О структуре хаотического клубка квантовых вихрей в турбулентных сверхтекучих жидкостях и в конденсате Бозе–Эйнштейна

С.К.Немировский

На основе теории, описывающей термодинамическое равновесие в системе квантовых вихрей в сверхтекучих жидкостях и в конденсате Бозе–Эйнштейна в присутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент, исследована задача о структуре хаотического клубка квантовых вихрей в турбулентных сверхтекучих жидкостях. С помощью метода характеристического функционала изучены свойства гидродинамических вихревых нитей. Показано, что средняя кривизна вихревых линий составляет величину порядка межвихревого расстояния, причем коэффициент пропорциональности не зависит от скорости противотока. Установлено, что степень анизотропии вихревых петель также не зависит от приложенной скорости противотока. Полученные результаты объясняют происхождение анизотропии и связи кривизны линий с межвихревым пространством и их зависимость от параметров задачи.

Ключевые слова: *бозе-эйнштейновский конденсат, квантовые вихри, сверхтекучая турбулентность, топологические дефекты.*

1. Введение

Интерес к термодинамически равновесным квантовым вихрям обусловлен несколькими причинами. Прежде всего, термодинамические (создаваемые тепловыми флуктуациями) квантовые вихри определяют многие физические особенности квантовых жидкостей, такие как фазовый переход или кинетические свойства (см., напр., [1]). В этом смысле изучаемая проблема имеет самостоятельный интерес.

Другая мотивация связана с теорией квантовой турбулентности, а именно с задачей о стохастической динамике квантовых вихревых нитей в текущих (и противотекущих) сверхтекучих жидкостях и в конденсате Бозе–Эйнштейна. Теория квантовой турбулентности, инициированная работами Фейнмана [2] и Онзагера [3], всегда привлекала пристальное внимание физиков. Важные этапы исследований квантовой турбулентности – создание макроскопической теории (Вайнен [4]), а также первая численная работа (Шварц [5]), в которой были получены различные характеристики вихревого клубка. В настоящее время теория квантовой турбулентности является активно развивающейся дисциплиной, имеющей большое число приложений в различных областях физики, начиная от исследований ультрахолодных атомов и тяжелых ионов до классической турбулентности и физики нейтронных звезд. Примером могут служить теория классической турбулентности [6], теория космических струн [7], теория дислокаций в твердых телах [8], а также теория фазовых переходов [1]. Концепция квантовой турбулентности используется также в исследованиях кварк-глюонной плазмы [9] и нейтронных звезд [10]. Отметим две недавние международные конференции, где обсуждалась совокупность перечисленных выше проблем – INT Program INT-19-1a «Quantum Turbulence: Cold Atoms, Heavy Ions, and Neutron Stars» (Seattle, USA, 2019), http://www.int.washington.edu/PROGRAMS/19-1a/ и «Turbulence of all kinds» (Osaka City University, 2020), https://sites.google.com/view/toak2.

Квантовая турбулентность в конденсате Бозе – Эйнштейна обычно изучается на основе исследования макроскопической волновой функции, подчиняющейся нелинейному уравнению Шредингера. Исследования динамики ультрахолодных атомов, как теоретические, так и экспериментальные, весьма многочисленны (см., напр., [11–14]).

Основная часть наших представлений о структуре и динамике вихревых клубков получена из эксперимента и прямого численного моделирования. Теоретические исследования сильно отстают. Конечно, такая ситуация неудовлетворительна для теоретиков, но это в равной степени неудовлетворительно и в целом. Действительно, чтобы сделать более эффективными и надежными численные исследования и экспериментальные измерения, очевидно, требуется поддержка и новые идеи на основе аналитических исследований. Отсутствие последовательной теории связано, во-первых, с необыкновенной сложностью задачи и, во-вторых, с тем обстоятельством, что для описания динамики вихрей используется феноменологический подход, и многие элементы эволюции, например перезамыкание (реконнекция) нитей, носят искусственный характер (см. обзор [15]). Таким образом, существует необходимость в каком-то частном подходе к общей проблеме. Важным вариантом этого подхода является изучение термодинамического равновесия в системе квантовых вихрей в случае противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Как показано ранее, эта задача имеет аналитическое решение (см. работу [16] и приведенные в ней ссылки), поэтому есть основания прояснить многие аспекты структуры и динамики.

