

О самокомпрессии лазерных импульсов в дискретной среде

А.О.Софонов, В.А.Миронов

С использованием дискретного нелинейного уравнения Шрёдингера исследованы особенности динамики самовоздействия лазерного излучения в наноструктурированной волноведущей системе. Показано, что при энергии лазерного импульса, превышающей критическое значение, нелинейная эволюция волнового поля существенным образом отличается от соответствующего процесса в сплошной среде. По мере распространения импульса в дискретной среде длина его уменьшается до значений, сравнимых с масштабом структуры, а скорость снижается до нуля. Определены параметры системы, при которых волновое поле после остановки лазерного импульса начинает распространяться в обратном направлении в скомпрессированном виде. Процесс замедления и остановки импульса сопровождается сильными радиационными потерями, так что в конечном скомпрессированном состоянии остается примерно треть энергии начального распределения поля.

Ключевые слова: самокомпрессия, наноструктурированная волноведущая среда, лазерные импульсы.

1. Введение

Одна из основных задач лазерной физики – развитие методов повышения интенсивности электромагнитного излучения. Сначала успехи в этом направлении во многом определялись разработкой активных элементов лазеров, затем, вследствие технологического прогресса, более перспективными оказались подходы, связанные с укорочением импульса [1, 2]. Широко используются подходы, основанные на спектрально-временном преобразовании импульсов при распространении их через нелинейные среды. Этому способствовало, особенно в последнее время, развитие волоконной техники и нанооптики. В качестве нелинейных сред большое применение находят световоды. Они позволяют обеспечить высокую нелинейность и дают возможность управлять дисперсией за счет волноводного вклада (пространственной ограниченности системы). С развитием нанотехнологий прогресс в этом направлении продолжился. Разрабатывается техника создания волноведущих систем из набора микрорезонаторов [3, 4]. Обзор современных методов синтеза плазменных наночастиц представлен в книге [4]. Особенности оптических микрорезонаторов рассмотрены в работе [3]. Различные искусственные наноструктуры создаются с целью использования их уникальных оптических свойств.

Периодические системы связанных нанофотонных структур представляют собой особый класс систем, в которых распространяются волновые возбуждения новых типов. Особенности их теоретического описания на основе модели дискретных систем рассмотрены, например, в [5]. В частности, в рамках этой модели исследовалась воз-

можность использования волноведущей системы из микрорезонаторов для замедления света и управления скоростью его распространения [6, 7]. В настоящей работе мы продолжаем изучение процессов в подобных системах в нелинейном режиме на основе нелинейного уравнения Шрёдингера. В разд.2 представлена постановка задачи исследования особенностей самовоздействия лазерного импульса в сильно неоднородных в направлении его распространения системах. Они связаны с тем, что в дискретной системе скорость распространения импульса не является постоянной величиной, а меняется в процессе эволюции волнового пакета в самосогласованном режиме. В последующих разделах аналитически и численно показано, что в результате нелинейного управления скоростью импульса можно не только остановить его, но и заставить двигаться в обратном направлении. При этом естественно ожидать и самокомпрессии лазерного импульса при его распространении в среде.

2. Постановка задачи

Рассмотрим структурные изменения лазерного импульса в процессе самовоздействия его в наноструктурированных средах. Одной из наиболее простых наноструктур является линейный кластер из одинаковых (например, сферических) наночастиц [4, 8, 9], геометрия которого показана на рис 1.

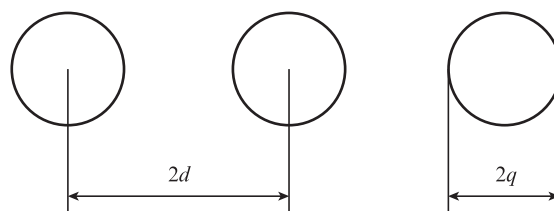


Рис.1. Геометрия линейного кластера, состоящего из одинаковых наносфер.

А.О.Софонов, В.А.Миронов. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: sofonov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 17 февраля 2020 г.

