

О зависимости эмиттанса от длины сгустка электронов при лазерно-плазменном ускорении в направляющих структурах

М.Е.Вейсман, Н.Е.Андреев

Проведены теоретический анализ и численное моделирование динамики поперечного эмиттанса сгустка электронов при его ускорении в кильватерных полях, генерируемых лазерным импульсом в слабонелинейном режиме. Получены аналитические выражения для основных факторов, влияющих на рост эмиттанса в процессе ускорения и рассмотрен случай, когда характерный поперечный размер инжектированного сгустка превышает согласованный радиус, определяемый величиной фокусирующей силы в точке инжекции, исходным эмиттансом и энергией электронного сгустка, а конечное значение эмиттанса много больше начального. Описана динамика роста эмиттанса в процессе ускорения в зависимости от длины сгустка электронов и найдена длина сгустка, при которой происходит полное фазовое перемешивание бетатронных колебаний электронов и увеличение эмиттанса до его максимального значения, определяемого параметрами сгустка и фокусирующей силой в точке инжекции. Аналитические выражения находятся в хорошем согласии с результатами численного моделирования.

Ключевые слова: лазерно-плазменное ускорение электронов, кильватерные поля, эмиттанс пучка электронов, бетатронные колебания.

1. Введение

Лазерно-плазменный метод ускорения электронов в волноводных структурах (в плазменном канале или в капилляре), основанный на взаимодействии электронов с быстрыми электромагнитными волнами, возбуждаемыми в плазме коротким интенсивным лазерным импульсом, привлекает в последние десятилетия внимание многих исследователей как перспективное направление для создания компактных источников сгустков ускоренных электронов. Как теоретически [1, 2], так и экспериментально [3] было показано, что при относительно небольшой (~ 10 см) длине капилляра распространяющийся в нем лазерный импульс достаточной мощности способен захватить и сформировать из фоновых электронов сгусток, который затем в кильватерном поле лазерного импульса может быть ускорен до энергии ~ 8 ГэВ.

Однако даже такой впечатляющий на сегодняшний день результат является все же недостаточным для удовлетворения потребностей физики высоких энергий, которая для исследования фундаментальных свойств материи нуждается в источниках качественных (компактных, моноэнергетических, с достаточно большим зарядом) сгустков электронов с энергией 1 ТэВ, т. е. на два порядка превышающей достигнутые в эксперименте значения. Одним из способов решения этой проблемы является применение в

ускорителях, ускоряющих электроны до столь высоких энергий, схемы многокаскадного ускорения, когда сгусток электронов многократно ускоряется, проходя один каскад ускорения за другим, при этом каждый каскад дает приращение энергии электронов на ~ 10 ГэВ. Возможность многокаскадного ускорения к настоящему времени уже подтверждена экспериментально [4].

При использовании многокаскадной схемы ускорителя возникает ряд новых проблем, например необходимость обеспечения достаточно точного согласования каскадов между собой во времени, эффективность передачи электронного сгустка с каскада на каскад без потери качества сгустка [5, 6], которые должны быть решены в будущем для претворения такой схемы ускорения в жизнь. Одна из важнейших задач, которые необходимо решить при создании ускорителя с большим числом (до ста) ускорительных каскадов, – это задача сохранения минимального эмиттанса электронного сгустка при его ускорении в каждом каскаде. Действительно, эмиттанс электронного сгустка определяет угловой и пространственный разброс его частиц, и большой эмиттанс электронного сгустка в пространстве между каскадами означает большой разброс по углу разлета электронов, так что даже при использовании дополнительной фокусировки с помощью активных плазменных линз [4, 7] не удастся довести весь сгусток до входа в следующий каскад ускорения [8].

Для решения этой задачи необходимо определить основные факторы, влияющие на эмиттанс ускоряемых электронных сгустков, и проанализировать динамику эмиттанса в каскаде ускорителя. Эмиттанс сгустка электронов в конце стадии ускорения задается как начальным его значением, так и фазовым перемешиванием электронов в различных сечениях сгустка при неоднородности фокусирующей силы кильватерных полей, генерируемых лазерным импульсом в слабонелинейном режиме [9]. В предположении полного фазового перемешивания электронов сгустка путем вычисления огибающей для различных фа-

М.Е.Вейсман. Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2; e-mail: bme@ihed.ras.ru

Н.Е.Андреев. Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Россия, Московская обл., 141701 Долгопрудный, Институтский переулок, 9; e-mail: andreev@ras.ru

Поступила в редакцию 26 февраля 2020 г.

зовых эллипсов [10] в различных поперечных сечениях (слайсах) электронного сгустка в работе [11] определен нормализованный эмиттанс всего сгустка в конце стадии ускорения.

Помимо роста нормализованного эмиттанса электронного сгустка вследствие фазового перемешивания частиц, рост эмиттанса может быть вызван также нелинейностью поперечных фокусирующих сил, развитием различных неустойчивостей, а также диссипативными процессами, связанными с ускорением электронов [10]. Кроме того, возможен рост эмиттанса, определяемый запаздыванием группы частиц с большими поперечными скоростями (например, инжектированных дальше от оси ускоряющей структуры), по сравнению с группой частиц с меньшими поперечными скоростями, что обусловлено ограничением полной скорости частиц скоростью света. Такое запаздывание анализировалось, в частности, в недавней работе [12], в которой вычислялся связанный с этим запаздыванием разброс по энергиям ускоряемых электронов. Помимо указанных выше причин, возможен рост эмиттанса, вызванный нарушением цилиндрической симметрии из-за неточной фокусировки электронного пучка вдоль оси плазменного канала или неточной фокусировки генерирующего кильватерное поле лазерного излучения в плазменный канал. Такой рост изучался в работе [13], а до этого в работах [14, 8] (где рассматривался также рост эмиттанса вследствие нарушения соосности ускоряемого электронного пучка и капиллярного волновода, в котором он ускоряется).

В настоящей работе исследуется динамика поперечно-го эмиттанса сгустка электронов, ускоряемого в кильватерных полях, генерируемых лазерным импульсом в слабонелинейном режиме. Предполагается, что как лазерный импульс и генерируемые им кильватерные поля, так и сгусток электронов цилиндрически-симметричны и распространяются коллинеарно (без смещения осей). Влиянием заряда сгустка на генерируемые кильватерные поля и, как следствие, на ускорение в них самого сгустка мы пренебрегаем, что справедливо, по крайней мере, для сгустков с зарядами, не превышающими нескольких пикокулонов для рассматриваемого слабонелинейного режима [15]. Помимо этого, мы пренебрегаем потерями энергии электронов на синхротронное излучение в процессе их бетатронных колебаний, а также связанным с такими потерями возможным ростом эмиттанса. Такие потери пропорциональны квадрату гамма-фактора электронов [16] и для слабонелинейного режима становятся существенными только при энергиях ускоряемых сгустков, превышающих 1 ТэВ [17].

