

# О влиянии граничных условий на флуктуации бозе-конденсата взаимодействующих атомов

С.В.Тарасов

*Для газа взаимодействующих атомов, находящихся в ловушке и образующих бозе-конденсат, продемонстрирована возможность существенного влияния граничных условий на статистику числа частиц в основной моде системы. Анализ проведен в низкотемпературном приближении Боголюбова–Попова для модельных однородных кубических ловушек с периодическими либо комбинированными периодическими и нулевыми граничными условиями. Показано, что влияние граничных условий не ослабевает даже в области параметров, отвечающей относительно сильному взаимодействию в асимптотике Томаса–Ферми, и не исчезает при переходе к термодинамическому пределу.*

**Ключевые слова:** бозе-конденсация, флуктуации параметра порядка, приближение Боголюбова–Попова, асимптотика Томаса–Ферми, граничные условия.

## 1. Введение

При описании бозе-газа, удерживаемого в ловушке с температурой заметно ниже критической, традиционно полагается, что  $N$  атомов системы разделены на две фракции. Первая фракция формирует бозе-конденсат – основную, макроскопически заполненную моду системы со значительным числом частиц  $N_0$ . Вторая фракция, содержащая  $N_{\text{ex}}$  частиц, формирует облако несконденсированного газа. Подобное разбиение на сконденсированную и несконденсированную фракции имеет случайный характер, т. е. числа частиц в конденсате  $N_0$  и вне его  $N_{\text{ex}}$  являются случайными флуктуирующими величинами (связанными в рамках канонического ансамбля условием  $N_0 + N_{\text{ex}} = N$ ).

Квантовая статистика, описывающая это разбиение, становится объектом лабораторного исследования бозе-систем различных конфигураций. Анализ не ограничивается только математическими ожиданиями – так, в эксперименте [1] исследуется поведение дисперсии числа частиц в конденсате в зависимости от температуры системы. Достигнутая точность измерений и возможность варьировать геометрию и параметры ловушки позволяют количественно сравнить лабораторные результаты с теоретическими моделями. Примером служит эксперимент [2], в котором измерялась зависимость числа несконденсированных атомов от интенсивности межчастичного взаимодействия (т. е. измерялся эффект квантового истощения конденсата) и было подтверждено предсказание теории Боголюбова об этой зависимости, включая входящий в нее численный коэффициент.

Соответствующее подобным экспериментам универсальное микроскопическое описание флуктуаций бозе-конденсата в произвольной ловушке не построено и известно, фактически, только для случая идеального газа

[3–5]. Однако уже этот частный случай демонстрирует нетривиальные особенности статистики числа частиц в конденсате. Так, для газа без межчастичного рассеяния показано, что изучаемая статистика может быть существенно негауссовой даже в термодинамическом пределе [4–7], что нетипично для статистической физики многомодовых систем. При этом дисперсия и старшие моменты оказываются зависящими от наложенных на систему граничных условий (и прочих неглобальных возмущений удерживающего потенциала). Указанные свойства проявляются для ловушек с резко нарастающим удерживающим потенциалом и невысокой энергетической плотностью состояний, к которым относятся в том числе трехмерные ловушки-ящики и другие системы, близкие к однородным. Для постановки и интерпретации будущих экспериментов по изучению статистики бозе-систем важно выяснить, проявляются ли ее негауссовы особенности и в реальной ситуации, когда межчастичное взаимодействие присутствует. Данный вопрос на сегодняшний день фактически является открытым.

