Лазерное охлаждение атомов на узких оптических переходах в полях с градиентом поляризации

Р.Я.Ильенков, О.Н.Прудников, А.В.Тайченачев, В.И.Юдин

Проведен анализ эффективности поляризационных механизмов лазерного охлаждения атомов с использованием узких оптических переходов, для которых энергия отдачи больше либо сравнима с естественной шириной линии. На примере атомов с оптическим переходом $J_g = 1 \to J_e = 2$ (J_g, J_e – полные угловые моменты основного и возбужденного состояний) в резонансных световых полях $\sigma_+ - \sigma_-$- и lin$\perp$lin-конфигураций выполнен анализ минимальных достижимых энергий лазерно-охлажденных атомов. Показано, что поляризационные механизмы лазерного охлаждения в условиях существенного влияния эффектов отдачи теряют эффективность и не приводят к средним кинетическим энергиям ансамбля атомов ниже доплеровского предела.

Ключевые слова: *лазерное охлаждение, часовые оптические переходы, эффект отдачи, оптические решетки.*

1. Введение

Лазер – мощный и совершенный инструмент для эффективного управления поступательными степенями свободы атомов. В настоящее время лазерное охлаждение стало областью науки на стыке лазерной физики и атомной оптики (см., напр., [1–3]), имеющей множество перспектив и приложений. Развитые методы лазерного охлаждения и холодные атомы находят широкое применение, в частности для получения конденсата Бозе–Эйнштейна нейтральных атомов [4, 5], в областях квантовой информатики [6], атомной нанолитографии [7] и интерферометрии [8]. Комбинация лазерного охлаждения и современных методов прецизионной спектроскопии позволяет создавать стандарты частоты и времени, относительная стабильность и точность которых достигает величин порядка 10^{-18} [9–11]. К настоящему времени разработаны различные методы локализации и охлаждения атомов (магнитооптические и дипольные ловушки, оптические решетки и т.д.), ставшие неотъемлемой частью современной фундаментальной и прикладной науки. Такой прогресс не был бы возможен без теоретического анализа и рассмотрения процессов, сопровождающих взаимодействие атомов с электромагнитным полем. Теоретическое описание с учетом многоуровневой структуры атома, вырождения уровней, спонтанного распада, эффекта отдачи и влияния поляризации поля представляет собой крайне сложную задачу. Начало ее решению было положено в 1970-х–1980-х годах исследованием самой простой системы: двухуровневого атома в резонансном световом поле [1, 2, 12–14]. Аналитическое исследование данной модели с помощью квазиклассического подхода (см., напр., [1, 2, 15–20]), рассматривающего охлаждение в терминах светоиндуцированных сил и их флуктуаций (диффузии в пространстве импульсов), позволило наглядно понять основные механизмы охлаждения. Однако квазиклассический подход описывает лишь те случаи, когда однофотонная частота отдачи $\omega_r = \hbar \boldsymbol{k}^2/(2M)$ (M – масса атома, $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор) мала по сравнению с естественной шириной линии охлаждающего перехода γ (т.е. параметр отдачи $\varepsilon_r = \omega_r/\gamma \ll 1$), и не пригоден для описания кинетики лазерного охлаждения атомов с использованием узких переходов, таких как интеркомбинационные переходы иттербия, магния, кальция, стронция [21–24].

Р.Я.Ильенков, О.Н.Прудников, А.В.Тайченачев. Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15Б; Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2;
e-mail: oleg.nsu@gmail.com
В.И.Юдин. Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15Б; Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; Новосибирский государственный технический университет, Россия, 630073 Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20

Поступила в редакцию 11 марта 2020 г., после доработки – 31 марта 2020 г.

Ранее нами был предложен эффективный метод [25–27], позволяющий найти численное стационарное решение квантового кинетического уравнения для атомной матрицы плотности в резонансном световом поле с учетом эффектов отдачи при взаимодействии атома с фотонами поля, содержащей полную информацию как о внутренних, так и о поступательных степенях свободы атомов. Например, данное решение дает возможность найти стационарные распределения по импульсам и координатам атомов, охлажденных лазерным полем двух встречных волн, а также значительно расширить область теоретического анализа лазерного охлаждения и, в частности, получить информацию о динамике [28] лазерного охлаждения атомов с использованием световых волн, резонансных узким оптическим переходам. Так, недавно в работе [24] нами было показано, что кинетика атомов с невырожденным по проекции углового момента основным состоянием, характеризующихся большим параметром отдачи $\varepsilon_r = \omega_r/\gamma \gtrsim 1$ (речь идет, например, об интеркомбинационных переходах $^1S_0 \to {}^3P_1$ атомов ^{88}Sr (ε_r = 0.635), ^{40}Ca (ε_r = 32.3), ^{24}Mg (ε_r = 1100)), может быть описана единым образом, что было сформулировано в виде «закона подобия» для лазерного охлаждения атомов с использованием узких оптических переходов. Также в данной работе показано, что оптимальное значение отстройки для эффективного охлаждения на узких оптических переходах отличается от оптимальной отстройки при доплеровском охлаждении и универсально выражается в единицах частоты отдачи.