Благодаря взаимодействию наночастиц в линейном металлическом кластере существуют одна мода с продольной ориентацией дипольных моментов и две – с поперечной. Распространение линейных возбуждений в таких системах в самых различных приближениях исследовалось в работах [4, 8]. Было показано, что происходящие в системе процессы с довольно хорошей точностью можно описать с помощью модели, в которой каждой частице сопоставляется только дипольный момент, а более высокие моменты не учитываются. Таким образом, в условиях доминирования взаимодействия лишь соседних диполей для рассмотрения интересующей нас динамики самовоздействия поперечной моды воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial t^2} = -w_1^2(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) - w_0^2 \phi_n + \alpha |\phi_n|^2 \phi_n. \quad (1)$$

Здесь второй член в правой части описывает колебания поля ϕ_n n -го диполя отдельной наночастицы сферической формы с частотой w_0 , а первый член отвечает за распространение возбуждения в системе. Интенсивность взаимодействия определяется величиной

$$w_1^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{q}{d} \right)^3 w_0^2. \quad (2)$$

Условия применимости линейной модели обсуждались в [4]. В рассматриваемом квазистатическом приближении мы не учитываем радиационные потери, связанные с возбуждением синхронной электромагнитной волны в вакууме. Анализ дисперсионного соотношения, полученного в [8] при учете конечной скорости распространения света, показывает, что потери малы при $w_0 d/c \ll 1$ на рассматриваемых трассах.

Для исследования нелинейной динамики системы в уравнение (1) дополнительно введено последнее слагаемое. Механизмы кубической нелинейности плазменного кластера обсуждались в работе [10]. В рассматриваемом случае можно ориентироваться на значение характерного нелинейного поля $E_{nl} = m w_0^2 q l e$, где m – масса электрона, а e – его заряд. В результате для параметра α в уравнении (1) можно дать следующую оценку: $\alpha = -w_0^2 e^2 / (m^2 w_1^4 q^2)$.

При $w_0 \gg w_1$, что легко выполняется при $q < d$, в результате укорочения уравнения (1) приходим к хорошо известному в теории нелинейных волн дискретному уравнению Шрёдингера (ДНУШ) [5] в безразмерных переменных для огибающей волнового поля ψ_n ($\phi_n \propto \psi_n \exp(iw_0 t)$):

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + |\psi_n|^2 \psi_n = 0. \quad (3)$$

Здесь эволюционная переменная нормирована на $w_1^2 / (2w_0)$.

Несколько более сложная система уравнений использовалась при обсуждении проблемы максимально возможного замедления света в цепочке связанных оптических микрорезонаторов (рис.2) [6, 7]:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = -(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) - \delta b_n - |\psi_n|^2 \psi_n, \quad (4)$$

$$i \frac{\partial b_n}{\partial t} = -\Delta b_n - \delta \psi_n. \quad (5)$$

В этом случае огибающая поля ψ_n центральной цепочки осцилляторов (микрорезонаторов) связана с огибающей

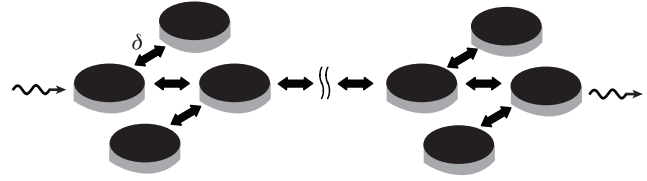


Рис.2. Геометрия связанных оптических микрорезонаторов.

поля b_n боковых осцилляторов, отстроенных по частоте на Δ . В отсутствие связи ($\delta = 0$) нелинейная эволюция лазерного импульса в цепочке описывается ДНУШ (3). При $t = 0$ задается волновой импульс, описываемый комплексной функцией $\psi_n(n, t = 0) \exp(i\gamma n)$, который затем распространяется по цепочке в одну сторону с групповой скоростью, определяемой в линейном случае дисперсионным соотношением. В отличие от [6, 7] в рассматриваемом нами нелинейном режиме самовоздействия возникает дополнительная возможность управления скоростью светового импульса посредством нелинейного сдвига частоты поля ϕ_n в центральной волноведущей системе.