При решении рассматриваемой задачи предполагается, что размер сгустка в продольном направлении достаточно мал (значительно меньше плазменной длины волны), поскольку известно (см., напр., [18–21]), что только сгустки с длиной, много меньшей длины волны плазменного ускоряющего поля, могут ускоряться в нем более-менее моноэнергетически, что является неременным требованием к ускоренному сгустку для многих приложений. Поперечный размер электронного сгустка также предполагается достаточно малым, много меньшим характерного поперечного размера неоднородности кильватерного поля, который порядка размера лазерного пятна. Это позволяет использовать приближение линейности фокусирующей поперечной силы, а также пренебречь влиянием поперечных колебаний электронов на их продольное ускорение.

Рассмотрен случай, когда начальный характерный поперечный размер инжектированного сгустка $r_b(t=0)$ превышает согласованный радиус $r_{bm} = \sqrt{\epsilon_{n0}/(\gamma_e k_\beta)}$, определяемый исходным нормализованным эмиттансом ϵ_{n0} , гамма-фактором электронного сгустка γ_e и фокусирующей силой в точке инжекции, которая задает модуль волнового вектора бетатронных колебаний k_β [10, 16]. Согласно приведенному выражению для r_{bm} , условие $r_b(t=0) > r_{bm}$ будет наиболее актуальным для относительно небольших начальных значений эмиттансов ϵ_{n0} электронных сгустков на входе в ускорительный каскад и больших гамма-факторов сгустков γ_e . Именно в этом случае может происходить значительный рост эмиттанса в процессе ускорения, что позволяет пренебречь его начальным значением. Увеличение эмиттанса обусловлено фазовым перемешиванием электронов из-за неоднородности фокусирующей силы вдоль длины ускоряемого сгустка электронов и, соответственно, из-за изменения частоты и фазы бетатронных колебаний в различных поперечных сечениях сгустка. При этом, в отличие от работы [11], где определено значение эмиттанса в конце ускорения в результате полного фазового перемешивания, нами получены аналитические выражения для изменения эмиттанса в процессе ускорения в зависимости от длины сгустка и параметров ускоряющих и фокусирующих кильватерных полей, а также определены условия, при которых имеет место полное фазовое перемешивание, приводящее к максимальному увеличению эмиттанса сгустка ускоренных электронов.

Настоящая работа направлена на теоретический анализ динамики эмиттанса электронных сгустков при их лазерно-плазменном ускорении в кильватерных полях. В разд.2 приведены основные уравнения. Аналитическая модель, использующая адиабатическое приближение для решения уравнений движения электронов, сформулирована в разд.3. Результаты численного моделирования динамики эмиттанса с помощью исходных уравнений и сравнение их с полученными аналитическими зависимостями представлены в разд.4.

2. Основные уравнения

Рассмотрим сгусток электронов, ускоряемых в кильватерной плазменной волне. Будем предполагать, что как сгусток электронов, так и кильватерная волна цилиндрически-симметричны относительно их общей оси распространения z .

Величиной, характеризующей поперечное пространственное распределение электронов в сгустке и их угловую расходимость, является поперечный эмиттанс, который можно описать с помощью его компонент ϵ_x, ϵ_y вдоль осей x, y в плоскости, перпендикулярной к оси распространения электронного сгустка z . В соответствии с работами [10, 11], для компоненты ϵ_x справедливы выражения

$$\epsilon_x = \sqrt{x^2 x'^2 - x x'^2}, \quad (1)$$

где

$$X = \{x, x', x x'\}; \quad \bar{X}^2 = N_b^{-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2;$$

$$\bar{X} = N_b^{-1} \sum_i X_i; \quad x' = dx/dz = \dot{x}/\dot{z} = p_x/p_z,$$

где x_i и x'_i – координата и наклон траектории i -го электрона сгустка соответственно; N_b – число электронов в сгустке; p_{xi} – x -компонента импульса i -го электрона, нормированная на mc ; m – масса покоя электрона; c – скорость света; \dot{x} и \dot{z} – производные по времени. Формула (1) с заменой $x \rightarrow y$ дает выражение для компоненты ϵ_y , которая в случае цилиндрически-симметричного сгустка электронов, ускоряемого в цилиндрически-симметричных полях, совпадает с компонентой ϵ_x .

Для компенсации адиабатического уменьшения эмиттанса с ростом энергии сгустка в процессе его ускорения вводится нормализованный поперечный эмиттанс [10, 22]

$$\epsilon_{xn} = \bar{\gamma}_e \bar{\beta}_e \epsilon_x, \tag{2}$$

где

$$\bar{\gamma}_e = \sum_i \gamma_{ei} / N_b$$

– гамма-фактор сгустка;

$$\gamma_{ei} = \sqrt{1 + p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2}$$

– гамма-фактор i -го электрона;

$$\bar{\beta}_e = \sqrt{1 - \bar{\gamma}_e^{-2}} \approx 1$$

– бета-фактор для рассматриваемого ниже сгустка релятивистских электронов.

Поперечный нормализованный эмиттанс для всей плоскости xu можно описать выражением

$$\epsilon_n = \sqrt{2(\epsilon_{xn}^2 + \epsilon_{yn}^2)}, \tag{3}$$

причем $\epsilon_n = 2\epsilon_{xn} = 2\epsilon_{yn}$ для исследуемого далее цилиндрически-симметричного случая.

Для определения координат, импульсов и гамма-фактора i -го электрона ускоряемого сгустка необходимо решить релятивистские уравнения движения в полях кильватерной волны [23, 24]. Для цилиндрически-симметричных кильватерных полей эти уравнения в декартовых координатах имеют вид (индекс i для i -го электрона далее везде для краткости опускаем)

$$dp_z/d\tau = \partial_\xi \phi, \tag{4}$$

$$d\xi/d\tau = \gamma_e^{-1} p_z - 1, \tag{5}$$

$$dp_x/d\tau = (\tilde{x}/\rho) \partial_\rho \phi, \quad dp_y/d\tau = (\tilde{y}/\rho) \partial_\rho \phi, \tag{6}$$

$$d\tilde{x}/d\tau = \gamma_e^{-1} p_x, \quad d\tilde{y}/d\tau = \gamma_e^{-1} p_y, \tag{7}$$

где $\phi = \phi(\xi, \rho, \tau)$ – нормированный на mc^2/e кильватерный потенциал [25]. Здесь и далее используются безразмерные время $\tau = \omega_p t$ и координаты $\xi = k_p(z - ct)$, $\rho = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$, $\tilde{x} = k_p x$, $\tilde{y} = k_p y$, где $k_p = \omega_p/c$; $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e/m}$ – плазменная частота; n_e – концентрация фоновых электронов в плазме; e – заряд электрона.