Хорошо известно (см., напр., [15, 19]), что наличие дополнительных вкладов в диссипативную силу трения, возникающую из-за существования градиентов поляризации светового поля (градиент ориентации вектора поляризации в поле $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигурации, образованном встречными волнами с противоположными циркулярными поляризациями, или градиент эллиптичности вектора поляризации в поле lin⊥lin-конфигураций, образованном встречными волнами с ортогональными линейными поляризациями), приводит к возможности лазерного охлаждения атомов ниже доплеровского предела, определяемого температурой $T_{\rm D} \approx \hbar\gamma/(2k_{\rm B})$. Необходимо отметить, что полученные результаты соответствуют квазиклассическому описанию кинетики атомов и применимы для лазерного охлаждения атомов с использованием световых полей, которые резонансны замкнутым оптическим переходам, характеризующимся предельно малым параметром отдачи, $\varepsilon_{\rm r} \ll 1$. Возможность эффективного лазерного охлаждения атомов в монохроматическом поле с использованием узких оптических переходов, т.е. переходов с меньшим значением естественной ширины γ ($\varepsilon_{\rm r} > 1$), вызывала сомнение, поскольку в результате единичного поглощения фотона атом выходил из резонанса и переставал эффективно взаимодействовать с полем. В работе [24] было показано, что данная задача может быть решена умеренным увеличением интенсивности светового поля, что приводило к возможности эффективного охлаждения атомов в условиях полевого уширения. Тем не менее вопрос о влиянии поляризационных механизмов лазерного охлаждения в условиях $\varepsilon_{\rm r} > 1$ оставался открытым.

В настоящей работе мы исследуем возможности лазерного охлаждения в световых полях с градиентом поляризации, резонансных узкому оптическому переходу, т.е. в условиях существенного влияния эффектов отдачи на резонансный характер взаимодействия света с атомами. В качестве примера мы рассматриваем атомы с оптическим переходом $J_{\rm g} = 1 \to J_{\rm e} = 2$ ($J_{\rm g}$ и $J_{\rm e}$ – полные угловые моменты основного и возбужденного состояний), допускающим возникновение субдоплеровских механизмов лазерного охлаждения как в поле lin⊥lin-, так и в поле $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигурации. Выполнен сравнительный анализ использования данных поляризационных конфигураций световых полей для глубокого лазерного охлаждения, а также проведено сравнение с результатами, полученными для двухуровневой модели атома.

2. Постановка задачи

Рассмотрим одномерное движение атомов (вдоль оси z) с замкнутым оптическим переходом $J_{\rm g} = 1 \to J_{\rm e} = 2$ в резонансном монохроматическом поле, образованном встречными световыми волнами равной интенсивности,

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0[\boldsymbol{e}_1\exp(\mathrm{i}kz) + \boldsymbol{e}_2\exp(-\mathrm{i}kz)]\exp(-\mathrm{i}\omega t) + \mathrm{c.c.}, \quad (1)$$

где E_0 – комплексная амплитуда световых волн; ω – частота; $k = \omega/c$. Поляризации встречных волн $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{e}_n = \sum_{q=0,\pm1} e_n^{(q)}\boldsymbol{e}_q, \quad n = 1, 2, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{e}_\pm = \mp(\boldsymbol{e}_x \pm \mathrm{i}\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$ и $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z$ – единичные векторы в циклическом базисе. Отметим, что компоненты $e_n^{(0)} = 0$ в силу ортогональности векторов $\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{k}$. В частности, встречные волны с ортогональными поляризациями образуют хорошо известные конфигурации световых полей:

1) lin⊥lin – конфигурация светового поля, образованная встречными волнами с ортогональными линейными поляризациями (например $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$);

2) $\sigma_+ - \sigma_-$ – конфигурация светового поля, образованная встречными волнами с ортогональными круговыми поляризацими $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_-$.