Проще всего такую возможность можно пояснить, исходя из уравнения (3). Оно имеет интеграл

$$W = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2, \quad (6)$$

который описывает сохранение энергии локализованного волнового пакета. В дальнейшем будем рассматривать его как управляющий параметр. Скорость движения энергетического центра волнового пакета в дискретном случае

$$v = \frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2. \quad (7)$$

Используя уравнение непрерывности, выражение (7) можно представить в виде

$$v = -\frac{i}{W} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\psi_{n+1} \psi_n^* - \psi_n \psi_{n+1}^*). \quad (8)$$

С помощью формулы суммирования Пуассона выражение (8) удобно записать следующим образом:

$$v = -\frac{i}{W} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(x+1) \psi^*(x) - \psi^*(x+1) \psi(x)] \times \exp(2\pi i n x) dx. \quad (9)$$

Рассмотрим волновой пакет гауссовой формы:

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{W}{a\sqrt{\pi}}} \times \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + i\beta(x-x_0)^2 + i\gamma(x-x_0)\right], \quad (10)$$

где a – эффективная ширина волнового пакета; x_0 – положение энергетического центра; γ и β описывают линейные и квадратичные коррекции фазового фронта соответственно. Тогда для групповой скорости находим выражение

$$v_g = 2 \sin \gamma \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - a^2 \beta^2\right). \quad (11)$$

При получении его мы фактически воспользовались соотношением (9) при $n = 0$. Оценки показывают, что это оправданно для импульсов с длиной $a \gg \sqrt{2/\pi}$, т. е. даже для волновых пакетов с шириной, сравнимой с размером ячейки.

Из выражения (11) следует, что в нелинейном режиме скорость импульса в дискретной среде не является постоянной величиной. Ее изменение определяется поведением параметров волнового пучка (a, β, γ) в процессе эволюции системы. Соответствующие уравнения получим в следующем разделе. На их основе проведем качественное исследование особенностей самовоздействия лазерного импульса в дискретном случае. Результаты численного исследования процессов с использованием исходного уравнения (3) представим в разд.4.

3. Качественное исследование динамики самовоздействия

Для описания динамики системы в самосогласованном режиме воспользуемся безабберационным приближением. Исходное уравнение (3) исследовалось применительно к рассмотрению пространственной эволюции волновых пучков в связанной системе нелинейных световодов [11]. Основываясь на пространственно-временной аналогии, т. е. заменяя эволюционную переменную z временной переменной ($z \rightarrow t$), систему уравнений, описывающую динамическое самовоздействие лазерных импульсов гауссовой формы (10) в дискретной среде, можно представить в виде

$$\frac{da}{dt} = 4\beta a \cos \gamma \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - a^2 \beta^2\right), \quad (12a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\cos \gamma}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} - 4a^2 \beta^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - a^2 \beta^2\right) - \frac{W}{\sqrt{2\pi} a^3}, \quad (12b)$$

$$\frac{dx_0}{dt} = 2 \sin \gamma \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - a^2 \beta^2\right), \quad (12в)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0. \quad (12г)$$

Следует отметить, что система уравнений (12a)–(12г) получена в рамках приближенного вариационного подхода, когда в лагранжиане исходного уравнения (1), записанного с использованием формулы суммирования Пуассона, учитываются лишь слагаемые с $n = 0$. Это существенно упрощает ситуацию, поскольку коэффициент γ , ответственный за линейную коррекцию фазы, становится интегралом задачи ($\gamma = \gamma_0$). В результате смещение положения энергетического центра x_0 не оказывает влияния на временную эволюцию внутренней структуры импульса гауссовой формы, определяемую уравнениями (12a) и (12б) при начальном значении γ , равном γ_0 :

$$\frac{da}{dt} = 4\beta a \cos \gamma_0 \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - a^2 \beta^2\right), \quad (13a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\cos \gamma_0}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} - 4a^2 \beta^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4a^2} - a^2 \beta^2\right) - \frac{W}{\sqrt{2\pi} a^3}. \quad (13б)$$