3. Аналитическая модель

Если радиус ускоряемого сгустка электронов значительно меньше характерного поперечного масштаба киль-

ватерного поля, то в разложении потенциала кильватерного поля вблизи оси можно ограничиться квадратичным членом, который отвечает линейному увеличению радиальной фокусирующей силы с ростом расстояния от оси. При этом согласно уравнениям (6) и (7) траектория электрона в поперечной плоскости xu определяется следующими уравнениями:

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\tau^2} + \frac{d(\ln \gamma_e)}{d\tau} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} + \Omega^2 \tilde{x} = 0, \tag{8}$$

$$\Omega(\xi, \tau) = \sqrt{\alpha(\xi, \tau)/\gamma_e(\xi, \rho, \tau)}, \quad \alpha(\xi, \tau) = -\rho^{-1} \partial_\rho \phi. \tag{9}$$

Уравнение для y -координаты совпадает с уравнением (8) при замене $\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}$. Эти уравнения описывают бетатронные колебания электронов в поперечной плоскости xu , частота которых Ω (9) различна в различных сечениях сгустка и изменяется со временем с ростом гамма-фактора по мере набора энергии электроном в процессе ускорения и с увеличением фокусирующей силы при «отставании» фазы кильватерной волны от ультрарелятивистского электрона, движущегося со скоростью, практически совпадающей со скоростью света.

Уравнения (8) для \tilde{x} - и \tilde{y} -координат связаны с уравнениями, описывающими продольное движение электронов, которые следуют из (4), (5). Для ультрарелятивистских электронов, ускоряемых вдоль оси z , при расчете гамма-фактора можно пренебречь поперечным импульсом электронов по сравнению с продольным, условием чего являются неравенство $|p_x/p_z| \approx |d\tilde{x}/d\tau| \approx \Omega |\tilde{x}| \ll 1$ и аналогичное неравенство для $|p_y/p_z|$. В этом случае получим следующие выражения для гамма-фактора и сопутствующей координаты ξ рассматриваемого электрона в некоторый момент времени τ :

$$\gamma_e(\xi, \rho, \tau) = \gamma_0 + \int_0^\tau \partial_\xi \phi(\xi, \rho, \tau) d\tau, \tag{10}$$

$$d\xi/d\tau = -\gamma_e^{-2}(\xi, \rho, \tau)/2, \tag{11}$$

где γ_0 – начальное значение гамма-фактора электрона в момент инжекции сгустка. Зависимости γ_e и ξ от ρ определяют связь поперечного и продольного движений электрона, описываемых соответственно уравнениями для \tilde{x} - и \tilde{y} -координат (8) и уравнениями (10), (11).

Ниже ограничимся случаем достаточно компактных сгустков электронов, поперечный размер которых мал по сравнению с характерными масштабами изменения кильватерных полей, что позволяет пренебречь различиями в энергиях электронов в данном поперечном сечении сгустка, т.е. влиянием поперечного движения на набор энергии электронами:

$$\gamma_e(\xi, \rho, \tau) \approx \gamma_e(\xi, \rho = 0, \tau) = \gamma_e(\xi, \tau). \tag{12}$$

Поскольку для ультрарелятивистских электронов ($\gamma_e \gg 1$) отличие продольной скорости от скорости света очень мало (см. (11)), будем считать все электроны сгустка движущимися с одинаковой скоростью, равной скорости света, что отвечает постоянному значению сопутствующей продольной координаты электрона ξ , равному ее начальному значению в момент инжекции ξ_0 , и, соответственно, неизменной длине сгустка ускоряемых электронов. При этом все коэффициенты в уравнении (8) зависят только от

времени τ и начальной координаты инжекции $\xi = \xi_0$, а наклон траектории электрона сгустка равен поперечной скорости электрона, нормированной на скорость света:

$$x' = dx/dz = \dot{x}/\dot{z} = d\tilde{x}/d\tau.$$

Для типичных параметров лазерно-плазменного ускорения период бетатронных колебаний значительно меньше характерного времени изменения бетатронной частоты и релятивистского гамма-фактора электрона:

$$\Omega^{-1} |\partial \ln \Omega / \partial \tau| \ll 1, \quad \Omega^{-1} |\partial \ln \gamma_e / \partial \tau| \ll 1. \quad (13)$$

При выполнении этих условий, отвечающих адиабатическому приближению, слайсовый эмиттанс в каждом поперечном сечении электронного сгустка сохраняется [10, 22, 26] для произвольного радиуса сгустка (при линейной зависимости фокусирующей силы от радиуса (8), (9)). Однако, если радиус сгустка не согласован со значениями эмиттанса и фокусирующей силы, радиус сгустка будет колебаться на удвоенной бетатронной частоте [10, 16, 22]. Из-за изменения бетатронной частоты на длине сгустка (вследствие неоднородности фокусирующей силы в плазменной кильватерной волне) электроны в разных сечениях сгустка колеблются с разными фазами. При этом перемешивание фаз приводит к росту эмиттанса всего сгустка, поскольку область фазового пространства (x, p_x) , занимаемого электронами всего сгустка, в этом случае является объединением областей фазового пространства, занимаемых электронами из отдельных поперечных сечений (слайсов), и превышает по площади каждую из таких областей [10, 11]. Такое увеличение эмиттанса сгустка электронов в процессе ускорения может быть весьма значительным, если начальный радиус сгустка заметно превышает согласованный. Ниже рассматривается именно этот случай, когда поперечные импульсы электронов инжектируемого пучка, определяемые начальным эмиттансом, много меньше характерных поперечных импульсов, приобретаемых электронами под действием фокусирующей силы (8). При этом эмиттанс всего сгустка за счет перемешивания фаз бетатронных колебаний (при достаточно больших длине сгустка и длине ускорения) оказывается намного больше начального эмиттанса инжектированного пучка. Это позволяет пренебречь начальным эмиттансом сгустка и записать решение уравнений (8) в виде

$$\tilde{x}(\tilde{x}_0, \xi, \tau) = \tilde{x}_0 \kappa(\xi, \tau), \quad \tilde{y}(\tilde{y}_0, \xi, \tau) = \tilde{y}_0 \kappa(\xi, \tau), \quad (14)$$

$$\kappa(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{\Omega_0(\xi) \gamma_0}{\Omega(\xi, \tau) \gamma_e(\xi, \tau)}} \cos \left[\int_0^\tau \Omega(\xi, \tau') d\tau' \right],$$

где \tilde{x}_0 и \tilde{y}_0 – начальные (в момент инжекции при $\tau = 0$) координаты электрона; κ – решение уравнений (8) с начальными условиями $\kappa(\tau = 0) = 1$ и $d\kappa/d\tau(\tau = 0) \approx 0$; $\Omega(\xi, \tau)$ определена в (9) при $\gamma_e(\xi, \tau)$ (12); $\Omega_0(\xi) = \Omega(\xi, \tau = 0)$; зависимостью γ_e от ξ мы пренебрегли (т.е. инжектируемый сгусток – моноэнергетический). Выражение (14) записано в адиабатическом приближении с точностью до членов главного порядка по малым параметрам (13).