Эволюция ансамбля атомов с малой концентрацией, когда межатомным взаимодействием можно пренебречь, определяется квантовым кинетическим уравнением для атомной матрицы плотности

$$\frac{\mathrm{d}\hat\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat H, \hat\rho] + \hat\Gamma\{\hat\rho\}, \quad (3)$$

где $\hat H$ – гамильтониан, а $\hat\Gamma\{\hat\rho\}$ описывает спонтанную релаксацию атомных уровней.

Гамильтониан атома $\hat H$ представим в виде суммы вкладов:

$$\hat H = \frac{\hat p^2}{2M} + \hat H_0 + \hat V, \quad (4)$$

где первое слагаемое – оператор кинетической энергии; второе слагаемое $\hat H_0 = -\hbar\delta\hat P_{\rm e}$ – гамильтониан свободного атома в базисе вращающейся волны; $\delta = \omega - \omega_0$ – отстройка оптической частоты поля ω от частоты атомного перехода ω_0;

$$\hat P_{\rm e} = \sum_\mu |J_{\rm e},\mu\rangle\langle J_{\rm e},\mu| \quad (5)$$

– оператор проекций на уровни возбужденного состояния $|J_{\rm e},\mu\rangle$, характеризующегося полным угловым моментом $J_{\rm e}$ и проекцией углового момента μ на ось квантования; последнее слагаемое $\hat V$ описывает взаимодействие атома с полем (1). В электродипольном приближении и в приближении вращающейся волны оператор взаимодействия принимает вид

$$\hat V = -[\langle \mathrm{e}\|d\|\mathrm{g}\rangle(\hat{\boldsymbol{D}}\hat{\boldsymbol{E}}) + \mathrm{h.c.}], \quad (6)$$

где $\langle \mathrm{e}\|d\|\mathrm{g}\rangle$ – приведенный дипольный момент оптического перехода, а циклические компоненты оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ выражаются через коэффициенты Клебша – Гордана:

$$\hat D_q = \sum_{\mu,m} C^{J_{\rm e},\mu}_{J_{\rm g},m;1,q}|J_{\rm e},\mu\rangle\langle J_{\rm g},m|, \quad q = 0, \pm1, \quad (7)$$

и определяют матричные элементы оператора взаимодействия магнитных подуровней. Соответственно оператор взаимодействия (6) может быть записан в виде

$$\hat V = \Omega_0 \sum_{q=0,\pm1} \hat D_q e_1^{(q)}\exp(\mathrm{i}kz) + \Omega_0 \sum_{q=0,\pm1} \hat D_q e_2^{(q)}\exp(-\mathrm{i}kz) + \mathrm{h.c.}, \quad (8)$$

где $\Omega_0 = -\langle \mathrm{e}\|d\|\mathrm{g}\rangle E_0/\hbar$ – частота Раби для каждой из встречных волн. Схема спонтанных и вынужденных переходов для атомов с замкнутым оптическим переходом приведена на рис.1.

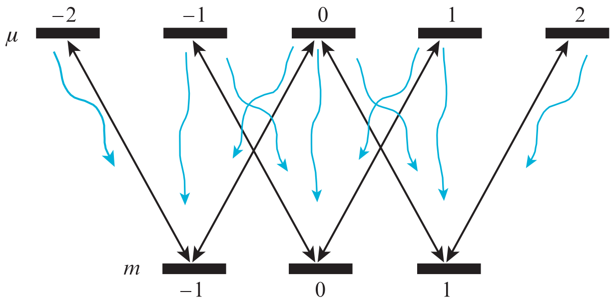

Рис.1. Схема спонтанных (волнистые стрелки) и индуцированных (прямые стрелки) переходов между магнитными подуровнями атома μ (возбужденного состояния) и m (основного состояния) для атомов с замкнутым оптическим переходом $J_{\rm g}=1\to J_{\rm e}=2$, взаимодействующих с полем электромагнитной волны (1).