С.К.Немировский. Институт теплофизики им. С.С.Кутателадзе СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 1; e-mail: nemir@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 11 марта 2020 г., после доработки – 2 апреля 2020 г.

В настоящей работе исследована задача о структуре термодинамически равновесного хаотического клубка квантовых вихревых нитей в сверхтекучих жидкостях и в конденсате Бозе–Эйнштейна в присутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент. На основе определенного ранее распределения Гиббса с помощью метода характеристического функционала получены результаты, касающиеся структуры вихревого клубка. В частности, вычислены средняя кривизна вихревых линий, а также коэффициент анизотропии вихревого клубка. Результаты сравниваются с аналогичными данными, полученными для случая квантовой турбулентности.

2. Квантовая турбулентность, свойства вихревого клубка

Термин квантовая турбулентность был введен Фейнманом в его основополагающем труде [2] (см. также [4]). Он описал это явление как возникновение в HeII неупорядоченного набора квантовых вихревых линий или вихревого клубка, который оказывает сопротивление потоку нормальной компоненты, переносящему энтропию. Вихревые нити – это одномерные особенности, вокруг которых возможно круговое движение сверхтекучей компоненты, имеющей скорость $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$, с квантованной циркуляцией $\int \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \mathrm{d}\boldsymbol{l} = n\kappa$. Вихревую нить можно описать в параметрическом виде функцией $\boldsymbol{s}(\xi, t)$, где $\boldsymbol{s}$ – радиусы-векторы точек линии, а параметр ξ «пересчитывает» точки линии, часто величина ξ является параметром длины дуги. Набор линий $\{\boldsymbol{s}(\xi_j, t)\}$ (j – номер петли) эволюционирует, подчиняясь уравнениям движения и граничным условиям. Индекс j нумерует вихревые петли. Иногда мы для краткости вихревую конфигурацию будем обозначать как $\boldsymbol{s}(\xi)$, подразумевая объединение всех петель, $\boldsymbol{s}(\xi) = \cup_j \boldsymbol{s}_j(\xi_j)$, входящих в вихревой клубок. Для получения представления о физике квантовой турбулентности и структуре вихревого клубка мы отсылаем читателей к нашей обзорной статье [15].

Приведем несколько результатов (численных и экспериментальных [5, 17]), касающихся структуры вихревого клубка. Один из самых общепризнанных результатов состоит в том, что плотность вихревых линий L (общая длина нитей на единицу объема) пропорциональна квадрату разности скоростей нормальной ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}$) и сверхтекучей ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$) компонент $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}$ (или скорости противотока):

$$L = \gamma^2 v_{\mathrm{ns}}^2, \tag{1}$$

где $\gamma = \gamma(t)$ – некоторая, зависящая от температуры функция.

Другой пример касается средней кривизны вихревых линий R^{-1}. Величина R имеет порядок межвихревого расстояния $\delta = L^{-1/2}$:

$$1/R^2 = \langle \boldsymbol{s}_j''(\xi_j)\, \boldsymbol{s}_j''(\xi_j) \rangle = c_2^2(T) L, \tag{2}$$

где штрихи означают производные по ξ. В диапазоне температур $1\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 2\mathrm{K}$ (обычный интервал при численных исследованиях квантовой турбулентности) коэффициент $c_2(T)$ меняется от 3.5 до единицы. Следовательно, для небольших температур, при которых взаимодействие вихрей с нормальной компонентой является слабым, вихревые линии сильнее «изломаны». Примечательно, что $c_2(T)$ не зависит от приложенной скорости $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}$.