Далее будем предполагать, что распределение электронов в инжектированном сгустке является гауссовым:

$$n_b(\xi, \rho_0, \tau = 0) = n_{||}(\xi) n_{\perp}(\rho_0), \quad \rho_0 = \sqrt{\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2};$$

$$n_{||}(\xi) = \pi^{-1/2} \sigma_z^{-1} \exp(-\xi^2/\sigma_z^2), \quad (15)$$

$$n_{\perp}(\rho_0) = \pi^{-1} \sigma_{r0}^{-2} \exp(-\rho_0^2/\sigma_{r0}^2),$$

где распределения в (15) нормированы на 1; σ_{r0} – начальный безразмерный среднеквадратичный радиус сгустка; σ_z – его характерная длина. При этом для каждого поперечного сечения сгустка с координатой ξ находим следующие средние по сечению величины:

$$\begin{aligned} \overline{x^2(\xi, \tau)} &= \frac{1}{k_p^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}^2(\tilde{x}_0, \xi, \tau) n_{\perp}(\rho_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0 \\ &= \frac{1}{2k_p^2} [\sigma_{r0} \kappa(\xi, \tau)]^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\overline{(dx/d\tau)^2} = \frac{1}{2k_p^2} [\sigma_{r0} d\kappa(\xi, \tau)/d\tau]^2.$$

Тогда из (1) – (3) для нормализованного поперечного эмиттанса получаем выражение

$$\epsilon_n(\tau) = k_p^{-1} \gamma_e \sigma_{r0}^2 \sqrt{\langle \kappa^2 \rangle_{\xi} \langle (dx/d\tau)^2 \rangle_{\xi} - \langle \kappa dx/d\tau \rangle_{\xi}^2}, \quad (17)$$

где усреднение по длине сгустка электронов определяется формулой

$$\langle A \rangle_{\xi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) n_{||}(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Из (14), (16) и (17) следует, что изменение со временем эмиттанса и среднеквадратичного радиуса сгустка описывается выражениями

$$\begin{aligned} \epsilon_n(\tau) &= \frac{1}{2k_p^2} \sigma_{r0}^2 \gamma_0 \Omega_0 [(1 + \langle \cos \Psi \rangle_{\xi}) (1 - \langle \cos \Psi \rangle_{\xi}) \\ &\quad - \langle \sin \Psi \rangle_{\xi}^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$r_b(\tau) = \sqrt{\langle x^2 + y^2 \rangle_{\xi}} = \frac{r_{b0}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\gamma_0 \Omega_0}{\gamma(\tau) \Omega(\tau)} (1 + \langle \cos \Psi \rangle_{\xi}) \right]^{1/2}, \quad (20)$$

$$r_{b0} = \sigma_{r0}/k_p,$$

где

$$\Psi = \Psi(\xi, \tau) = 2 \int_0^\tau \Omega(\xi, \tau') d\tau'. \quad (21)$$

Поскольку для практически важных случаев ускорения электронных сгустков с малым разбросом по энергии их длина должна быть значительно меньше кильватерной плазменной длины волны, при получении выражений (19), (20) изменения фокусирующей силы и энергии электронов вдоль длины сгустка учтены только в осциллирующих членах, содержащих Ψ . В остальных множителях как бетатронная частота, так и гамма-фактор определены их значениями в центре сгустка: $\Omega(\tau) = \Omega(\xi_c, \tau)$, $\gamma(\tau) = \gamma(\xi_c, \tau)$, где ξ_c – координата центра сгустка.

Из выражений (19)–(21) следует, что при постоянной вдоль длины сгустка бетатронной частоте (т.е. при Ω и, соответственно, фазе бетатронных колебаний (21), не зависящих от ξ) эмиттанс всего сгустка совпадает со слай-

совым эмиттансом и поэтому сохраняется, оставаясь равным начальному значению, принятому нулевым. При этом радиус сгустка осциллирует на удвоенной бетатронной частоте от максимального значения до нуля. С ростом фокусирующей силы и энергии электронов это максимальное значение адиабатически уменьшается.

Неоднородность фокусирующей силы на длине сгустка, обуславливающая фазовое перемешивание траекторий электронов, приводит к росту эмиттанса в процессе ускорения вплоть до асимптотического значения

$$\hat{\epsilon}_n = \frac{1}{2} k_p r_{b0}^2 \gamma_0 \Omega_0, \quad (22)$$

отвечающего полному перемешиванию, когда разность фаз бетатронных колебаний на длине сгустка становится значительно больше π , т. е.

$$\sigma_z |\partial \Psi(\xi, \tau) / \partial \xi|_{\xi = \xi_c} \gg \pi, \quad (23)$$

и $\langle \cos \Psi \rangle_{\xi} \approx \langle \sin \Psi \rangle_{\xi} \approx 0$. Очевидно необходимым (но не достаточным) условием выполнения неравенства (23) является требование того, чтобы рассматриваемое время ускорения τ было много больше периода бетатронных колебаний электронов в центре сгустка, при $\xi = \xi_c$. Радиус сгустка электронов при выполнении неравенства (23) приближается, согласно (20), к медленно уменьшающемуся с набором энергии и ростом фокусирующей силы значению

$$\hat{r}_b(\tau) = \frac{r_{b0}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\gamma_0 \Omega_0}{\gamma(\tau) \Omega(\tau)} \right]^{1/2}. \quad (24)$$

Это выражение для среднего радиуса сгустка электронов равно радиусу r_{bm} , согласованному с постоянным асимптотическим значением эмиттанса (22), а также с действующей в данный момент времени τ фокусирующей силой и энергией электронов сгустка [16]:

$$\hat{r}_b(\tau) = r_{bm}(\tau) = \left[\frac{\hat{\epsilon}_n}{k_p \gamma(\tau) \Omega(\tau)} \right]^{1/2} \equiv \left[\frac{\hat{\epsilon}_n}{\gamma(\tau) k_{\beta}(\tau)} \right]^{1/2}, \quad (25)$$

где $k_{\beta}(\tau) = k_p \Omega(\tau)$ – волновое число бетатронных колебаний. Поэтому, после достижения в результате перемешивания фаз бетатронных колебаний электронов сгустка значения (22), эмиттанс остается постоянным.

Для определения динамики эмиттанса и конкретных условий достижения асимптотического значения (22) рассмотрим ускорение сгустка электронов в квазистационарной кильватерной волне, генерируемой коротким интенсивным лазерным импульсом в согласованном плазменном канале с заданным параболическим радиальным профилем концентрации плазмы:

$$n_e(r) = n_{e0} [1 + (r/R_{ch})^2], \quad (26)$$

где n_{e0} – концентрация плазмы на оси канала, а R_{ch} – радиус канала. Для гауссова радиального распределения поля лазерного импульса условие согласования радиуса канала с размером фокального пятна излучения лазера определяется равенством $R_{ch} = k_p r_0^2 / 2$, где r_0 – экспоненциальная (по амплитуде лазерного поля) поперечная полуширина лазерного пятна, а волновое число плазменной волны $k_p = \omega_p / c$ задается электронной концентрацией n_{e0} на оси канала [25, 27–30]. При этом, если мощность ла-

зерного импульса не превышает критическую мощность самофокусировки, лазерный импульс распространяется в канале с почти постоянной амплитудой и генерирует квазистационарную кильватерную волну, распространяющуюся с фазовой скоростью, определяемой групповой скоростью лазерного импульса, так что для фазовой скорости волны v_{ph} релятивистский гамма-фактор $\gamma_{ph} = (1 - \beta_{ph}^2)^{-1/2} \approx k_0 / k_p$, где $\beta_{ph} = v_{ph} / c$, $k_0 = \omega_0 / c$ и ω_0 – частота лазерного излучения.