В настоящей работе рассматривается частный аспект обозначенного вопроса: не «выключает» ли межчастичное взаимодействие эффекты, связанные с граничными условиями. Казалось бы, этого вполне можно ожидать с учётом следующих двух обстоятельств. Во-первых, при сравнительно сильном межчастичном рассеянии, приближающем систему к пределу Томаса–Ферми, конденсат эффективно экранирует внешний потенциал, а следовательно, волновые функции системы способны почувствовать наложенные граничные условия только в узкой приграничной области пространства, исчезающе малой по сравнению с полным объёмом системы. Во-вторых, при наличии межчастичного рассеяния спектр квазичастиц системы в низкоэнергетичной части (наиболее существенной для формирования флуктуаций) превращается в соответствии с преобразованием Боголюбова из квадратично растущего по квантовым числам в линейно растущий. При этом известно [4, 5, 7], что для идеального бозе-газа в трёхмерной гармонической ловушке такой линейный рост энергий по квантовым числам совершенно недостаточен для нарушения центральной предельной теоремы, а потому

С.В.Тарасов. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: serge.tar@gmail.com

Поступила в редакцию 11 марта 2020 г., после доработки – 4 апреля 2020 г.

не предполагает ни негауссовых флуктуаций, ни существенного влияния возмущений удерживающего потенциала на статистику системы.

Целью настоящей работы является прямая демонстрация того факта, что в широкой области параметров бозе-системы влияние граничных условий на флуктуации числа частиц в конденсате, а именно на дисперсию и старшие моменты, сохраняется и при наличии межчастичного рассеяния. Этот эффект не ограничен случаем почти идеального газа, он не исчезает и даже не ослабевает по мере того, как система приближается к пределу Томаса–Ферми. Рассмотрение проведено на примере двух модельных ловушек-ящиков, различающихся только наложенными граничными условиями. Выбор подобной простой геометрии позволил дать максимально наглядное и практически полностью аналитическое описание анализируемых статистических распределений.

Предположение о влиянии граничных условий на статистику взаимодействующего бозе-газа ранее непосредственно высказывалось в работе [8], в которой указано, почему для описания его флуктуаций центральная предельная теорема может оказаться неприменимой. Однако при этом вопрос поиска реальных квазичастиц системы по существу опускался, и расчеты проводились для некоторого набора гипотетических спектров и структур возбужденных состояний, непротиворечивых в пределе Томаса–Ферми, но не основанных на последовательном решении уравнений для конденсата и квазичастиц. Соответственно влияние граничных условий на статистику обосновывалось только качественно и детальный механизм его реализации оставался неясным.

В настоящей работе рассматриваются такие конкретные модельные ловушки, для которых квазичастицы системы и их энергии в широкой области интенсивности межчастичного рассеяния находятся явно и согласованно с профилем плотности конденсата. Это позволяет, с одной стороны, аналитически изучить статистику бозе-газа не только в области применимости аппроксимации Томаса–Ферми, но и в области параметров, где волновые функции конденсата и квазичастиц могут существенно зависеть от силы взаимодействия. С другой стороны, описание эволюции флуктуаций при непрерывном переходе от предела идеального газа к пределу Томаса–Ферми прозрачно показывает, почему влияние граничных условий на статистику сохраняется и для бозе-газа с существенным взаимодействием.

## 2. Задача о распределении числа частиц в конденсате и вне него. Роль граничных условий в формировании флуктуаций

Проводимый анализ опирается на приближение Боголюбова–Попова [9, 10], применимое при температуре бозе-газа  $T$  существенно ниже критической,  $T \ll T_c$ . Это приближение предполагает условное разделение полевого оператора многочастичной системы на две части:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{\langle N_0 \rangle} \phi(\mathbf{r}) + \hat{\psi}_{\text{ex}}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\hat{\psi}_{\text{ex}}(\mathbf{r}) = \sum_j (u_j(\mathbf{r}) \hat{b}_j + v_j^*(\mathbf{r}) \hat{b}_j^\dagger).$$