Негамильтонова добавка $\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}$ в уравнении для матрицы плотности описывает релаксацию возбужденного состояния, вырожденного по проекции углового момента. В общем виде с учетом эффектов отдачи оператор релаксации в результате спонтанного излучения фотонов имеет вид

$$\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\} = -\frac{\gamma}{2}(\hat{P}_{\rm e}\hat{\rho}+\hat{\rho}\hat{P}_{\rm e})+\hat{\gamma}\{\hat{\rho}\},$$

$$\hat{\gamma}\{\hat{\rho}\} = \frac{3}{2}\gamma\Big\langle\sum_{\zeta=1,2}(\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{e}'_{\zeta}(\boldsymbol{k}))^{+}\exp(-\,\mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\rho}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{\boldsymbol{r}}) \qquad (9)$$

$$\times\ (\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{e}'_{\zeta}(\boldsymbol{k}))\Big\rangle_{\Omega_k}.$$

Символ $\langle\ldots\rangle_{\Omega_k}$ означает усреднение по всем направлениям Ω_k излучения спонтанных фотонов, а $\boldsymbol{e}'_{\zeta}$ – вектор поляризации спонтанных фотонов ($\zeta=1,2$).

Решение квантового кинетического уравнения (3) для атомной матрицы плотности – достаточно сложная и трудоемкая задача, требующая использования различных приближений. В работах [25–27] нами был предложен эффективный метод, позволяющий найти численное стационарное решение уравнения для атомной матрицы плотности в резонансном световом поле с учетом эффектов отдачи при взаимодействии с фотонами поля, содержащей полную информацию как о внутренних, так и о поступательных степенях свободы атомов. Метод заключается в том, что уравнение для атомной матрицы плотности разбивается на систему уравнений для ее пространственных гармоник. После выделения рекуррентной связи между пространственными гармониками система уравнений может быть решена с помощью метода цепных дробей. Мы воспользуемся данным методом для анализа минимально достижимых кинетических энергий атомного ансамбля в условиях лазерного охлаждения в полях $\sigma_+-\sigma_-$- и lin⊥lin-конфигураций.

3. Охлаждение атомов в полях lin⊥lin и $\sigma_+-\sigma_-$-конфигураций

Стационарное решение квантового кинетического уравнения (3) для атомной матрицы плотности определяется следующими основными параметрами задачи: отстройкой светового поля от атомного резонанса δ; амплитудой, или интенсивностью светового поля (частотой Раби Ω_0); параметром отдачи $\varepsilon_{\rm r}$; поляризационной конфигурацией светового поля и типом оптического перехода $J_{\rm g}\to J_{\rm e}$ (угловыми моментами основного и возбужденного состояний).

Как уже было отмечено выше, для анализа поляризационных эффектов лазерного охлаждения мы рассмотрим атом с оптическим переходом $J_{\rm g}=1\to J_{\rm e}=2$, допускающим проявление субдоплеровских механизмов лазерного охлаждения как в поле lin⊥lin-, так и в поле $\sigma_+-\sigma_-$-конфигурации, что позволит провести сравнительный анализ. Также вместо параметра интенсивности мы будем использовать безразмерный параметр $U_0=4\Omega_0^2|\delta|/[3\omega_{\rm r}(\delta^2+1/4)]$, характеризующий оптический сдвиг уровней в световом поле. Выбор данного параметра обусловлен тем, что в пределе малых параметров отдачи ($\varepsilon_{\rm r}\ll 1$) и при достаточно больших отстройках он является универсальным для определения стационарного состояния атомного ансамбля в световом поле [27, 29].

На рис.2 и 3 показаны зависимости от параметра U_0 средней кинетической энергии холодных атомов в полях lin⊥lin- и $\sigma_+-\sigma_-$-конфигураций соответственно для различных параметров отдачи. В дополнение к результатам для атомов с оптическим переходом $J_{\rm g}=1\to J_{\rm e}=2$ мы приводим результаты для атомов с невырожденным основным состоянием, с оптическим переходом $J_{\rm g}=0\to J_{\rm e}=1$, для которого субдоплеровские механизмы лазерного охлаждения не возникают.

Во-первых, отметим, что из-за существенно неравновесного распределения атомов по импульсам в световом поле [30, 31] состояние атомного ансамбля не может быть определено в терминах температуры. Для качественной оценки лазерного охлаждения атомов используем среднюю кинетическую энергию атомного ансамбля. Отметим также идентичность зависимостей от параметра U_0 кинетической энергии холодных атомов с оптическим переходом $J_{\rm g}=0\to J_{\rm e}=1$ для различных параметров отдачи на рис.2,*а* и *б* в поле lin⊥lin-конфигурации и на рис.3,*а* и *б* в поле $\sigma_+-\sigma_-$-конфигурации. Для атомов с оптическим переходом $J_{\rm g}=0\to J_{\rm e}=1$ основное состояние является невырожденным, что приводит к результатам, идентичным результатам для двухуровневой модели атома [32]. Эквивалентность результатов при различных параметрах отдачи является следствием закона подобия для лазерного охлаждения атомов с использованием узких оптических переходов [24]. Здесь минимальная средняя кинетическая энергия ансамбля атомов $E_{\rm kin}$ достигается в слабых оптических полях при отстройке $\delta=-3\omega_{\rm r}$ и составляет $\sim 0.5\hbar\omega_{\rm r}$. В более сильных полях энергия растет, а оптимальная отстройка сдвигается в красную область.