Далее при численном моделировании и в эксперименте была обнаружена анизотропия вихревых нитей по отношению к вектору $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}$, направленному вдоль оси z:

$$\langle \boldsymbol{s}_x'(\xi_j)\, \boldsymbol{s}_x'(\xi_j) \rangle = I_{xx}, \quad \langle \boldsymbol{s}_y'(\xi_j)\, \boldsymbol{s}_y'(\xi_j) \rangle = I_{yy},$$
$$\langle \boldsymbol{s}_z'(\xi_j)\, \boldsymbol{s}_z'(\xi_j) \rangle = I_{zz}. \tag{3}$$

Несмотря на огромное число работ по квантовой турбулентности, до сих пор нет исследований, в которых соотношения (1)–(3) были бы получены на основе какой-либо последовательной теории. Происхождение и физический смысл этих соотношений неясны. Является загадочным тот факт, что параметры I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, характеризующие анизотропию, не зависят от величины приложенной скорости противотока $\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}$, хотя источником анизотропии является именно наличие противотока.

Последовательно продолжая нашу линию, мы ставим цель исследовать задачу о структуре вихревого клубка для термодинамических равновесных вихревых нитей. В работах автора [18, 19] на основе ланжевеновского подхода было продемонстрировано существование термодинамического равновесия ансамбля вихревых нитей в покоящемся сверхтекучем гелии, а также в присутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Изложим кратко основные результаты. На основе ланжевеновского подхода для динамики вихревых нитей показано, что соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет решение в виде распределения Гиббса для функционала распределения вероятностей:

$$P(\{\boldsymbol{s}(\xi)\, t) = N \exp\left[-\frac{E(\{s\}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}})}{k_{\mathrm{B}} T}\right], \tag{4}$$

где N – нормировочный множитель. Энергия $E(\{\boldsymbol{s}\})$ и импульс Лэмба $\boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{s}\})$ определены как интегралы вдоль линии (см., напр., [20]):

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{s}) &= \frac{\rho_{\mathrm{s}} \kappa^2}{8\pi} \int\!\!\int \frac{\boldsymbol{s}'(\xi)\boldsymbol{s}'(\xi')}{|\boldsymbol{s}(\xi) - \boldsymbol{s}'(\xi')|} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\xi', \\ \boldsymbol{P} &= \frac{\rho_{\mathrm{s}} \kappa}{2} \int \boldsymbol{s}(\xi) \times \boldsymbol{s}'(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь ρ_{s} – плотность сверхтекучей компоненты; κ – квант циркуляции.

В предыдущей работе автора [16] на основе распределения Гиббса (4) была построена статистическая сумма, соответствующая распределению Гиббса, и вычислена плотность вихревых нитей L. Полученный результат совпадает с наблюдаемой в эксперименте зависимостью (1). Отметим, что величина L связана с параметрами задачи следующим образом:

$$L = f(T) \frac{\kappa^2}{\varepsilon_{\mathrm{v}}^2} \rho_{\mathrm{s}}^2 v_{\mathrm{ns}}^2, \tag{6}$$

где $f(T)$ – функция температуры порядка единицы; ε_{v} – энергия единицы длины нити в локальном приближении [16].

3. Характеристический функционал

Для вычисления структурных характеристик (2), (3) вихревого клубка нам потребуется один инструмент, часто используемый в статистических задачах, так называемый характеристический функционал (см., напр., [21]). Для набора хаотических вихревых линий данный подход был предложен Мигдалом [22, 23]. Следуя этим работам, мы определяем характеристический функционал $W(\{\boldsymbol{P}_j(\xi_j)\})$ как среднее:

$$W(\{\boldsymbol{P}j(\xi j)\}) = \left\langle \exp\left[\mathrm{i}\int_0^l \boldsymbol{P}(\xi)\boldsymbol{s}'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\right\rangle.$$

