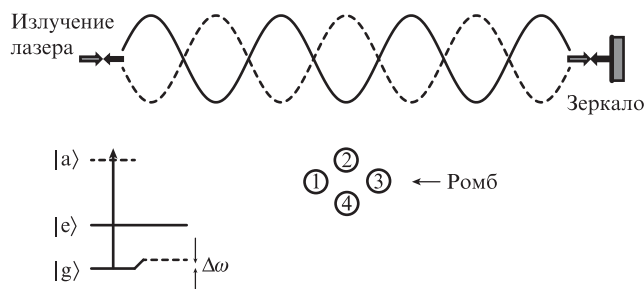


Рис.5. Схема создания энергетического сдвига основного состояния в паре атомов, находящихся в тупоугольных вершинах ромба. Частота лазерного излучения отстроена относительно частоты перехода из основного состояния в высоколежащее возбуждённое состояние атома в синюю область. Пучности стоячей волны приходятся на положение пары атомов 2–4, узлы – на положение пары атомов 1–3.

расположенное выше по энергии, чем состояние $|e\rangle$ Эта схема может иметь чисто практическое значение при условии, что длина волны лазера, близкая к длине волны перехода $|g\rangle \leftrightarrow |a\rangle$, при $kr \lesssim 1$ сможет обеспечить нужное превышение амплитуды поля, действующего на пару атомов 2–4, над амплитудой поля, действующего на пару атомов 1–3. Следует также отметить возможность варьирования разности полей за счёт наклона стоячей волны по отношению к плоскости, в которой расположены атомы. В любом случае различие частот перехода $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ в данном варианте выражается через разность энергетических сдвигов

Табл.1. Оптимальный сдвиг энергии двух атомов, расположенных в «тупоугольных» вершинах ромба, и соответствующие скорости распада экстраординарного субизлучательного состояния.

$(kr)^2$	$\alpha = 90^\circ$		$\alpha = 100^\circ$		$\alpha = 110^\circ$		$\alpha = 120^\circ$	
	$\Delta\omega/U_r$	Γ_1/Γ	$\Delta\omega/U_r$	Γ_1/Γ	$\Delta\omega/U_r$	Γ_1/Γ	$\Delta\omega/U_r$	Γ_1/Γ
0.01	0	5.4×10^{-7}	-0.69	3.9×10^{-7}	-1.91	3.0×10^{-7}	-4.19	2.5×10^{-7}
0.10	0	5.3×10^{-5}	-0.67	3.9×10^{-5}	-1.87	3.0×10^{-5}	-4.13	2.5×10^{-5}
1.00	0	5.2×10^{-3}	-0.48	3.8×10^{-3}	-1.47	3.0×10^{-3}	-3.51	2.4×10^{-3}

$$\Delta\omega \approx \frac{(d_{ga}\mathcal{E})^2}{4\hbar^2(\omega_{las} - \omega_{ag})} \quad (11)$$

основного состояния двух пар атомов за счёт разности квадратов амплитуд поля \mathcal{E} стоячей волны; здесь d_{ga} – матричный элемент оператора дипольного момента для перехода $|g\rangle \rightleftharpoons |a\rangle$.

6. Заключение

В настоящей работе для системы близкорасположенных ($r/\lambda \ll 1$) атомов в геометрии правильного многоугольника проанализированы свойства субизлучательных состояний, распадающихся медленнее, чем $(kr)^2\Gamma$ (см. рис.2). Показано, что при относительно малом нарушении геометрии скорость спонтанного распада этих состояний кардинально возрастает (см. рис.3). Однако (и это является основным результатом работы) ситуация исправляется благодаря сдвигу частоты перехода в определённых атомах по отношению к другим атомам. Расчёты выполнены только для ромбической геометрии (см. рис.4 и табл.1), но представляется, что для многоугольников более высокого порядка обнаруженные эффекты также должны иметь место. Особенно ярко они проявляются, когда расстояние между атомами значительно меньше длины волны используемого перехода. Можно отметить, что тема *субволновой локализации* разрабатывается в последнее время в ряде теоретических работ. Так, одно из последних оригинальных предложений основано на высокочастотной модуляции оптического поля [22]. В дополнение к лазерным пинцетам и ионным ловушкам, во введении к [22] дан обзор и других вариантов, рассматриваемых в литературе. Например, в качестве перспективного метода отмечено предложенное в работе [23] использование оптических решеток, основанных на многофотонных оптических переходах. Мы можем отметить также идею фемтосекундной ловушки (см., напр., [24]). Рассмотренное направление, как прелюдия к новой интересной физике, актуально и безусловно будет развиваться. Решение задачи субволновой локализации позволит использовать идеи настоящей работы для сверхточных измерений характеристик систем близкорасположенных атомов. Измеряемой величиной в эксперименте не обязательно должна быть скорость распада, – по-видимому, диагностировать субизлучательные состояния удобнее, измеряя радиационную ширину линии.