Потенциал кильватерного поля, генерируемого лазерным импульсом при размере фокального пятна, превышающем плазменную длину волны ($r_0 > 2\pi / k_p$), в линеаризованном по амплитуде кильватерной волны приближении может быть представлен в виде

$$\phi(\xi, \rho, \tau) = \phi_0 \exp(-\rho^2 / \rho_0^2) \sin[\xi + (1 - \beta_{ph})\tau], \quad (27)$$

$$1 - \beta_{ph} \approx 0.5 \gamma_{ph}^{-2},$$

где $\rho_0 = k_p r_0 / \sqrt{2}$ – безразмерный характерный радиус области, занимаемой плазменной кильватерной волной, а амплитуда потенциала ϕ_0 определяется интенсивностью и длительностью лазерного импульса [9, 25] в случае, когда влиянием процессов ионизации на генерацию кильватерного поля можно пренебречь [31].

При этом, согласно (9), (10), (12), получаем выражения

$$\alpha(\xi, \tau) = (2\phi_0 / \rho_0^2) \sin(\xi + \bar{\tau}), \quad \bar{\tau} = (1 - \beta_{ph})\tau, \quad (28)$$

$$\gamma_e(\xi, \tau) = \gamma_0 + 2\gamma_{ph}^2 \phi_0 [\sin(\xi + \bar{\tau}) - \sin \xi].$$

Будем считать, что сгусток электронов инжектирован в фокусирующую фазу кильватерной волны (27) в окрестности максимума ускоряющей силы, т. е. при $\xi \geq 0$. При этом, имея в виду, что длина сгустка намного меньше кильватерной длины волны, выражение для бетатронной частоты (9) в области $\xi < 1$, где находятся электроны сгустка, можно записать в виде

$$\Omega(\xi, \tau) = \left\{ \frac{\alpha_{\max} (\sin \bar{\tau} + \xi \cos \bar{\tau})}{\gamma_0 + 2\gamma_{ph}^2 \phi_0 [\sin \bar{\tau} - (1 - \cos \bar{\tau})\xi]} \right\}^{1/2}, \quad (29)$$

$$\alpha_{\max} = 2\phi_0 / \rho_0^2.$$

Согласно (28) максимальный прирост энергии в одной секции лазерно-плазменного ускорителя (в рассматриваемом слабонелинейном режиме возбуждения кильватерной волны) $\Delta\gamma_{\max} = 2\gamma_{ph}^2 \phi_0$ отвечает $\bar{\tau} = \pi/2$, при котором электрон, инжектированный при $\tau = 0$ в максимум ускоряющей силы на границе фокусирующей фазы, при $\xi = 0$, достигает максимума потенциала (27). Длина ускорения, соответствующая $\bar{\tau} = \pi/2$, равна половине длины дефазировки (при которой электрон проходит всю ускоряющую фазу – от минимума до максимума потенциала) $L_{ph} = k_p^{-1} \pi / (1 - \beta_{ph}) = \lambda_p \gamma_{ph}^2 = \lambda_0 \gamma_{ph}^3$, где $\lambda_0 = 2\pi / k_0$ и $\lambda_p = 2\pi / k_p$ – длины волн лазерного излучения и кильватерной плазменной волны соответственно. Для электронов, инжектированных с энергией, превышающей максимальный прирост энергии ($\gamma_0 \gg \Delta\gamma_{\max}$), с учетом $\Omega(\xi, \tau) \approx \Omega_{\max} (\sin \bar{\tau} + \xi \cos \bar{\tau})^{1/2}$, получаем следующее выражение для фазы бетатронных колебаний электронов сгустка (21), разложенной

по малой длине сгустка около положения его центра ξ_c , при не слишком малой длине ускорения, когда $\tilde{\tau} > \xi_c$:

$$\Psi(\xi, \tau) = \Psi(\xi_c, \tau) + 2(\xi - \xi_c)\psi_0(\tau),$$

$$\psi_0(\tau) = 2\gamma_{\text{ph}}^2 \Omega_{\text{max}} [\sin^{1/2}(\tilde{\tau} + \xi_c) - \sin^{1/2}\xi_c], \quad (30)$$

$$\Omega_{\text{max}} = [2\phi_0/(\rho_0^2\gamma_0)]^{1/2}.$$

Усреднение по длине сгустка (18) в формулах (19), (20) дает при этом для динамики эмиттанса и среднего радиуса сгустка в зависимости от его длины σ_z выражения

$$\epsilon_n(\tau) = \hat{\epsilon}_n [1 - A^2(\tau, \sigma_z)]^{1/2}, \quad (31)$$

$$A^2(\tau, \sigma_z) = \exp\{-2[\psi_0(\tau)\sigma_z]^2\},$$

$$r_b(\tau) = \hat{r}_b(\tau) \{1 + A(\tau, \sigma_z) \cos[\Psi(\xi_c, \tau)]\}^{1/2}, \quad (32)$$

где фаза $\Psi(\xi_c, \tau)$ определена формулами (21) и (29) для центра сгустка, при $\xi = \xi_c$. Вычисляя соответствующий интеграл в приближении малого набора энергии электронов, по сравнению с их первоначальной энергией, справедливым, в соответствии с (28), при условии $\mu = 2\gamma_{\text{ph}}^2\phi_0/\gamma_0 < 1$, а также используя разложение члена $\sin(\tilde{\tau} + \xi_c)$ в ряд Тейлора с удержанием первых трех членов ряда, можно записать для $\Psi(\xi_c, \tau)$ приближенное выражение:

$$\Psi(\xi_c, \tau) = 4\gamma_{\text{ph}}^2 \Omega_{\text{max}} (1 - \mu \sin \xi_c)^{-1/2} [I_b(\tilde{\tau} + \xi_c) - I_b(\xi_c)],$$

$$I_b(t) = t^{3/2} \left(\frac{2}{3} - \frac{b}{5}t + \frac{9b^2 - 1}{42}t^2 \right), \quad (33)$$

$$b = \frac{\mu}{1 - \mu \sin \xi_c}, \quad \mu = \frac{2\gamma_{\text{ph}}^2\phi_0}{\gamma_0} \equiv \Delta\gamma_{\text{max}}/\gamma_0.$$