Вырожденность основного состояния, приводящая к появлению субдоплеровских механизмов трения в квазиклассическом пределе $\varepsilon_{\rm r}\ll 1$, не приводит к заметным отличиям от результатов для двухуровневой модели при $\varepsilon_{\rm r}\geqslant 1$, т.е. в условиях существенного влияния эффектов отдачи (ср. зависимости для атомов с оптическими переходами $J_{\rm g}=0\to J_{\rm e}=1$ и $J_{\rm g}=1\to J_{\rm e}=2$ на рис.2,*а* и *в*, *б* и *г*). Различие в зависимостях на рис.2,*а* и *в*, а также на рис.2,*б* и *г* сводится лишь к перенормировке параметра U_0 на множитель, зависящий от угловых моментов энергетических уровней основного и возбужденного состояний $J_{\rm g}$ и $J_{\rm e}$. Также подтверждается выполнение закона подобия для атомов с вырожденными по проекции углового момента уровнями в поле lin⊥lin-конфигурации.

На рис.3 приведены зависимости средней кинетической энергии холодных атомов от параметра U_0 в условиях лазерного охлаждения в поле $\sigma_+-\sigma_-$-конфигурации. На рис.3,*а* и *б* представлены зависимости для атомов с оптическим переходом $J_{\rm g}=0\to J_{\rm e}=1$, которые соответствуют