Усреднение может быть выполнено с помощью функционала распределения вероятностей (4) через интеграл по траекториям:

$$W(\{\boldsymbol{P}_j(\xi_j)\}) = \int \mathrm{D}\boldsymbol{s}(\xi_j)\,P(\boldsymbol{s}(\xi_j))\exp\left[\mathrm{i}\int_0^l \boldsymbol{P}(\xi)\boldsymbol{s}'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]. \quad (7)$$

Характеристический функционал (7) позволяет вычислить среднее любой величины, зависящей от конфигурации вихревых линий, простым функциональным дифференцированием. Например, средний вектор касательной $\langle \boldsymbol{s}'_{j\alpha}(\xi_j)\rangle$ или корреляционная функция тангенциальных векторов различных элементов вихревой нити $\langle \boldsymbol{s}'_{j\alpha}(\xi_j)\,\boldsymbol{s}'_{j\beta}(\xi_j)\rangle$ легко выражаются через характеристический функционал $W(\{\boldsymbol{P}_j(\xi_j)\})$ (7) в соответствии с правилами

$$\langle \boldsymbol{s}'_{j\alpha}(\xi_j)\rangle = \left.\frac{\delta W}{\mathrm{i}\delta \boldsymbol{P}_j^{(\alpha)}(\xi_j)}\right|_{\boldsymbol{P}=0}, \quad (8)$$

$$\langle \boldsymbol{s}'_{j\alpha}(\xi_j)\,\boldsymbol{s}'_{j\beta}(\xi_j)\rangle = \left.\frac{\delta^2 W}{\mathrm{i}\delta \boldsymbol{P}_j^{(\alpha)}(\xi_{j1})\mathrm{i}\delta \boldsymbol{P}_j^{(\beta)}(\xi_{j2})}\right|_{\boldsymbol{P}=0}. \quad (9)$$

Хотя характеристический функционал определяется с помощью процедуры усреднения как вспомогательная величина, он играет существенную независимую роль в стохастических теориях. Например, в задачах статистической физики систем, состоящих из многих частиц, использование характеристического функционала (в этой теории его обычно называют производящий функционал) позволяет получать краткое описание статистических свойств в терминах функции Грина и уравнений для них (см., напр., [21, 22]). Другим примером может быть теория классической турбулентности, где основное кинетическое уравнение для характеристического функционала (называемое уравнением Хопфа) выводится непосредственно из уравнений Навье–Стокса, не прибегая к функции распределения, которая в любом случае неизвестна (см., напр., [24, 25]).

Приступим к вычислению характеристического функционала. На данном этапе мы ограничимся выражением для энергии в локальном приближении [16], а также рассмотрим случай петель одного размера l. Как будет видно из дальнейшего, несмотря на эти ограничения мы получим результаты, связанные со структурными свойствами вихревого клубка и близкие к наблюдаемым в эксперименте. В локальном приближении энергия вихревой петли пропорциональна длине нити, $E_{\mathrm{loc}} = \varepsilon_{\mathrm{v}}\int |\boldsymbol{s}'(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \varepsilon_{\mathrm{v}} l$. Энергия единицы длины вихревой линии

$$\varepsilon_{\mathrm{v}} = \frac{\rho_{\mathrm{s}}\kappa^2}{4\pi}\ln\left(\frac{\langle R\rangle}{a_0}\right), \quad (10)$$

где a_0 – радиус ядра вихревой нити, а верхний параметр обрезания для логарифма $\langle R\rangle$ совпадает с усредненным радиусом кривизны вихревой нити, который связан с плотностью нитей L как $\langle R\rangle \approx L^{-1/2}$.