Первая из них описывает конденсат с пространственным профилем  $\phi(\mathbf{r})$  и ожидаемым в нем значительным числом частиц  $\langle N_0 \rangle$ ; соответствующий данной пространственной моде оператор уничтожения заменен на классическое неоператорное числовое значение  $\sqrt{\langle N_0 \rangle}$ . Вторая часть, отмеченная индексом ex (от excitation), является операторной добавкой и описывает существующие на фоне конденсата возбуждения-квазичастицы, которым соответствуют операторы рождения/уничтожения  $\hat{b}_j^\dagger$  и  $\hat{b}_j$  и двухкомпонентные волновые функции  $(u_j, v_j)$ . При этом волновая функция конденсата (выбираемая чисто действительной) описывается уравнением Гросса–Питаевского, а квазичастицы и их энергии  $E_j$  задаются системой Боголюбова–Жена:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U - \mu + g \langle N_0 \rangle \phi^2 + 2g \langle n_{\text{ex}} \rangle \right) \phi &= 0, \\ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U - \mu + 2g \langle N_0 \rangle \phi^2 + 2g \langle n_{\text{ex}} \rangle \right) \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} &+ g \langle N_0 \rangle \phi^2 \begin{bmatrix} v_j \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +E_j u_j \\ -E_j v_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Оба уравнения включают в себя внешний удерживающий потенциал ловушки  $U(\mathbf{r})$ , а также зависят от усредненных профилей плотности конденсата  $\langle N_0 \rangle \phi^2(\mathbf{r})$  и плотности частиц вне конденсата  $\langle n_{\text{ex}} \rangle(\mathbf{r})$ , интенсивность межчастичного рассеяния характеризуется константой взаимодействия  $g$ ,  $\mu$  – химический потенциал. Усреднения проводятся по матрице плотности

$$\hat{\rho} = \exp\left(-\sum_j E_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j / T\right) \prod_j (1 - e^{-E_j / T}),$$

характеризующей равновесную систему и диагональной в представлении чисел квазичастиц.

Задача об описании флуктуаций предполагает нахождение вероятностного распределения  $\rho_0(N_0)$ , описывающего случайную величину – число частиц в конденсате  $N_0$ . Эта же задача может быть переформулирована как поиск распределения  $\rho_{\text{ex}}(N_{\text{ex}})$  полного числа частиц вне конденсата  $N_{\text{ex}}$ , т. к. полное число частиц в системе фиксировано:  $N = N_0 + N_{\text{ex}} = \text{const}$ . Эффективным методом анализа статистики является использование характеристической функции  $\Theta(u)$ :

$$\Theta(u) \equiv \text{Tr}(e^{iu N_{\text{ex}}} \hat{\rho}), \quad (3)$$

$$\rho_{\text{ex}}(N_{\text{ex}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iu N_{\text{ex}}} \Theta(u) du, \quad \rho_0(N_0) = \rho_{\text{ex}}(N - N_0).$$

Он позволяет записать искомые распределения в виде интегралов Фурье, а также вычислить моменты распределения (математическое ожидание, дисперсию  $\sigma^2$ , коэффициент асимметрии  $\gamma$ ) через кумулянты:

$$\tilde{\kappa}_m \equiv \left. \frac{d^m \ln \Theta}{d(e^{iu} - 1)^m} \right|_{u=0}, \quad \langle N_{\text{ex}} \rangle = \tilde{\kappa}_1, \quad \sigma^2 = \tilde{\kappa}_2 + \tilde{\kappa}_1, \quad (4)$$

$$\gamma = \tilde{\kappa}_3 + 3\tilde{\kappa}_2 + \tilde{\kappa}_1.$$

В рамках такого описания рассмотрим две модельные ловушки, которые удерживают газ в кубическом объеме

$V_{\text{trap}} = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$  и различаются лишь граничными условиями, наложенными на уравнения Гросса–Питаевского и Боголюбова–де Жена (2). В первом случае граничные условия будем считать периодическими по всем направлениям, что соответствует полностью однородной системе. Во втором случае наложим периодические граничные условия вдоль только двух направлений, тогда как третьему направлению сопоставим нулевые граничные условия. Волновая функция конденсата вдоль этого неоднородного направления в зависимости от величины константы взаимодействия  $g$  варьируется от половины периода синуса (идеальный газ) до практически постоянной в центральной части ловушки и быстро спадающей до нуля в узких приграничных областях (предел Томаса–Ферми). Роль взаимодействия для таких «плоских» потенциалов характеризуется отношением характерной кинетической энергии  $\epsilon^* = \hbar^2 \pi^2 / (2mL^2)$  и энергии межчастичного взаимодействия  $g\langle N_0 \rangle / V$ . В терминах пространственных масштабов (чаще используемых при описании экспериментов) межчастичное рассеяние характеризует длину экранирования