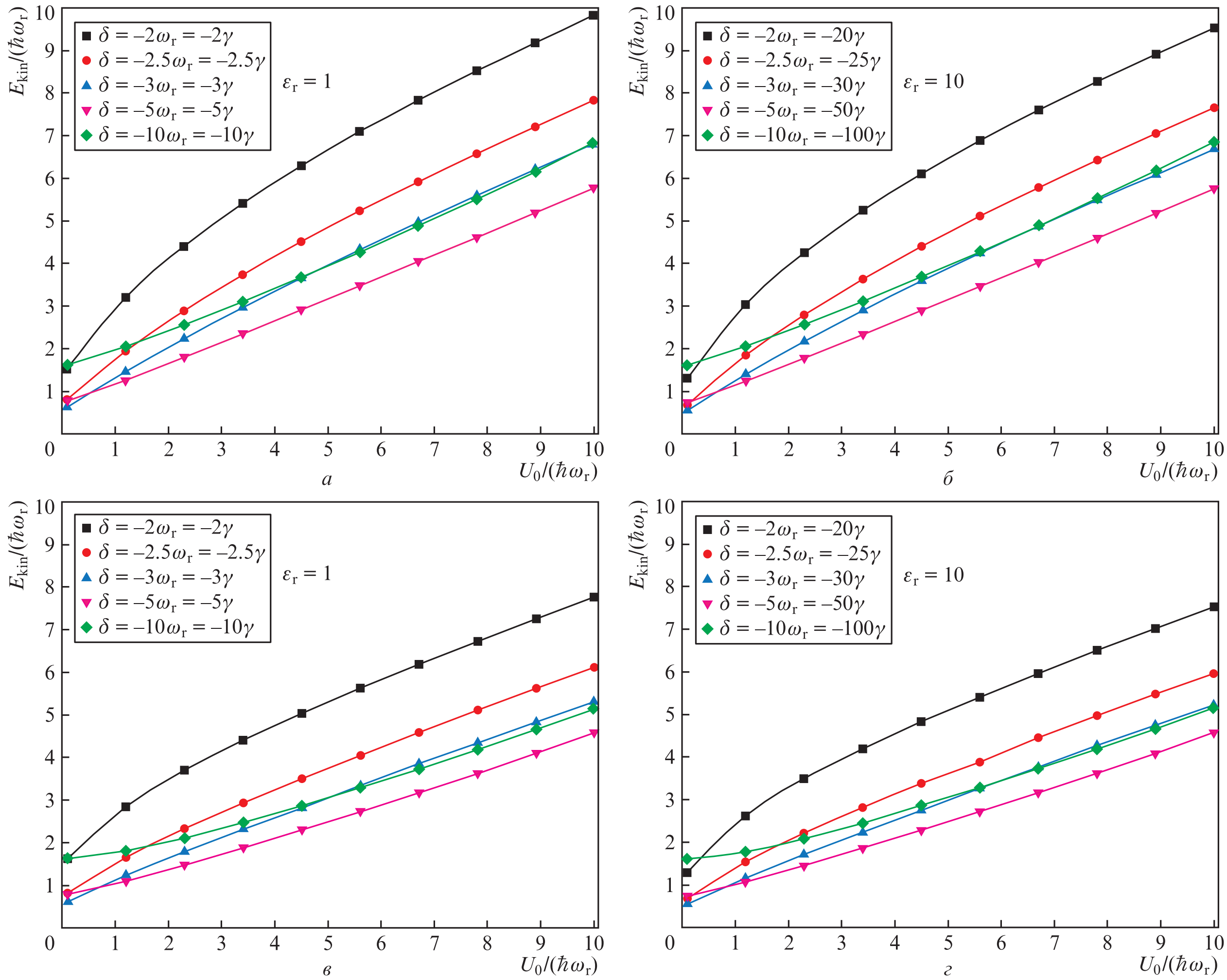

Рис.2. Средняя кинетическая энергия E_{kin} холодных атомов в поле lin⊥lin-конфигурации в зависимости от параметра полевого сдвига U_0 при различных отстройках светового поля δ для перехода $J_g = 0 \to J_e = 1$, $\varepsilon_r = 1$ (*а*), перехода $J_g = 0 \to J_e = 1$, $\varepsilon_r = 10$ (*б*), перехода $J_g = 1 \to J_e = 2$, $\varepsilon_r = 1$ (*в*) и перехода $J_g = 1 \to J_e = 2$, $\varepsilon_r = 10$ (*г*).

результатам для двухуровневой модели и совпадают с зависимостями на рис.2,*а* и *б*. Влияние поляризационных эффектов лазерного охлаждения в поле $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигурации продемонстрировано на рис.3,*в* и *г*. В пределе малой интенсивности поля лазерное охлаждение атомов с вырожденным по проекции углового момента основным состоянием в поле $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигурации приводит к несколько бóльшим значениям кинетической энергии $E_{kin} \approx \hbar\omega_r$ (минимальные значения достигаются при отстройке $\delta = -5\omega_r$), чем для двухуровневой модели ($E_{kin} \approx 0.5\hbar\omega_r$, $\delta = -3\omega_r$). При меньших по модулю отстройках поляризационные механизмы лазерного охлаждения в поле $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигурации приводят к существенно бóльшим кинетическим энергиям атомов. Отметим также эквивалентность результатов для атомов с различными параметрами отдачи $\varepsilon_r \geqslant 1$ при отстройках $\delta < -2\omega_r$.

4. Заключение

Проведен анализ лазерного охлаждения нейтральных атомов с использованием узких оптических переходов ($\varepsilon_r \geqslant 1$) с вырожденными по проекции углового момента уровнями в полях lin⊥lin- и $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигураций с неоднородными поляризациями. Показано, что поляризационные механизмы, допускающие охлаждение ниже доплеровского предела, при использовании узких оптических переходов становятся менее эффективными. Более того, использование поля $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигурации приводит к бóльшим значениям кинетической энергии холодных атомов в пределе малых интенсивностей светового поля. Результаты, полученные для средней кинетической энергии холодных атомов в поле lin⊥lin-конфигурации, эквивалентны результатам, полученным в рамках двухуровневой модели, т. е. без учета поляризационных механизмов лазерного охлаждения. Из этого следует, что для наиболее эффективного лазерного охлаждения атомов с оптическими переходами $J_g \to J_e$, т. е. с переходами, где возможны поляризационые механизмы субдоплеровского лазерного охлаждения в квазиклассическом пределе, при использовании узких переходов для достижения наименьших кинетических энергий атомного ансамбля следует использовать конфигурацию световых полей lin⊥lin либо конфигурацию поля с однородной поляризацией, в которой задача становится эквивалентна двухуровневой модели атома.

Работа поддержана грантом РФФИ №19-29-11014. Работа О.Н.Прудникова по развитию численных методов моделирования поддержана грантом РНФ №20-12-00081, работа Р.Я.Ильенкова по численному анализу кинетики атомов – грантом РФФИ №19-02-00514, а работа В.И.Юдина – грантом РФФИ №20-02-00505.