В качестве следующего шага мы используем так называемое гауссово приближение, широко применяемое в теории полимерных цепей. Суть этого подхода заключается в том, чтобы ослабить строгое условие $|\boldsymbol{s}'(\xi)| = 1$ и изменить его с помощью размытого (гауссова) распределения длины звена с тем же значением интеграла (см., напр., книгу [26]). С учетом сказанного представим локальную энергию в виде

$$E_{\mathrm{loc}} = \varepsilon_{\mathrm{v}}\int (\boldsymbol{s}'(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi.$$

В гауссовом приближении функционал распределения вероятности (4) имеет следующий вид:

$$P\{\boldsymbol{s}(\xi)\} = N\exp\Big[-\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}\int (\boldsymbol{s}'(\xi))^2\,\mathrm{d}\xi + \beta\boldsymbol{v}_{\mathrm{ns}}\frac{\rho_{\mathrm{s}}\kappa}{2}\int \boldsymbol{s}(\xi)\times\boldsymbol{s}'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big]. \quad (11)$$

Функционал распределения вероятности (11) должен быть дополнен множителем, связанным с вычислением вихревых конфигураций на решеточных моделях [16]. Эта процедура может быть выполнена с помощью замены $\beta\varepsilon_{\mathrm{v}} \to \beta\varepsilon_{\mathrm{v}} + 3/(2a)$, где a – шаг (кубической) решетки. Далее мы будем использовать переопределенную величину ε_{v}.

Таким образом, функционал распределения вероятности $P\{\boldsymbol{s}(\xi)\}$ имеет гауссову форму (квадратичен по переменной $\boldsymbol{s}'(\xi)$), и поэтому характеристический функционал (7) может быть вычислен аналитически в общем виде. Опишем кратко эту процедуру. Поскольку показатель экспоненты включает в себя производные разных порядков, удобно выполнить одномерное преобразование Фурье вдоль линии $\boldsymbol{s}(\xi) = \sum_p \boldsymbol{s}(p)\exp(\mathrm{i}p\xi)$. Вычисление характеристического функционала (7) на основе функционала распределения вероятности (11) выполняется с помощью стандартной «процедуры полного квадрата» (см., напр., [27]). Проведя данную процедуру, получим

$$W(\{\boldsymbol{P}(p)\}) = \exp\Big[-\sum_p P^{(\alpha)}(p)N^{(\alpha\beta)}(p)P^{(\beta)}(-p)\Big]. \quad (12)$$

Матрица $N^{(\alpha\beta)}(p)$ имеет следующий вид:

$$N^{(\alpha\beta)}(p) = \begin{pmatrix} -lp^2\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{v}}}{4\beta p^2\varepsilon_{\mathrm{v}}^2+\beta\kappa^2\rho_{\mathrm{s}}^2 v_{\mathrm{ns}}^2} & -lp\kappa\dfrac{\rho_{\mathrm{s}}}{8\beta p^2\varepsilon_{\mathrm{v}}^2+2\beta\kappa^2\rho_{\mathrm{s}}^2 v_{\mathrm{ns}}^2}v_{\mathrm{ns}} & 0 \\ lp\kappa\dfrac{\rho_{\mathrm{s}}}{8\beta p^2\varepsilon_{\mathrm{v}}^2+2\beta\kappa^2\rho_{\mathrm{s}}^2 v_{\mathrm{ns}}^2}v_{\mathrm{ns}} & -lp^2\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{v}}}{4\beta p^2\varepsilon_{\mathrm{v}}^2+\beta\kappa^2\rho_{\mathrm{s}}^2 v_{\mathrm{ns}}^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4}\dfrac{l}{\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Характеристический функционал $W(\{\boldsymbol{P}(p)\})$ (12) с матрицей $N^{(\alpha\beta)}(p)$ (13) является исходной точкой исследования статистических свойств вихревого клубка.

4. Некоторые статистические свойства вихревого клубка

В этом разделе будут описаны некоторые статистические свойства вихревого клубка, которые вытекают из разработанного выше формализма. Мы ограничимся вычислением кривизны и анизотропии вихревых петель. Для этого выполним в выражении для матрицы $N^{(\alpha\beta)}(p)$ обратное преобразование Фурье и вычислим корреляционную функцию $\langle \mathbf{s}'(\xi_1)\mathbf{s}'(\xi_2)\rangle$ ориентаций различных элементов линий.