Формула (31) показывает, что для увеличения эмиттанса до его максимального значения (22), определяемого радиусом сгустка, его энергией и фокусирующей силой в точке инжекции, показатель экспоненты в выражении для $A^2(\tau, \sigma_z)$ должен с течением времени стать больше единицы, для чего необходимо выполнение условия

$$\sigma_z > [\sqrt{2}\psi_0(\tau)]^{-1} = \{2\sqrt{2}\gamma_{\text{ph}}^2 \Omega_{\text{max}} [\sin^{1/2}(\tilde{\tau} + \xi_c) - \sin^{1/2}\xi_c]\}^{-1} \equiv \tilde{\sigma}_z(\tau). \quad (34)$$

Для того чтобы перемешивание фаз бетатронных колебаний электронов произошло при максимальной длине ускорения (при $\tilde{\tau} + \xi_c = \pi/2$), длина сгустка электронов должна превышать минимальное значение

$$\sigma_{\text{min}} = (2\sqrt{2}\gamma_{\text{ph}}^2 \Omega_{\text{max}})^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{k_p}{k_{\beta\text{max}}} \gamma_{\text{ph}}^{-2}, \quad (35)$$

где $k_{\beta\text{max}} = k_p \Omega_{\text{max}}$ – волновое число, отвечающее максимальной частоте бетатронных колебаний в (30). Для более коротких сгустков ($\sigma_z < \sigma_{\text{min}}$), а также при меньшем времени ускорения, когда выполнено неравенство, про-

тивоположное (34), эмиттанс сгустка увеличивается до значения (31), меньшего асимптотического (22):

$$\epsilon_n(\tau) = \hat{\epsilon}_n [\sigma_z/\tilde{\sigma}_z(\tau)]. \quad (36)$$

Для сгустков, длина которых превышает минимальную (35), неравенство (34) можно записать как условие для длины ускорения $z_{\text{acc}} = ct = \tau/k_p$ при заданной длине сгустка σ_z в зависимости от энергии электронов и параметров кильватерного поля (максимального значения фокусирующей силы и фазовой скорости кильватерной волны):

$$z_{\text{acc}}/L_{\text{ph}} > \pi^{-1} \arcsin(\sigma_{\text{min}}^2/\sigma_z^2), \quad \sigma_z > \sigma_{\text{min}}. \quad (37)$$

Наконец отметим, что условия адиабатичности (13) с учетом (27), (28) можно представить в виде ограничений на амплитуду кильватерного потенциала, энергию электронов и координату (фазу) инжекции электронного сгустка ξ_c :

$$\frac{\rho_0}{4\gamma_{\text{ph}}^2} (\tilde{\tau} + \xi_c)^{-3/2} \ll \left(\frac{2\phi_0}{\gamma_0} \right)^{1/2} \ll \frac{2}{\rho_0} (\tilde{\tau} + \xi_c)^{1/2}. \quad (38)$$

В то время как для типичных параметров ($2\phi_0 \leq 1$, $\gamma_0 > 10^3$, $\rho_0 \approx 3$) правое неравенство в (38) выполнено, за исключением малого промежутка времени при инжекции электронного сгустка непосредственно на границу фокусирующей фазы ($\xi_c \rightarrow 0$), левое неравенство может накладывать весьма значительные ограничения на координату инжекции и энергию электронов сгустка.

4. Численные расчеты

Моделирование динамики эмиттанса сгустка электронов при его ускорении в кильватерных полях, генерируемых лазерным импульсом в слабонелинейном режиме в плазменном канале (26), проводилось путем численного решения уравнений движения электронов (4)–(7) с использованием кильватерного потенциала (27). Безразмерная амплитуда кильватерного потенциала $\phi_0 = 0.095$, его характерный радиус $\rho_0 = 3.47$, что соответствует максимальной «жесткости» фокусирующей силы в (29) $\alpha_{\text{max}} = 0.0158$ и максимальному приросту энергии электронов $\Delta\gamma_{\text{max}} = 1216$. Концентрация плазмы n_{e0} на оси канала (см. (26)) была выбрана такой, что определяемый ею гамма-фактор плазменной волны $\gamma_{\text{ph}} = k_0/k_p = 80$ и длина дефазировки $L_{\text{ph}} = 41$ см. При длине волны лазерного излучения $\lambda_0 = 0.8$ мкм радиус согласованного плазменного канала $R_{\text{ch}} = 123$ мкм для характерного размера фокального пятна излучения лазера $r_0 = 50$ мкм. Указанная амплитуда потенциала $\phi_0 = 0.095$ отвечает резонансному возбуждению кильватерной волны лазерным импульсом длительностью $\tau_{\text{FWHM}} = 80$ фс с безразмерной амплитудой $a_0 = eE_{\text{max}}/(m\omega_0 c) = 0.5$ [9].

Инжектированные электронные сгустки имели гауссово распределение частиц в продольном и поперечном направлениях (15) с безразмерными полуширинами σ_z и σ_{r_0} соответственно: в расчетах σ_z различны, а $\sigma_{r_0} = 0.212$. Электронные сгустки инжектировались при различных смещениях положения центра электронного сгустка ξ_c относительно положения максимума ускоряющей силы. При этом поперечный нормализованный эмиттанс определялся по формулам (1)–(3).

Подчеркнем, что при моделировании движения частиц с помощью уравнений (4)–(7) с потенциалом (27) не