Не менее важно и другое. Групповая скорость лазерного импульса, которая описывается выражением (12в), совпадающим с (11) при $\gamma = \gamma_0$, существенно зависит от поведения $a(t)$ и $\beta(t)$. Здесь мы встречаемся с необычной ситуацией, когда эволюция внутренней структуры волнового пакета управляет скоростью его распространения. В конечном счете это сказывается и на трассе распространения лазерного импульса в дискретной среде. В дальнейшем мы покажем, что длина трассы может быть конечной.

Детальное аналитическое исследование системы уравнений (13a), (13б) проведено в [11, 12]. Следует отметить, что в рассматриваемом случае самовоздействия лазерных импульсов система уравнений (12) имеет существенно более широкую область применимости. Описание эволюции волновых пучков ограничено приближением параксиальной оптики ($\gamma \ll 1$). Интервал изменения γ в данной задаче определяется зоной Бриллюэна ($0 \leq \gamma \leq \pi$).

Основываясь на полученных в [11, 12] результатах и пространственно-временной аналогии, можно утверждать, что характерные для сплошной среды эволюция поля и распространение импульса с постоянной скоростью реализуются лишь при энергии волнового пакета W , меньшей критического значения W_c . При энергии лазерного импульса, превышающей критическое значение ($W > W_c$), пространственная длина волнового пакета уменьшается по мере его распространения в цепочке вплоть до значений порядка характерного масштаба дискретной среды. В этом случае динамика самовоздействия приводит к сильной пространственной локализации лазерного импульса.

Для оценки критической энергии первоначально плавного на масштабе структурного элемента среды волнового пакета поступим следующим образом. Заметим, что предельный переход от уравнений (13a) и (13б) к их аналогам для сплошной среды осуществляется при одновременном выполнении двух условий: $a \rightarrow \infty$ и $a\beta \rightarrow 0$. В результате для описания поведения длины импульса приходим к уравнению

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{4 \cos^2 \gamma_0}{a^3} - \frac{4W \cos \gamma_0}{\sqrt{8\pi} a^2}. \quad (14)$$

Это уравнение, а тем более уравнения (12) показывают, что динамика самовоздействия в дискретной системе существенно отличается от ситуации, описываемой континуальным нелинейным уравнением Шрёдингера. Даже в случае широких волновых пакетов ($a \rightarrow \infty$) уравнение (14) «помнит» ($\gamma_0 \neq 0$) о дисперсионном соотношении волн в дискретной среде.

Уравнение (14) хорошо известно и используется при описании самофокусировки в безабберационном приближении. Решение его проанализировано во многих книгах по теории нелинейных волн. Фазовый портрет системы приведен, например, в [13]. Состояние равновесия системы имеет на фазовой плоскости координаты $a' = \sqrt{8\pi} \cos \gamma_0 / W$ и $da/dt = 0$. Интеграл уравнения (14) для полей с начальным плоским фазовым фронтом ($da/dt = 0$ при $t = 0$),

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -\frac{8 \cos^2 \gamma_0}{a^2} + \frac{8W \cos \gamma_0}{\sqrt{8\pi} a} + \frac{8 \cos^2 \gamma_0}{a_0^2} - \frac{8W \cos \gamma_0}{\sqrt{8\pi} a_0}, \quad (15)$$

описывает периодическое изменение пространственной длины импульса от начального значения $a(t = 0) = a_0 \ll a'$ до $a_{\min} < a'$. Исходя из того, что a_{\min} становится равным размеру структурного элемента среды ($a_{\min} = 1$), находим

$$W_c = \sqrt{8\pi} \cos \gamma_0 \approx 5 \cos \gamma_0. \tag{16}$$

При этом значении критической энергии импульса W_c координата, соответствующая состоянию равновесия, становится равной размеру структурного элемента среды ($a' = 1$). По этой причине выражение (16) дает несколько завышенную оценку для W_c по сравнению со значением, полученным в результате довольно сложного анализа динамики системы на основе уравнений (13) [11, 12]. Анализ показывает, что при энергии импульса $W > W_c$ периодическое изменение ширины волнового пакета a сменяется локализацией волнового поля в структурном элементе среды ($a \approx 1$).