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2 V}{2mg\langle N_0 \rangle}},$$

на которой конденсат эффективно экранирует возмущение внешнего потенциала. Относительно сильному взаимодействию, приближающему систему к пределу Томаса–Ферми, соответствуют неравенство  $L/\xi \gg 1$ , или  $g\langle N_0 \rangle / V \gg \epsilon^*$  в терминах энергий.

Рассматриваемые конфигурации ловушек выделяются тем, что для них характеристическая функция и кумулянты сводятся к достаточно простым явным выражениям (что пока не достигнуто для удерживающего потенциала общего вида из-за присутствия в экспоненте оператора  $\hat{N}_{\text{ex}} = \hat{\psi}_{\text{ex}}^\dagger \hat{\psi}_{\text{ex}}$ , имеющего сложный вид в терминах операторов  $\hat{b}_j^\dagger$  и  $\hat{b}_j$ ). А именно используя спектр собственных значений так называемого модифицированного уравнения Шредингера [11],

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U - \mu + g\langle N_0 \rangle \phi^2 + 2g\langle n_{\text{ex}} \rangle\right) f = \epsilon f, \quad (5)$$

можно получить следующий результат:

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \prod_j [(1 - \zeta_j^{(+)} z)(1 - \zeta_j^{(-)} z)]^{-1/2}, \\ \tilde{\kappa}_m &= \frac{\Gamma(m)}{2} \sum_j [(\zeta_j^{(+)} z)^m + (\zeta_j^{(-)} z)^m], \\ \zeta_j^{(\pm)} &= \frac{(E_j/\epsilon_j)^{\pm 1}}{e^{E_j/2T} - 1} + \frac{(E_j/\epsilon_j)^{\pm 1} - 1}{2}, \quad E_j \equiv \sqrt{\epsilon_j^2 + 2\Delta_{jj}\epsilon_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Gamma(m)$  – гамма-функция. Характеристическая функция здесь записана в терминах аргумента  $z \equiv e^{iu} - 1$ , суммы и произведения берутся по всем нетривиальным квазичастицам системы (за исключением голдстоуновской моды),  $\Delta_{jj} \equiv g\langle N_0 \rangle \int f_j^* \phi^2 f_j d^3r$  есть диагональные перекрытия решений уравнения (5) с весом, определенным волновой функцией конденсата (совпадающей с наиболее низкоэнергетичным решением того же уравнения). Каждая квазичастица дает во флуктуации вклад, представляемый двумя выражениями  $\zeta_j^{(\pm)}$ , которые содержат как тепловые сла-

гаемые (с больцмановской экспонентой в знаменателе), так и квантовые слагаемые (связанные исключительно с нетривиальным превращением частиц в квазичастицы и приводящие, в частности, к квантовому истощению конденсата).

Для случая полностью периодических граничных условий результат (6) является точным [12, 13], при этом модифицированное уравнение Шредингера (5) эквивалентно обычному одночастичному уравнению Шредингера в исходной ловушке без взаимодействия. В свою очередь для рассмотренных смешанных граничных условий выражения (6) являются весьма хорошей аппроксимацией, основанной на специфической, «квазидиагональной» структуре квазичастиц, – каждая из них сформирована по большей части лишь одной модой модифицированного уравнения Шредингера (5), обуславливающей не менее 97% вклада в норму квазичастицы. Данная особенность подробно описана в работе [14] для одномерной неоднородной задачи, а его перенос на рассматриваемую трехмерную конфигурацию обеспечивает возможность разделения переменных в уравнениях (2).