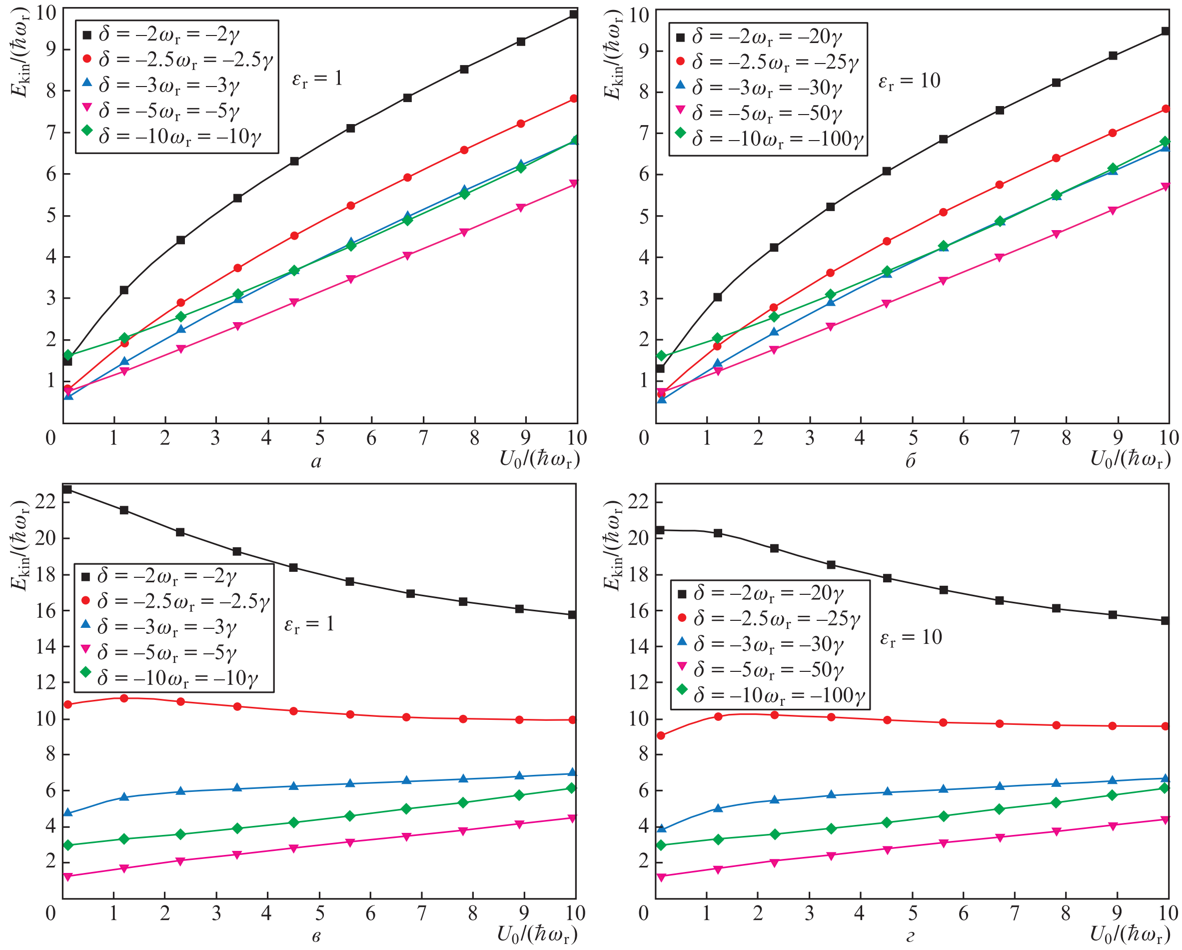

Рис.3. Средняя кинетическая энергия E_{kin} холодных атомов в поле $\sigma_+ - \sigma_-$-конфигурации в зависимости от параметра полевого сдвига U_0 при различных отстройках светового поля δ для перехода $J_g = 0 \to J_e = 1$, $\varepsilon_r = 1$ (*а*), перехода $J_g = 0 \to J_e = 1$, $\varepsilon_r = 10$ (*б*), перехода $J_g = 1 \to J_e = 2$, $\varepsilon_r = 1$ (*в*) и перехода $J_g = 1 \to J_e = 2$, $\varepsilon_r = 10$ (*г*).