Из выражения (15) можно оценить время самокомпрессии. В надкритическом режиме для изменения пространственной длины импульса имеем соотношение

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \approx \frac{8W \cos \gamma_0}{\sqrt{8\pi} a}. \tag{17}$$

Отсюда для времени схлопывания импульса можно получить выражение

$$t_s = \frac{2}{3} \frac{a_0^{3/2} \sqrt{8\pi}}{\sqrt{8W \cos \gamma_0}}. \tag{18}$$

Другую важную оценку можно найти из (12в). Проходящее импульсом в процессе самолокализации до его остановки расстояние

$$x_s = 2t_0 \sin \gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{a_0^{3/2} \sqrt{8\pi} \sin \gamma_0}{\sqrt{2W \cos \gamma_0}}. \tag{19}$$

Таким образом, лазерный импульс с энергией, превышающей критическое значение (16), распространяется в дискретной среде на конечное расстояние (19). Оно максимально при $W \approx W_c$ и возрастает пропорционально начальной длине импульса в степени три вторых. В области нулевой дискретной дисперсии ($\gamma_0 \rightarrow \pi/2$) критическое значение энергии (16) уменьшается ($W_c \rightarrow 0$), а проходящее импульсом расстояние x_s неограниченно возрастает ($x_s \rightarrow \infty$).

Любопытно отметить также, что длина трассы распространения импульса при $W > W_c$ уменьшается с ростом энергии. Это означает, что есть еще одно значение критической энергии:

$$W_c = \frac{2}{9} \frac{a_0^{4/3} \sqrt{8\pi} \sin^2 \gamma_0}{\cos \gamma_0}, \tag{20}$$

при превышении которого происходит локализация поля вблизи границы дискретной среды.

4. Численное моделирование

Рассмотренная выше картина динамического самовоздействия в дискретных системах в целом подтверждается результатами численного решения исходного уравнения (3). Далее мы графически проиллюстрируем те

новые процессы, которые сопровождают пространственную самокомпрессию лазерных импульсов, с использованием ДНУШ. В обсуждаемых нами условиях удобно использовать начальные распределения поля вида

$$\psi_n = \frac{\sqrt{2} N \sigma}{\cosh \sigma(n - n_0)} \exp[i\gamma_0(n - n_0)], \tag{21}$$

где $1/\sigma$ определяет характерный размер области локализации поля; n_0 – номер центральной ячейки; N – оценка числа солитонов, которые содержатся в исходном распределении поля. Величина γ_0 характеризует начальную скорость распространения импульса. В этих обозначениях энергия волнового пакета

$$W = 4\sigma N^2. \tag{22}$$

Сравнивая (22) и (16), можно оценить критическое значение числа солитонов:

$$N_c = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \gamma_0}{\sigma}\right)^{1/2}, \tag{23}$$

при превышении которого дискретность среды существенным образом сказывается на динамике самовоздействия импульсов.