Отличие характеристической функции вида (6) от характеристической функции, рассчитанной для идеального газа (см., напр., [4]), вовсе не сводится к замене спектра невзаимодействующих частиц на спектр квазичастиц, образующих идеальный газ в приближении Боголюбова–Попова. Дело в том, что непосредственное вычисление характеристической функции для взаимодействующего газа предполагает не только совершение перехода от частиц к квазичастицам, но и последующий возврат в базис частиц. Данное обстоятельство отражается в следующем принципиальном свойстве: характеристическая функция (6) содержит наряду со спектром квазичастиц  $\{E_j\}$  еще и спектр одночастичного модифицированного уравнения Шредингера  $\{\epsilon_j\}$ , т.е. не теряет информацию об исходных частицах, породивших боголюбовские квазичастицы.

Информация об одночастичном спектре наиболее полно сохраняется, как показано в [8], при температурах системы  $T \gg (\epsilon^*)^{1/4} (g\langle N_0 \rangle / V)^{3/4}$ , соответствующих так называемому тепловому режиму флуктуаций. В этом случае кумулянт  $\tilde{\kappa}_2$ , определяющий дисперсию, а также все старшие кумулянты обусловлены в первую очередь температурными факторами. Тепловой режим статистики не противоречит приближению системы к пределу Томаса–Ферми, т.е. неравенству  $L/\xi \gg 1$ , записываемому в терминах характерных энергий как  $g\langle N_0 \rangle / V \gg \epsilon^*$ . Более того, из указанного критерия теплового режима флуктуаций следует, что при произвольной интенсивности межчастичного взаимодействия именно он неизменно реализуется для рассматриваемых систем при переходе к термодинамическому пределу, когда при постоянных температуре  $T \ll T_c$ , концентрации газа  $N/V$  и константе взаимодействия  $g$  размеры ловушки  $L$  увеличиваются, усиливая неравенство  $\epsilon^*/T \ll 1$ . Легко проверить, что квантовые вклады при этом остаются значимыми только для среднего значения, которое соответствует ожидаемому истощению конденсата (квантовое истощение при этом вполне может превалировать над тепловым).

В условиях теплового режима флуктуаций первый кумулянт (математическое ожидание) и все старшие кумулянты (включая второй, связанный с дисперсией) формируются из вкладов отдельных квазичастиц по достаточно различающимся сценариям. Для математического ожи-

дания числа частиц вне конденсата вклады отдельных уровней спадают медленно с ростом соответствующих энергий. Таким образом, в главном порядке оно описывается выражением

$$\langle N_{\text{ex}} \rangle = \tilde{\kappa}_1 \simeq R \left( \frac{T}{\epsilon^*} \right)^{3/2} + \frac{\sqrt{2} \pi}{12} \left( \frac{g \langle N_0 \rangle / V}{\epsilon^*} \right)^{3/2}, \quad (7)$$

где множитель  $R$  равняется  $\pi^{3/2} \zeta(3/2)/8$  для близкого к идеальному газу ( $\zeta$  – дзета-функция Римана) и плавно убывает с ростом константы  $g$ , заметно снижаясь при переходе к области параметров, в которой второе слагаемое сопоставимо с первым или превышает его. Выражение (7) получается интегрированием по всем квазичастицам и оказывается независимым от наложенных граничных условий – эффективный вклад вносят так много возбужденных уровней, что изменение небольшой их группы не влияет на результат. В то же время для старших кумулянтов вклады отдельных квазичастиц быстро уменьшаются с ростом их энергий, так что результирующая величина кумулянта по порядку величины совпадает со вкладом одного уровня с низкой энергией. Соответственно в пределе большой системы,  $\epsilon^*/T \ll 1$ , величины рассматриваемых кумулянтов таковы:

$$\tilde{\kappa}_{m \geq 2} \simeq S_m \left( \frac{T}{\epsilon^*} \right)^m, \quad (8)$$

$$S_m = \frac{\Gamma(m)}{2} \sum_j \left[ \left( \frac{\epsilon_j^*}{\epsilon_j} \right)^m + \left( \frac{\epsilon_j^*}{\epsilon_j + 2\Delta_{jj}} \right)^m \right].$$

Здесь учтено, что для низкоэнергетичных квазичастиц, вносящих наибольший вклад во флуктуации, существенно экспоненциальное падение населенностей не проявляется, т. е. можно положить  $\exp(E_j/T) - 1 \simeq E_j/T$ . Выражения (8) совпадают с таковыми, определяющими главные порядки кумулянтов идеального газа, с точностью до переопределения коэффициентов  $S_m$  суммами  $\Gamma(m) \sum_j (\epsilon_j^*/\epsilon_j)^m$  по одночастичным состояниям ловушки с энергиями  $\epsilon_j$ .