1. Миногин В.Г., Летохов В.С. *Давление лазерного излучения на атомы* (М.: Наука, 1986).
2. Казанцев А.П., Сурдутович Г.И., Яковлев В.П. *Механическое действие света на атомы* (М.: Наука, 1991).
3. Cohen-Tannoudji C. *Atomic Motion in Laser Light* (Paris, 1992).
4. Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E., Cornell E.A. *Science*, **269**, 198 (1995).
5. Davis K.B., Mewes M.-O., Andrews M.R., van Druten N.J., Durfee D.S., Kurn D.M., Ketterle W. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3969 (1995).
6. Noguchi A., Eto Y., Ueda M., Kozuma M. *Phys. Rev. A*, **84**, 030301 (2011).
7. Fischer J., Wegener M. *Laser Photon. Rev.*, **7**, 22 (2013).
8. Müller H., Chiow S., Herrmann S., Chu S., Chung K. *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 031101 (2008).
9. Bothwel T., Kedar D., Oelker E., Robinson J.M., Bromley S.L., Tew W.L., Ye J., Kennedy C.J. *Metrologia*, **56** (6), 065004 (2019).
10. Brewer S.M., Chen J.-S., Hankin A.M., Clements E.R., Chou C.W., Wineland D.J., Hume D.B., Leibrandt D.R. *Phys. Rev. Lett.*, **123**, 033201 (2019).
11. McGrew W.F., Zhang X., Fasano R.J., Schäffer S.A., Beloy K., Nicolodi D., Brown R.C., Hinkley N., Milani G., Schioppo M., Yoon T.H., Ludlow A.D. *Nature*, **564**, 87 (2018).
12. Dalibard J., Cohen-Tannoudji C. *J. Opt. Soc. Am. B*, **2** (11), 1707 (1985).
13. Cook R.J. *Phys. Rev. A*, **20** (1), 224 (1979).
14. Gordon J.P., Ashkin A. *Phys. Rev. A*, **21** (5), 1606 (1980).
15. Metcalf H.J., van der Straten P. *Laser Cooling and Trapping* (New York: Springer-Verlag, 1999).
16. Dalibard J., Cohen-Tannoudji C. *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **18**, 1661 (1985).
17. Javanainen J. *Phys. Rev. A*, **44**, 5857 (1991).
18. Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **115**, 791 (1999) [*JETP*, **88**, 433 (1999)].
19. Безвербный А.В., Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **123**, 437 (2003) [*JETP*, **96**, 383 (2003)].
20. Prudnikov O.N., Arimondo E. *J. Opt. B: Quantum Semiclas. Opt.*, **6**, 336 (2004).
21. Barber Z.W., Stalnaker J.E., Lemke N.D., Poli N., Oates C.W., Fortier T.M., Diddams S.A., Hollberg L., Hoyt C.W., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 103002 (2008).
22. Poli N., Barber Z.W., Lemke N.D., Oates C.W., Ma L.S., Stalnaker J.E., Fortier T.M., Diddams S.A., Hollberg L., Bergquist J.C., Brusch A., Jefferts S., Heavner T., Parker T. *Phys. Rev. A*, **77**, 050501 (2008).
23. Poli N., Drullinger R.E., Ferrari G., Léonard J., Sorrentino F., Tino G.M. *Phys. Rev. A*, **71**, 061403 (2005).
24. Prudnikov O.N., Il'enkov R.Ya., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *Phys. Rev. A*, **99**, 0234272019 (2019).
25. Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **133**, 963 (2008) [*JETP*, **106**, 839 (2008)].
26. Prudnikov O.N., Taichenachev A.V., Tumaikin A.M., Yudin V.I. *Phys. Rev. A*, **75**, 023413 (2007).
27. Прудников О.Н., Ильенков Р.Я., Тайченачев А.В., Тумайкин А.М., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **139**, 1074 (2011) [*JETP*, **112**, 939 (2011)].
28. Ильенков Р.Я., Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Юдин В.И. *ЖЭТФ*, **150**, 5 (2016) [*JETP*, **123**, 1 (2016)].
29. Castin Y., Dalibard J. *Europhys. Lett.*, **14**, 761 (1991).
30. Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Юдин В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **102**, 660 (2015) [*JETP Lett.*, **102**, 576 (2015)].
31. Kalganova E., Prudnikov O., Vishnyakova G., Golovizin A., Tregubov D., Sukachev D., Khabarova K., Sorokin V., Kolachevsky N. *Phys. Rev. A*, **96**, 033418 (2017).
32. Prudnikov O.N., Il'enkov R.Ya., Taichenachev A.V., Yudin V.I. *AIP Conf. Proc.*, **2098**, 020013 (2019).