В соответствии с правилами работы с характеристическим функционалом (см. формулы (8), (9)) для корреляционных функций поперечных компонент тангенциальных векторов $\langle s_x'(\xi_1)s_x'(\xi_2)\rangle$ и $\langle s_y'(\xi_1)s_y'(\xi_2)\rangle$, а также продольных компонент $\langle s_z'(\xi_1)s_z'(\xi_2)\rangle$, взятых в различных точках ξ_1 и ξ_2 вдоль вихревой линии, можно получить следующие соотношения:

$$\langle s_x'(\xi_1)\, s_x'(\xi_2)\rangle = \langle s_y'(\xi_1)\, s_y'(\xi_2)\rangle = \frac{1}{\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}}\delta(\xi_1-\xi_2) + \frac{1}{2\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}}\frac{\kappa^2\rho_{\mathrm{s}}}{\varepsilon_{\mathrm{v}}}\frac{v_{\mathrm{ns}}}{\kappa}\exp\left(-|\xi_1-\xi_2|\sqrt{\frac{1}{4}\frac{\kappa^2}{\varepsilon_{\mathrm{v}}^2}\rho_{\mathrm{s}}^2 v_{\mathrm{ns}}^2}\right), \tag{14}$$

$$\langle s_z'(\xi_1)\, s_z'(\xi_2)\rangle = \frac{1}{\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}}\delta(\xi_1-\xi_2). \tag{15}$$

Слагаемые с дельта-функцией появились вследствие того, что в отсутствие относительной скорости v_{ns} функционал распределения вероятности (11) является распределением Винера для случайных блужданий. В этом смысле результат – тривиальный.

Второе слагаемое в выражении (14) связано с действием противотока. В отличие от слагаемого с дельта-функцией оно описывает плавное изменение тангенциального вектора $\mathbf{s}'(\xi)$ вдоль линии. Характерная длина, на которой изменяется тангенциальный вектор, – это величина, обратная множителю в экспоненте после аргумента $|\xi_1-\xi_2|$. По определению она является средним радиусом кривизны R. Однако выражение под корнем представляет собой комбинацию, которая входит в формулу для плотности вихревых линий (6). Комбинируя результат (14) с формулами (1) и (6), приходим к соотношению

$$c_2(T) = \frac{\delta}{R} = \frac{\kappa\rho_{\mathrm{s}}}{2\gamma\varepsilon_{\mathrm{v}}}. \tag{16}$$

Таким образом, мы получили замечательный результат: средний радиус кривизны R является величиной порядка среднего межвихревого расстояния $\delta = L^{-1/2}$ (ср. с формулой (2)). В диапазоне температур $1\,\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 2\,\mathrm{K}$ коэффициент $c_2(T)$ меняется от 5 до 1.5 и не зависит от величины приложенной скорости противотока. По порядку величины и по характерному изменению функции $c_2(T)$, полученные в нашей работе и в численных исследованиях по квантовой турбулентности, соответствуют друг другу.

Обсудим анизотропию вихревых петель и их ориентацию по отношению к приложенной скорости. Из вида матрицы $N^{(\alpha\beta)}(p)$ (13) и вида матричных элементов для корреляционных функций тангенциальных векторов в ξ-пространстве (14), (15) следует, что вихревой клубок должен быть анизотропным, т.е. иметь разные поперечные и продольные (по отношению к скорости $\mathbf{v}_{\mathrm{ns}}$) размеры. Однако выполнить прямое сравнение соответствующих величин с полученными в численных расчетах коэффициентами I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (см. соотношение (3)) невозможно по той причине, что корреляторы $\langle s_x'(\xi_1)s_x'(\xi_2)\rangle$ и $\langle s_z'(\xi_1)s_z'(\xi_2)\rangle$ содержат дельта-функции разности аргументов $\xi_1-\xi_2$, и при совпадающих аргументах возникает бесконечность. Это является прямым следствием случайной природы блуждания для вихревой линии, следующей из распределения Винера для функционала распределения вероятности (11).