Полученный закон масштабирования кумулянтов (8) обуславливает негауссов характер флуктуаций, так же как это происходит для случая идеального газа [4, 7]. Действительно, вводя вместо числа частиц вне конденсата  $N_{\text{ex}}$  случайную величину  $x = (N_{\text{ex}} - \langle N_{\text{ex}} \rangle) / \sigma$ , естественным образом центрированную и нормированную на стандартное отклонение  $\sigma$ , легко видеть, что соответствующие ей нормированные старшие кумулянты в пределе большой системы  $\epsilon^*/T \rightarrow 0$  не стремятся к нулю, а являются константами:  $\tilde{\kappa}_m^{(x)} = \tilde{\kappa}_m / \sigma^m \rightarrow S_m / S_2^{m/2}$ . Прямое вычисление показывает, что числа  $S_m$  зависят от наложенных на систему граничных условий, а значит, от граничных условий зависят и нормированные распределения вероятностей числа частиц в конденсате и вне него, а также главные порядки всех старших моментов этих распределений, начиная с дисперсии. Данное утверждение иллюстрирует рис. 1, согласно которому статистическое распределение числа частиц в конденсате при интенсивности взаимодействия, соответствующей  $L/\xi = 20$ , выглядит более широким и несимметричным для граничных условий, нарушающих однородность системы.

Интересно рассмотреть, как происходит эволюция исследуемой статистики при изменении интенсивности межчастичного взаимодействия. В случае однородной ловушки со всеми периодическими граничными условиями, для

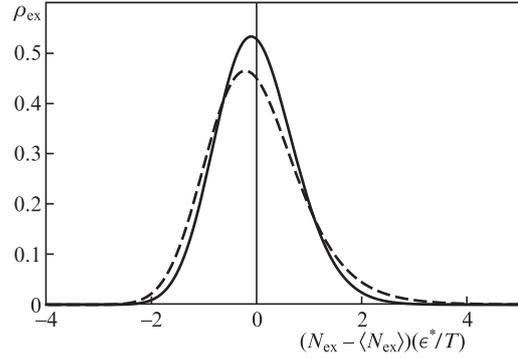


Рис.1. Вероятностные распределения полного числа частиц вне конденсата  $N_{\text{ex}}$  для однородной кубической ловушки со всеми периодическими граничными условиями (сплошная кривая) и нулевыми граничными условиями вдоль одного из направлений (штриховая кривая). Распределения центрированы на соответствующие средние значения и нормированы на характерный масштаб дисперсии  $T/\epsilon^* \gg 1$ , одинаковый для двух сравниваемых конфигураций ловушек. Расчёты проведены в термодинамическом пределе для теплового режима флуктуаций, межчастичное взаимодействие соответствует соотношению длины ловушки и длины экранировки  $L/\xi = 20$ .

которой энергии  $\{\epsilon_j\}$  не зависят от величины константы взаимодействия  $g$ , эта эволюция фактически сводится к эффекту сжатия флуктуаций, хорошо известному в квантовой оптике [15, 16] и обнаруженному применительно к статистике бозе-атомов в [12]. Этот эффект заключается в том, что с ростом константы взаимодействия  $g$  в выражениях (8) существенно уменьшаются слагаемые, содержащие в знаменателе интегралы перекрытия  $\Delta_{jj} \equiv g \langle N_0 \rangle \int f_j^* \phi^2 f_j d^3r$ . Как результат, старшие кумулянты (начиная со второго, определяющего дисперсию) падают, уменьшаясь при приближении к пределу Томаса–Ферми ( $L/\xi \gg 1$ ) до половины своих значений, подсчитанных в отсутствие взаимодействия.