В отличие от работы [11], мы более детально исследуем особенности динамики самовоздействия в случае конечных γ . На рис.3 представлен один из вариантов численного расчета (при $\gamma < \pi/2$) динамики самовоздействия излучения в надкритическом режиме. Видно, что процесс довольно сильной пространственной самокомпрессии (длина импульса уменьшилась на порядок) сопровождается радиационными потерями. В результате в области локализации поля остается более трети энергии исходного импульса. Здесь важно отметить следующее. В сплошной среде возможность самолокализации ограничена развитием модуляционной неустойчивости, которая приводит к разбиению распределения поля на солитоны. В дискретной среде, несмотря на существование подобной неустойчивости [8, 14], мы не заметили ее проявления. Процесс про-

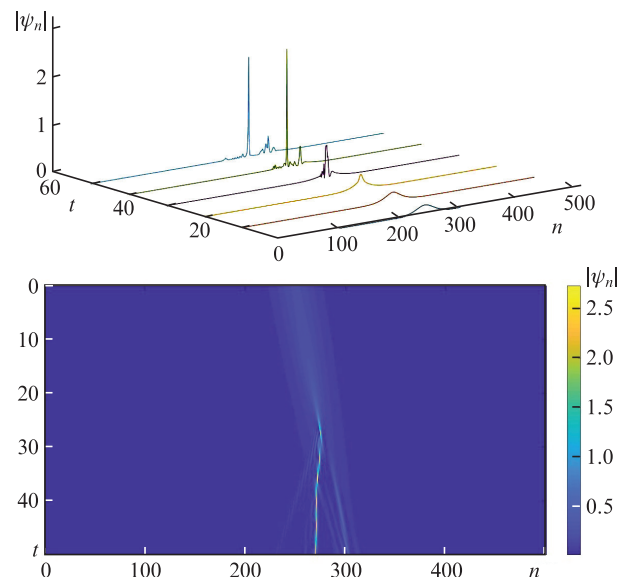


Рис.3. Эволюция волнового пакета (21) ($\sigma = 0.05$, $\gamma_0 = 0.5$, $N = 6$), рассчитанная с использованием уравнения (3).

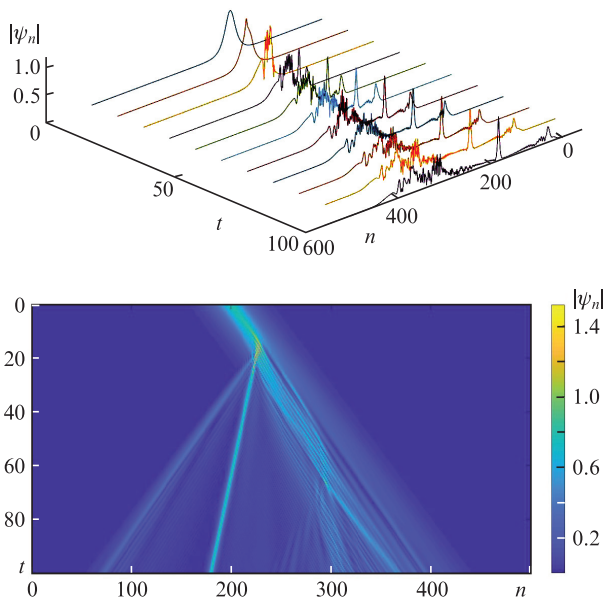


Рис.4. Эволюция волнового пакета (21) ($\sigma = 0.1$, $\gamma_0 = 1.5$, $N = 5.5$), рассчитанная с использованием уравнения (3).

странственной локализации поля при девяти солитонах в его начальном распределении протекает так же, как и при меньшем их числе (поле локализуется на одной ячейке и теряет две трети энергии).

Другая важная особенность динамики самовоздействия в дискретной среде связана с тем, что вследствие асимметрии радиационных потерь (по ходу распространения импульса и в противоположную сторону) скомпрессированный импульс (как правило) начинает двигаться в обратном направлении. Более сильно этот эффект проявляется при параметре γ , относящемся к области нулевой дискретной дисперсии ($\gamma \approx \pi/2$). Из рис.4 ($\gamma = 1.5$) видно, что скомпрессированный импульс возвращается на вход волноведущей системы. Временная длительность его при этом уменьшается в три раза. Радиационные потери волнового поля в области отражения лазерного импульса происходят в основном в направлении его первоначального распространения.