Отдельно следует отметить ситуацию, когда сдвиг частоты не нужно создавать – он имеет естественную природу, например, при использовании изотопов. Тогда контроль сводится к решению обратной задачи – манипулированию геометрией (с участием тонкой подстройки лазерным излучением) с целью минимизации скорости спонтанного излучения определённого суперпозиционного (запутанного) состояния.

Приложение 1

Получим формулу для скорости спонтанного распада произвольного однократно возбуждённого собственного состояния системы из N атомов, представленного в виде разложения по многочастичным базисным состояниям, аналогичным (1), не ограничиваясь при этом рассмотрением плоской геометрии и выборкой возбуждённых состояний только с нулевой проекцией углового момента M :

$$|\Psi\rangle = \sum_{M=-1}^1 (C_1^{(M)} |e_1^M g_2, \dots, g_N\rangle + C_2^{(M)} |g_1 e_2^{(M)}, \dots, g_N\rangle + \dots + C_N^{(M)} |g_1, \dots, g_{n-1}, \dots, e_n^{(M)}\rangle) \equiv \sum_{i=1}^N \sum_{m=-1}^1 C_i^{(M)} \psi_i^{(M)}, \quad (П1.1)$$

где для определённости рассматриваем тот же частный случай $J_g = 0$, $J_e = 1$, что и в основном тексте. Взаимодействие каждого атома с плоской волной описывается [25, 26] как

$$\hat{\mathcal{H}}' = \frac{\sqrt{3\Gamma}}{4\pi |\langle e^0 | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle|} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_{k\rho}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) \equiv \frac{\sqrt{3\Gamma}}{4\pi} (\hat{O}_1 + \hat{O}_2). \quad (П1.2)$$

Здесь $\mathbf{e}_{k\rho}$ – пара ортогональных единичных векторов ($\rho = 1, 2$), перпендикулярных волновому вектору \mathbf{k} ; \mathbf{R} – радиус-вектор положения атома; индексы при \hat{O} отвечают поляризации фотона ρ . Векторы $\mathbf{e}_{k\rho}$ удобно выбрать в следующем виде, отвечающем записи вектора \mathbf{k} в полярных координатах $\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$:

$$\mathbf{e}_{k1} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad (П1.3)$$

$$\mathbf{e}_{k2} = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta).$$

Отсюда находим входящие в формулу (П1.2) скалярные произведения $\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_{k\rho}$:

$$(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_{k1}) = -\frac{i}{2} \hat{d}_+ \exp(-i\varphi) + \frac{i}{2} \hat{d}_- \exp(i\varphi), \quad (П1.4)$$

$$(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_{k2}) = \frac{1}{2} \hat{d}_+ \cos\theta \exp(-i\varphi) + \frac{i}{2} \hat{d}_- \cos\theta \exp(i\varphi) - \hat{d}_z \sin\theta.$$