Для преодоления этой трудности мы изучим трехмерную конфигурацию и размеры вихревых петель. В трехмерном пространстве квадрат расстояния D^2 между точками вихревой петли, разделенными расстоянием вдоль линии, может быть получен из выражения для корреляционной функции тангенциального вектора с помощью правила [27]

$$\int_0^s\int_0^s\langle \mathbf{s}'(\xi_1)\,\mathbf{s}'(\xi_2)\rangle \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 = \left\langle \int_0^s \mathbf{s}'(\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1 \int_0^s \mathbf{s}'(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2\right\rangle = D^2.$$

С другой стороны, зная выражения для поперечной, $\langle s_x'(\xi_1)s_x'(\xi_2)\rangle$, и продольной, $\langle s_z'(\xi_1)s_z'(\xi_2)\rangle$, корреляционных функций (см. формулы (14), (15)), можно вычислить ту же величину покомпонентно. Вычисления приводят к следующему результату:

$$D_{x,y}^2 = \frac{s}{\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}} + \frac{3}{\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}}\{R[-1+\exp(-s/R)]+s\}, \tag{17}$$

$$D_z^2 = \frac{1}{\beta\varepsilon_{\mathrm{v}}}s. \tag{18}$$

Вклад в трехмерный размер слагаемых в корреляторах, связанных с дельта-функцией, имеет вид случайного блуждания, $D \propto \sqrt{s}$, как и должно быть вследствие винеровского характера функционала распределения вероятности (11). Что касается вклада второго слагаемого, связанного с действием приложенной скорости, то для достаточно длинных петель ($s \gg R$) зависимость от радиуса кривизны и, следовательно, от относительной скорости (см. соотношение (16)) исчезает. Поскольку наши вычисления выполнены для петель одного размера, не вполне ясно, как должно модифицироваться второе слагаемое в (17) в случае петель разных размеров. Для этого необходимо знать распределение петель по размерам, но это отдельная, пока не решенная задача. Очевидно, однако, что соответствующие манипуляции должны привести к некоторой зависимости от температуры. Суммируя, мы можем утверждать, что вихревой клубок действительно проявляет анизотропные свойства и отношение его продольных и поперечных размеров не зависит от приложенной скорости, как это имеет место в случае квантовой турбулентности. Физический смысл этого необычного явления состоит в том, что в зависимости от приложенной скорости генерируются вихревые клубки разной интенсивности, но с одинаковыми статистическими свойствами. В частности, при очень малой скорости ($v_{\mathrm{ns}} \to 0$) будет рождаться малое число вихревых петель, но степень их анизотропии будет такая же, как и в плотном вихревом клубке.

5. Заключение

С помощью метода характеристического функционала нами изучены свойства ансамбля квантовых вихрей в сверхтекучих жидкостях в присутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Как и в предыдущей работе автора [16], установлено, что существуют две популяции вихревых нитей. Это – термодинамические вихри, порожденные термическими флуктуациями, и гидродинамические вихри, связанные со скоростью противотока. На основе точного вычисления характеристического функционала были получены корреляционные функции тангенциальных векторов, определяющие свойства вихревого клубка. В частности, показано, что средний радиус кривизны вихревых линий R составляет величину порядка межвихревого расстояния δ. Коэффициент пропорциональности $c_2(T)$ является функцией температуры (порядка единицы) и не зависит от приложенной скорости противотока.