В более сложной системе связанных оптических микрорезонаторов столь простого аналитического исследования процессов, за исключением случая $\delta = 0$, провести не удастся. Однако в условиях, когда центральная волноводно-резонаторная структура является доминирующей, а боковая структура при $\delta \neq 0$ определяет лишь дополнительный запаздывающий отклик, численное исследование показывает, что динамика самовоздействия протекает сходным образом. При тех же параметрах волнового пакета, что и для рис.4, и коэффициентах $\delta = 0.03$, $\Delta = -1$ в уравнениях (4), (5) картина практически такая же. Основным отличием от результатов, полученных выше, является несколько более высокий уровень радиационных потерь. Это снижает эффективность самокомпрессии лазерных импульсов в данной системе.

5. Заключение

В настоящей работе исследована динамика самовоздействия лазерных импульсов в двух системах, относящихся к разным частотным диапазонам. Предполагается, что схема на рис.2 состоит из нелинейных оптических микрорезонаторов [6, 7], а система связанных металлических кластеров (рис.1) является волноведущей для излучения с частотой, близкой к частоте колебаний поля в металлическом кластере $5 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$ [4, 8, 9]. Показано, что лазерный импульс с энергией, превышающей критическое значение (16), распространяется в системе со скоростью, уменьшающейся до нуля. В процессе остановки импульса происходит локализация его в структурном элементе среды с энергетической эффективностью около 30%. Более того, при задании начальных параметров системы вблизи точки нулевой дисперсии групповой скорости лазерный импульс не только останавливается, но и возвращается назад в скомпрессированном виде. Здесь мы имеем дело с довольно специфической динамикой самовоздействия излучения. Первоначально плавный (на характерном масштабе среды) лазерный импульс отражается в конечном счете от дискретной среды. Управление нелинейным процессом осуществляется посредством самосогласованного сильного изменения групповой скорости волнового пакета. В результате динамика самовоздействия лазерного импульса при энергии, превышающей критическое значение, становится пространственно-временной. Более определенные выводы делать преждевременно из-за недостаточности данных о параметрах системы (особенно нелинейных).

Авторы признательны А.В.Андрианову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Экстремальные световые поля и их взаимодействие с веществом» (раздел 2) и мегагранта (договор № 14.W03.31.0032) (раздел 3).

1. Хазанов Е.А., Миронов С.Ю., Муру Ж. *УФН*, **189**, 1173 (2019) [*Phys. Usp.*, **62**, 1096 (2019)].
2. Mourou G. *Rev. Mod. Phys.*, **91** (3), 03051 (2019).
3. Новотный Л., Хехт Б. *Основы нанооптики* (М.: Физматлит, 2011).
4. Климов В.В. *Наноплазмоника* (М.: Физматлит, 2009).
5. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005).
6. Mehmet Fatih Yanik, Shanhui Fan. *Phys. Rev. Lett.*, **92** (8), 083901 (2004).
7. Mehmet Fatih Yanik, Shanhui Fan. *Phys. Rev. A*, **71**, 013803 (2005).
8. Weber W.H., Ford G.M. *Phys. Rev. B*, **70**, 125420 (2004).
9. Quinten M., Laitner A., Krenn J.B., Aussenegg F.R. *Opt. Lett.*, **23**, 1331 (1998).
10. Жарова Н.А., Литвак А.Г., Миронов В.А. *ЖЭТФ*, **128**, 844 (2005) [*JETP*, **101**, 728 (2005)].
11. Литвак А.Г., Миронов В.А., Скобелев С.А., Смирнов Л.А. *ЖЭТФ*, **153**, 28 (2018) [*JETP*, **126**, 21 (2018)].
12. Balakin A.A., Litvak A.G., Mironov V.A., Skobelev S.A. *Phys. Rev. A*, **94**, 063806 (2016).
13. Власов С.Н., Таланов В.И. *Самофокусировка волн* (Н.Новгород, ИПФРАН, 1997).
14. Браун О.М., Кившарь Ю.С. *Модель Френкеля-Конторовой* (М.: Физматлит, 2008).