Далее выписываем матричные элементы переходов из однократно возбуждённых состояний i -го атома:

$$\langle \psi_i^{-1} | \hat{O}_1 | g_1, \dots, g_N \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \exp(i\varphi) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_i),$$

$$\langle \psi_i^0 | \hat{O}_1 | g_1, \dots, g_N \rangle = 0,$$

$$\langle \psi_i^{+1} | \hat{O}_1 | g_1, \dots, g_N \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \exp(-i\varphi) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_i), \quad (П1.5)$$

$$\langle \psi_i^{-1} | \hat{O}_2 | g_1, \dots, g_N \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \exp(i\varphi) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_i),$$

$$\langle \psi_i^0 | \hat{O}_2 | g_1, \dots, g_N \rangle = -\sin\theta \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_i),$$

$$\langle \psi_i^{+1} | \hat{O}_2 | g_1, \dots, g_N \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \exp(-i\varphi) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_i).$$

Наконец, выражаем через эти матричные элементы скорость спонтанного распада состояния (П1.1):

$$\tilde{\Gamma} = \frac{3\Gamma}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\left| \sum_{i=1}^N \sum_{m=-1}^1 C_i^m \langle \psi_i^m | \hat{O}_1 | g_1, \dots, g_N \rangle \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^N \sum_{m=-1}^1 C_i^m \langle \psi_i^m | \hat{O}_2 | g_1, \dots, g_N \rangle \right|^2 \right) \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (П1.6)$$

Здесь множитель перед интегралом получился из золотого правила в виде $2\pi(\sqrt{3\Gamma}/4\pi)^2$.

Далее можно делать численный расчёт для любой конфигурации атомов и любой ориентации осей. В случае плоской геометрии и учёта только компонент с $M = 0$ члены с матричными элементами оператора \hat{O}_1 исчезают и формула (П1.6) сводится к формуле (6) в разд.2.

Приложение 2

Нумеруем вершины ромба последовательно цифрами от 1 до 4, предполагая, что внутренний угол α при вершинах 2 и 4 является тупым. Пусть расстояние между вершинами 1 и 3 равно r . Обозначим матричный элемент взаимодействия между этими вершинами $U_{13} = U$ (в тексте по определению $U_{13} = U_r$; далее индекс r опускаем). Тогда остальные элементы матрицы взаимодействия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{12} = U_{23} = U_{34} = U_{14} &= 8U \sin^3(\alpha/2), \\ U_{24} &= U \tan^3(\alpha/2). \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

Частоты противоположащих атомов 2 и 4 предполагаем смещёнными на величину $\Delta\omega$ по отношению к частотам атомов 1 и 3. Система уравнений для амплитуд C_j собственного вектора $|\psi\rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned} EC_1 &= U_{12}(C_2 + C_4) + UC_3, \\ EC_2 &= \Delta\omega C_2 + U_{12}(C_1 + C_3) + U_{24}C_4, \\ EC_3 &= U_{12}(C_2 + C_4) + UC_1, \\ EC_4 &= \Delta\omega C_4 + U_{12}(C_1 + C_3) + U_{24}C_2. \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Удобно ввести новые переменные:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2), \quad a = \frac{1}{2}(C_1 - C_2), \\ B &= \frac{1}{2}(C_2 + C_4), \quad b = \frac{1}{2}(C_2 - C_4). \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

Тогда система уравнений (П2.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (E + U)a &= 0, \\ (E - \Delta\omega + U_{24})b &= 0, \\ (E - U)A - 2U_{12}B &= 0, \\ -2U_{12}A + (E - \Delta\omega - U_{24})B &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

Четыре собственные энергии даются выражениями*

$$E_a = -U,$$

$$E_b = \Delta\omega - U_{24} = \Delta\omega - U \tan^3(\alpha/2),$$

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= \frac{1}{2}(U + U_{24} + \Delta\omega) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(U - U_{24} + \Delta\omega)^2 + 4U_{12}^2} \\ &= U \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \tan^3(\alpha/2) + \frac{\Delta\omega}{U} \right] \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[1 - \tan^3(\alpha/2) + \frac{\Delta\omega}{U} \right]^2 + 256 \sin^6(\alpha/2)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П2.5})$$

В случае общего положения, когда все собственные энергии различны, собственные векторы определяются системой (П2.4). К примеру, пусть $E = E_a$ отличается от остальных собственных энергий. Тогда A , B и b обращаются в нуль. Для амплитуд C_j находим: $C_1 = -C_3 = 1/\sqrt{2}$, $C_2 = C_4 = 0$. Подстройка величины $\Delta\omega$ позволяет манипулировать собственными энергиями и собственными состояниями так, чтобы обеспечить минимум скорости распада (см. рис.4 и табл.1).