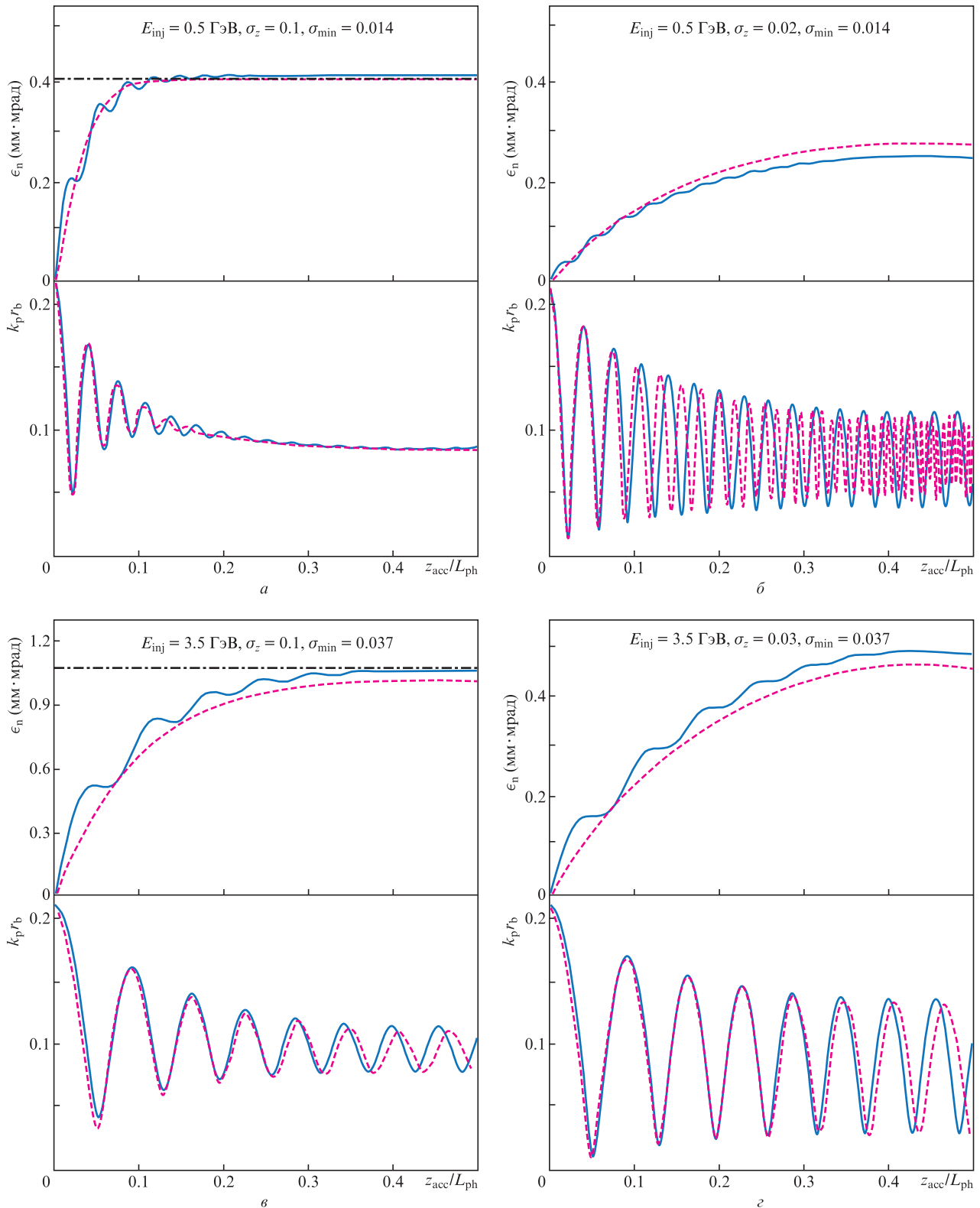


Рис.1. Зависимости нормализованного эмиттанса ϵ_n и среднеквадратичного безразмерного радиуса сгустка электронов $k_p r_b$ от безразмерной длины ускорения z_{acc}/L_{ph} при различных энергиях инъекции E_{inj} , различных безразмерных длинах σ_z, σ_{min} и при точке инъекции $\xi_c = 0.2$ электронных сгустков. Штрих-пунктирные прямые – асимптотический предел. Параметры расчетов приведены в тексте.

предполагается линейности радиальной силы, не пренебрегается зависимостью гамма-фактора электронов γ_e от радиальной (ρ) и сопутствующей (ξ) координат и не считаются выполненными условия адиабатичности (13).

Результаты моделирования приведены на рис.1 и 2 (сплошные кривые) в сравнении с аналитическими выра-

жениями (31) для нормализованного эмиттанса и (32) для среднеквадратичного радиуса ускоряемого электронного сгустка с приближенным значением фазы (33) (штриховые кривые).

В соответствии с формулами (30)–(35), при малых энергиях инъекции $E_{inj} = mc^2\gamma_0$ величина σ_{min} достаточно ма-

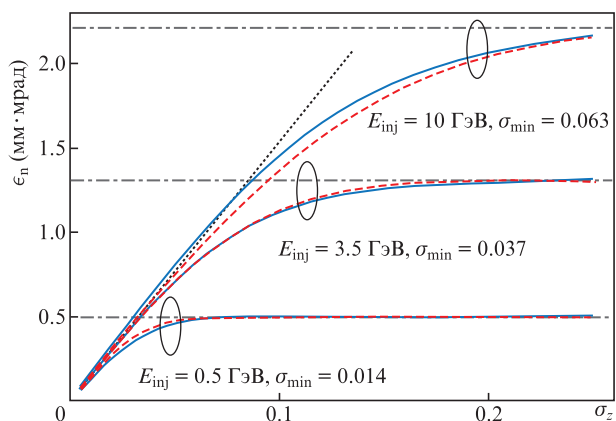


Рис.2. Зависимости нормализованного эмиттанса ϵ_n в конце стадии ускорения (при $z_{\text{acc}} = L_{\text{ph}}/2$) от безразмерной длины σ_z электронных сгустков при различных энергиях инжекции E_{inj} , различных длинах σ_{min} и при $\xi_c = 0.3$. Пунктирная прямая – линейный предел (36), штрих-пунктирные прямые – асимптотический предел. Параметры расчетов приведены в тексте.

ла, а значения фазы ψ_0 , наоборот, достаточно велики. Поэтому при условии $\sigma_z > \sigma_{\text{min}}$ с ростом длины ускорения z_{acc} происходит быстрое затухание колебаний среднеквадратичного радиуса электронного пучка, а нормализованный эмиттанс быстро достигает асимптотического значения (22) (рис.1,а, в и нижние кривые на рис.2). С ростом энергии инжекции (рис.1,в,г и рис.2) наблюдается рост σ_{min} и уменьшение ψ_0 . При условии $\sigma_z > \sigma_{\text{min}}$ колебания среднеквадратичного радиуса электронного пучка затухают, но медленнее, чем в случае относительно небольших энергий инжекции (ср. рис.1,а и в). Из-за уменьшения величины $\Omega_{\text{max}} \propto \gamma_0^{1/2}$ фазовое перемешивание происходит медленнее при увеличении энергии инжекции, что проявляется также в более медленном возрастании нормализованного эмиттанса с ростом длины ускорения, по сравнению со случаем малых γ_0 .

При $\sigma_z < \sigma_{\text{min}}$ колебания среднеквадратичного радиуса электронного сгустка слабо затухают с увеличением длины ускорения. Нормализованный эмиттанс при этом к концу ускорения достигает значений, меньших или равных значениям в линейном пределе (36) (рис.1,б,г и рис.2). В этом случае наблюдается неполное фазовое перемешивание электронов, первоначально инжектированных в разные фазы кильватерной волны.

Отметим, что, в соответствии с формулами (22) и (36), асимптотическое значение нормализованного эмиттанса пропорционально $\sqrt{\gamma_0}$, т.е. растет с увеличением энергии инжекции, тогда как в линейном пределе, который реализуется при $\sigma_z < \sigma_{\text{min}}$, значение нормализованного эмиттанса в момент времени t пропорционально $\sqrt{\gamma_0/\gamma_e(t)}$, т.е. не увеличивается с ростом энергии инжекции (см. также рис.2 при малых σ_z). Такая ситуация может быть благоприятна для ускорительных каскадов с большими энергиями инжекции, если удастся обеспечить достаточно малую длину ускоряемого электронного сгустка.

Результаты, приведенные на рис.1 и 2, показывают, что аналитическая модель находится в хорошем согласии с результатами численного моделирования.