В случае ловушки с нулевыми граничными условиями вдоль одной из осей эффект сжатия флуктуаций также присутствует, но не описывает поведения статистики полностью. Указанные граничные условия нарушают однородность системы, из-за чего существующие квазичастицы и их энергии оказываются зависящими от величины константы взаимодействия, определяющей волновую функцию конденсата. С усилением межчастичного рассеяния профиль плотности конденсата вдоль неоднородного направления становится все более плоским в центральной части ловушки и все более резко меняющимся в пограничной области. При этом энергии решений модифицированного уравнения Шредингера  $\{\epsilon_j\}$  понижаются, что делает возбужденные уровни системы более доступными, способствуя в свою очередь усилению флуктуаций и соответствующему увеличению кумулянтов (8) (подробно собственные решения проекции уравнения (5) на неоднородное направление с нулевыми граничными условиями описаны в [14]). Такой эффект перестройки квазичастиц противоположен по действию сжатию флуктуаций.

Совместное действие обоих рассмотренных эффектов иллюстрирует рис.2, на котором показана эволюция стандартного (среднеквадратичного) отклонения числа сконденсированных частиц. В режиме почти однородного газа стандартное отклонение уменьшается независимо от граничных условий в соответствии с эффектом сжатия флуктуаций. Однако с увеличением константы взаимодействия до величины, соответствующей  $L/\xi \simeq 3$ , конденсат

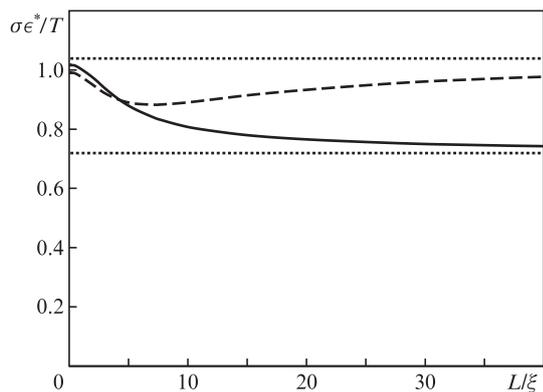


Рис.2. Зависимость среднеквадратичного отклонения числа частиц в конденсате  $\sigma$  от интенсивности межчастичного рассеяния для крупной трехмерной бозе-системы, статистика которой определена термальными факторами: случай всех периодических граничных условий (сплошная кривая) и нулевых граничных условий вдоль одного из направлений (штриховая кривая). Отклонение нормировано на свой естественный масштаб  $T/\epsilon^* \gg 1$ , межчастичное рассеяние характеризуется отношением длины ловушки  $L$  к длине экранировки  $\xi$ . Асимптотики, соответствующие пределу Томаса–Ферми  $L/\xi \gg 1$ , даны для каждого граничных условий пунктиром.

в неоднородной ловушке начинает существенно перестраиваться, что активизирует эффект перестройки квазичастиц. В области параметров  $L/\xi \approx 7$  он начинает преобладать над эффектом сжатия флуктуаций, из-за чего в неоднородной ловушке дисперсия с дальнейшим увеличением взаимодействия только растет (а не падает, как в случае полностью однородной системы) и стремится в пределе Томаса–Ферми к величине, превышающей величину дисперсии даже для идеального газа. Подобное поведение и аналогичные различия для рассматриваемых граничных условий демонстрируют и остальные старшие кумулянты.

Следует отметить, что для сравниваемых ловушек различия в статистике с усилением рассеяния только нарастают (конечно, при условии, что система остается в режиме тепловых флуктуаций). Максимальное различие достигается при приближении к пределу Томаса–Ферми, что может выглядеть несколько неожиданно, т. к. при этом конденсат наиболее эффективно экранирует внешний потенциал и его возмущения. В рамках же последовательного описания противоречие не возникает – информация об одночастичном спектре сохранена последовательным преобразованием от частиц к квазичастицам, диагонализующим гамильтониан системы, и затем обратно к исходным частицам, статистика которых анализируется.