1. Dicke R.H. *Phys. Rev.*, **93**, 99 (1954).
2. Багратин И.В., Гришанин Б.А., Задков В.Н. *УФН*, **171**, 625 (2001) [*Phys. Usp.*, **44**, 597 (2001)].
3. Ficek Z., Tanaš R. *Phys. Rep.*, **372**, 369 (2002).
4. Lehmburg R.H. *Phys. Rev. A*, **2**, 889 (1970).
5. Milloni P.W., Knight W.L. *Phys. Rev. A*, **10**, 1096 (1974).
6. Wang D.-W., Li Z.-H., Zheng H., Zhu S.-Y. *Phys. Rev. A*, **81**, 043819 (2010).
7. Das S., Agarwal G.S., Scully M.O. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 153601 (2008).
8. Макаров А.А., Летохов В.С. *ЖЭТФ*, **124**, 766 (2003) [*JETP*, **97**, 688 (2003)].
9. Makarov A.A., Letokhov V.S. *Proc. SPIE*, **5402**, 54 (2004).
10. Макаров А.А., Летохов В.С. *Изв. РАН. Сер. физич.*, **68**, 1230 (2004).
11. Redchenko E.S., Yudson V.I. *Phys. Rev. A*, **90**, 063829 (2014).
12. Fang Y.-L.L., Baranger H.U. *Phys. Rev. A*, **96**, 013842 (2017).
13. Bagratin I.V., Grishanin B.A., Zadkov V.N. *Fortschr. Phys.*, **48**, 637 (2000).
14. Макаров А.А., Юдсон В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **105**, 193 (2017) [*JETP Lett.*, **105**, 205 (2017)].
15. Scully M.O. *Phys. Rev. Lett.*, **115**, 243602 (2015).
16. Cai H., Wang D.-W., Svidzinsky A.A., Zhu S.-Y., Scully M.O. *Phys. Rev. A*, **93**, 053804 (2016).
17. Pavolini D., Crubellier A., Pillet P., Cabaret L., Liberman S. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1917 (1985).
18. DeVoe R.G., Brewer R.G. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 2049 (1996).
19. Guerin W., Araújo M.O., Kaiser R. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 083601 (2016).
20. Moreno-Cardoner M., Plankensteiner D., Ostermann L., Chang D.E., Ritsch H. ArXiv:1901.10598 [quant-ph] 29 Jan 2019.
21. Moreno-Cardoner M., Plankensteiner D., Ostermann L., Chang D.E., Ritsch H. *Phys. Rev. A*, **100**, 023806 (2019).
22. Nascimbene S., Goldman N., Cooper N.R., Dalibard J. *Phys. Rev. Lett.*, **115**, 140401 (2015).
23. Dubetsky B., Berman P.R. *Phys. Rev. A*, **66**, 045402 (2002).
24. Yanyshev D.N., Balykin V.I., Vladimirova Y.V., Zadkov V.N., *Phys. Rev. A*, **87**, 033411 (2013).
25. Собельман И.И. *Введение в теорию атомных спектров* (М.: Физматлит, 1963, гл. 9); Sobel'man I.I. *Introduction to the Theory of Atomic Spectra* (Oxford: Pergamon, 1972, Ch. 9).
26. Louisell W.H. *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: John Wiley Sons, 1973, Ch. 5).

* Для квадрата ($\alpha = 90^\circ$ и $\Delta\omega = 0$) имеет место соответствие $E_{(a,b)} \Leftrightarrow E_{(2,3)}$, $E_+ \Leftrightarrow E_4$, $E_- \Leftrightarrow E_1$, если нумеровать энергии в порядке возрастания. Однако в общем случае такое соответствие может быть нарушено.