Наши вычисления количественных характеристик показывают, что степень анизотропии вихревого клубка также не зависит от приложенной скорости противотока. Ранее подобные результаты были найдены только численно для случая квантовой турбулентности. До сих пор не было разработано теоретических методов получения такой зависимости, и физическая сущность обнаруженных свойств (в частности, независимости от приложенной скорости) была неясной. Результаты настоящей работы по порядку величины согласуются с данными для турбулентных течений. Однако наши результаты получены для термодинамически равновесного случая, и пока неясно, как он соотносится со случаем квантовой турбулентности. Этот вопрос, как и другие вопросы, касающиеся связи термодинамического равновесия с турбулентным течением, представляет большой интерес; предполагается, что все они будут исследованы в дальнейшем.

Исследование по термодинамическому равновесию ансамбля квантовых вихревых нитей выполнено в рамках государственного задания ИТ СО РАН (№АААА-А17-117022850027-5), а исследование с использованием метода характеристического функционала – за счет гранта РФФИ №18-08-00576.

1. Kleinert H. *Gauge Fields in Condensed Matter Physics* (Singapore: World Scientific, 1990).
2. Feynman R.P. *Progress in Low Temperature Physics. Vol.1* (Amsterdam, North-Holland, 1955).
3. Onsager L. *Il Nuovo Cimento*, **6**, 279 (1949).
4. Vinen W. *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **242**, 493 (1957).
5. Schwarz K.W. *Phys. Rev. B*, **38**, 2398 (1988).
6. Vinen W. *J. Low Temperature Phys.*, **161**, 419 (2010).
7. Copeland E.J., Kibble T.W.B., Steer D.A. *Phys. Rev. D*, **58**, 043508 (1998).
8. Nabarro F. *Theory of Crystal Dislocations* (Oxford: Clarendon Press, 1967).
9. Davidson M. *Physica E: Low-dimensional Syst. Nanostruc.*, **42**, 317 (2010).
10. Melatos A., Peralta C. *Astrophys. J. Lett.*, **662**, L99 (2007).
11. Лиханова Ю.В., Медведев С.Б., Федорук М.П., Чаповский П.Л. *Квантовая электроника*, **47**, 484 (2017) [*Quantum Electron.*, **47**, 484 (2017)].
12. Рябцев И.И., Колачевский Н.Н., Тайченачев А.В., *Квантовая электроника*, **49** (5), 409 (2019) [*Quantum Electron.*, **49** (5), 409 (2019)].
13. Каган М.Ю., Турлапов А.В. *УФН*, **189**, 225 (2019) [*Phys. Usp.*, **62**, 215 (2019)].
14. Турлапов А.В., Каган М.Ю. *ЖЭТФ*, **154**, 991 (2018) [*JETP*, **127**, 877 (2018)].
15. Nemirovskii S.K. *Phys. Rep.*, **524**, 85 (2013).
16. Немировский С.К. *Квантовая электроника*, **49** (5), 436 (2019) [*Quantum Electron.*, **49** (5), 436 (2019)].
17. Kondaurova L., L'vov V., Pomyalov A., Procaccia I. *Phys. Rev. B*, **89**, 014502 (2014).
18. Nemirovskii S.K. *Theor. Math. Phys.*, **141**, 1452 (2004).
19. Nemirovskii S.K. *J. Low Temperature Phys.*, **185**, 365 (2016).
20. Donnelly R. *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge: Cambridge University Press, 1991).
21. Zinn-Justin J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford, Clarendon Press, 2002).
22. Мигдал А. В сб.: *Вопросы кибернетики* (М.: Наука, 1986, с. 122).
23. Agishtein M.E., Migdal A.A. *Mod. Phys. Lett. A*, **1**, 221 (1986).
24. Frisch U. *Turbulence* (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).
25. Monin A., Yaglom A. *Statistical Fluid Dynamics. Vol. II* (Cambridge, MA, MIT, 1975).
26. Doi M., Edwards S. *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford: Clarendon Press, 1986).
27. Nemirovskii S.K. *Phys. Rev. B*, **57**, 5972 (1998).