Для удерживающих потенциалов более общего вида анализ статистики не так прост из-за нетривиальной структуры квазичастиц, приводящей к существованию более громоздкому представлению характеристической функции. Менее прозрачным оказывается и эффект перестройки квазичастиц, т. к. изменение интенсивности взаимодействия в общем случае может для каждой квазичастицы заметно менять состав входящих в нее мод модифицированного уравнения Шредингера (5). Для более сложных ловушек влияние граничных условий количественно может заметно отличаться от продемонстрированного в рассмотренном примере; заметно отличной может быть и за-

висимость статистики от интенсивности межчастичного рассеяния. Однако порядок величины эффектов граничных условий, не исчезающих в термодинамическом пределе, сохраняется.

### 3. Обсуждение результатов

Исследованный пример наглядно демонстрирует, что зависимость статистического распределения числа бозе-частиц в конденсате и вне него от граничных условий остается существенной и не подавляется при наличии межчастичного взаимодействия, даже достаточно сильного при приближении системы к асимптотике Томаса–Ферми. Указанная зависимость проявляется в главном порядке величины для дисперсии распределений и всех высших моментов и кумулянтов. Этот вывод может быть перенесен на случай ловушки, удерживающей бозе-газ в объеме произвольной формы, и, весьма вероятно, остается справедливым для любой трехмерной атомной ловушки с достаточно быстрорастущим одночастичным спектром.

Обсуждаемая нетривиальная особенность статистики должна учитываться для корректной интерпретации результатов экспериментов с бозе-системами, проводимых в близких к однородным ловушках, а также анализирующих флуктуации бозе-конденсата и любые другие характеристики бозе-газа, не сводимые к средним числам частиц в конденсате и вне него. Кроме того, проведенное исследование подсказывает идею эксперимента по прямому обнаружению влияния граничных условий на флуктуации конденсата – переключение граничных условий, подобное описанному для модельных ловушек, представляется реализуемым в лабораторных условиях, а необходимая точность измерений полагается достижимой в ближайшем будущем.

Публикуемые научные результаты получены при поддержке Российского научного фонда (проект 18-72-00225).

- Kristensen M.A., Christensen M.B., Gajdacz M., Igllicki M., Pawłowski K., Klempt C., Sherson J.F., Rażewski K., Hilliard A.J., Arlt J.J. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 163601 (2019).
- Lopes R., Eigen C., Navon N., Clément D., Smith R.P., Hadzibabic Z. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 190404 (2017).
- Holthaus M., Kapale K.T., Kocharovskiy V.V., Scully M.O. *Physica A*, **300**, 433 (2001).
- Tarasov S.V., Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.I. *Phys. Rev. A*, **90**, 033605 (2014).
- Chatterjee S., Diaconis P. *J. Phys. A*, **47**, 085201 (2014).
- Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.I. *Phys. Rev. A*, **81**, 033615 (2010).
- Tarasov S.V., Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.I. *J. Phys. A*, **47**, 415003 (2014).
- Tarasov S.V., Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.I. *Entropy*, **20**, 153 (2018).
- Pitaevskii L., Stringary S. *Bose–Einstein Condensation* (Oxford: Clarendon, 2003).
- Shi H., Griffin A. *Phys. Reports*, **304**, 1 (1998).
- Hutchinson D.A.W., Zaremba E., Griffin A. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 1842 (1997).
- Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.I., Scully M.O. *Phys. Rev. A*, **61**, 053606 (2000).
- Englert B.-G., Fulling S.A., Pilloff M.D. *Opt. Commun.*, **208**, 139 (2002).
- Tarasov S.V., Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.I. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **62**, 327 (2019).
- Шлях В.П. *Квантовая оптика в фазовом пространстве* (М.: Физматлит, 2005).
- Walls D.F., Milburn G.J. *Quantum Optics* (Berlin: Springer, 1994).