5. Заключение

Нами представлен анализ динамики нормализованного эмиттанса короткого электронного сгустка, ускоря-

емого в кильватерных плазменных полях, генерируемых в слабонелинейном режиме в направляющих структурах (плазменном канале) коротким интенсивным лазерным импульсом. Для случая, когда характерный поперечный размер инжектированного сгустка превышает согласованный радиус, определяемый величиной фокусирующей силы в точке инжекции, исходным эмиттансом и энергией электронного сгустка, и начальный эмиттанс много меньше конечного, рассмотрен механизм роста нормализованного эмиттанса, обусловленного фазовым перемешиванием электронов из-за неоднородности фокусирующей силы вдоль длины ускоряемого сгустка электронов и, соответственно, из-за изменения частоты и фазы бетатронных колебаний в различных поперечных сечениях сгустка.

Полученные аналитические выражения (31) и (32) определяют зависимости нормализованного эмиттанса и среднеквадратичного радиуса электронного сгустка от длины (времени) ускорения, параметров ускоряющих и фокусирующих кильватерных полей и характеристик электронного сгустка в точке инжекции: его длины, радиуса, энергии и фазы инжекции. Найдена длина сгустка электронов (34), (35), при которой происходит полное фазовое перемешивание и увеличение эмиттанса до его максимального значения (22), определяемого радиусом сгустка, его энергией и фокусирующей силой в точке инжекции.

Подчеркнем, что для относительно длинных сгустков электронов нормализованный эмиттанс, обусловленный полным фазовым перемешиванием, растет с ростом энергии инжекции (гамма-фактора сгустка γ_0), в то время как для относительно коротких сгустков такой рост не наблюдается. Эта закономерность особенно важна для многокаскадных лазерно-плазменных ускорителей электронов до высоких (вплоть до нескольких тераватт) энергий.

Результаты проведенного численного моделирования движения частиц с помощью уравнений релятивистской динамики (4)–(7) (без предположений о линейности радиальной силы, о независимости продольного и поперечного движений и без выполнения условия адиабатичности) находятся в хорошем согласии с полученными аналитическими выражениями (31) и (32) для зависимостей нормализованного эмиттанса и среднеквадратичного радиуса электронного сгустка от длины (времени) ускорения и параметров кильватерных полей и ускоряемого сгустка (см. рис.1 и 2).

Обсуждение динамики эмиттанса $\epsilon_n(t)$ электронных сгустков с учетом его конечного значения $\epsilon_n(t=0)$ в момент инжекции, а также практически важного вопроса о сохранении величины эмиттанса при многостадийном ускорении, является предметом нашей следующей работы.

Авторы выражают признательность С.В.Кузнецову за ценные замечания и обсуждения.

Работа частично поддержана Программой фундаментальных исследований Президиума РАН «Экстремальные световые поля и их взаимодействие с веществом» и грантом РФФИ № 19-02-00908.

1. Esarey E., Schroeder C.B., Leemans V.P. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 1229 (2009).
2. Mourou G.A., Tajima T., Bulanov S.V. *Rev. Mod. Phys.*, **78**, 309 (2006).
3. Gonsalves A.J., Nakamura K., Daniels J., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 084801 (2019).
4. Steinke S., van Tilborg J., Benedetti C., et al. *Phys. Plasmas*, **23** (5), 056705 (2016).
5. Tomassini P., Rossi A.R. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, **58** (3), 034001 (2016).

6. Chancé A., Li X., Nghiem P. *Proc. 10th Int. Particle Accelerator Conf. (IPAC'19)* (Melbourne, Australia, 2019; Geneva, Switzerland: JACoW Publishing, 2019, pp 3594–3597); <https://doi.org/10.18429/JACoW-IPAC2019-THPGW006>.
7. Pompili R., Anania M.P., Bellaveglia M., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **121**, 174801 (2019); <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.174801>.
8. Вейсман М.Е., Кузнецов С.В., Андреев Н.Е. *Квантовая электроника*, **47** (3), 199 (2017) [*Quantum Electron.*, **47** (3), 199 (2017)].
9. Горбунов Л.М., Кирсанов В.И. *ЖЭТФ*, **93**, 509 (1987) [*Sov. Phys. JETP*, **66**, 290 (1987)].
10. Reiser M. *Theory and Design of Charged Particle Beams* (Wiley-VCH Verlag GmbH, 2007); <http://dx.doi.org/10.1002/9783527617623.fmatter>.
11. Mehrling T., Grebenyuk J., Tsung F.S., et al. *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams*, **15**, 111303 (2012).
12. Pousa A.F., de la Ossa A.M., Assmann R.W. *Sci. Rep.*, **9**, 17690 (2019).
13. Thévenet M., Lehe R., Schroeder C.B., et al. *Phys. Rev. Accel. Beams*, **22**, 051302 (2019).
14. Вейсман М.Е., Кузнецов С.В., Андреев Н.Е. *Квантовая электроника*, **46** (4), 288 (2016) [*Quantum Electron.*, **46** (4), 288 (2016)].
15. Andreev N., Baranov V., Matevosyan H. *Laser Part. Beams*, **35** (4), 569 (2017).
16. Esarey E., Shadwick B.A., Catravas P., Leemans W.P. *Phys. Rev. E*, **65**, 056505 (2002).
17. Пугачёва Д.В., Андреев Н.Е. *Квантовая электроника*, **48** (4), 291 (2018) [*Quantum Electron.*, **48** (4), 291 (2018)].
18. Andreev N.E., Kuznetsov S.V., Pogorelsky I.V. *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams*, **3**, 021301 (2000).
19. Andreev N.E., Baranov V.E., Cros B., et al. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, **653** (1), 66 (2011).
20. Кузнецов С.В. *Физика плазмы*, **37**, 242 (2011) [*Plasma Phys. Rep.*, **37**, 218 (2011)].
21. Кузнецов С.В. *ЖЭТФ*, **150**, 195 (2016) [*JETP*, **123**, 169 (2016)].
22. Edwards D., Syphers M. *An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators* (Wiley, 1993).
23. Andreev N., Kuznetsov S. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **28**, 1211 (2000).
24. Andreev N., Kuznetsov S. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **36**, 1765 (2008).
25. Andreev N.E., Gorbunov L.M., Kirsanov V.I., et al. *Phys. Plasmas*, **4** (4), 1145 (1997).
26. Zheng-Hong L. *Chin. Phys. B*, **17** (3), 901 (2008).
27. Sprangle P., Esarey E. *Phys. Fluids B*, **4** (7), 2241 (1992).
28. Andreev N.E., Kirsanov V. I., Gorbunov L.M. *Phys. Plasmas*, **2** (6), 2573 (1995).
29. Esarey E., Schroeder C.B., Shadwick B.A., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 3081 (2000).
30. Andreev N.E., Kuznetsov S.V. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, **45** (12A), A39 (2003).
31. Andreev N.E., Chegotov M.V., Veisman M.E. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **28** (4), 1193 (2000).