

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОПТИКА

Локализованные электромагнитные волны в ромбической решетке волноводов с конкурирующими нелинейностями

А.И.Маймистов

Рассмотрена модель дискретной фотонной системы, представляющей собой квазиодномерную ромбическую решетку волноводов, где для материала, из которого изготовлены волноводы центральной линейки волноводов, помимо положительной кубической нелинейности учитывается отрицательная нелинейность пятого порядка. Две другие линейки волноводов изготовлены из оптически линейного материала. В континуальном приближении получено решение системы связанных волн, которое описывает локализованную в поперечном направлении волну. В определенном частном случае конкуренция нелинейностей приводит к образованию распределения интенсивностей полей по волноводам, имеющему форму ступеньки.

Ключевые слова: локализованные электромагнитные волны, квазиодномерная ромбическая решетка волноводов, конкуренция нелинейностей.

1. Введение

Один из первых примеров дискретной фотонной системы был рассмотрен в [1]. Это – линейка канальных волноводов, связанных друг с другом за счет нарушенного полного внутреннего отражения. Было показано, что введенное в центральный канал непрерывное излучение постепенно перераспределяется по всем соседним каналам. В результате этого образуется распределение интенсивностей по каналам, такое же, как и распределение интенсивностей пучков при дифракции Рамана–Ната. Различные особенности распространения излучения в подобных дискретных фотонных системах позже исследовались теоретически и экспериментально другими авторами [2–4]. В [5, 6] вместо волноводов рассматривались микрорезонаторы. Блоховские осцилляции интенсивностей в линейке связанных волноводов изучались в [7–12]. Волноводы в зигзагообразной линейке связаны с ближайшими и следующими за ними соседями. Распространение волн в такой линейке волноводов рассмотрено в [13, 14]. Большое число работ посвящено распространению волн в линейке нелинейных волноводов [15] и образованию в них дискретных солитонов [16–19]. Помимо кубической (керровской) нелинейности материалов, из которых изготавливались волноводы, были рассмотрены и другие нелинейности. Например, были рассмотрены квадратично-нелинейные среды [20, 21] и среды с нелинейностью, превышающей кубическую [22–25]. Можно полагать, что одномерные и двумерные массивы волноводов стали популярными объектами дискретной фотоники [26–28].

Новый шаг в развитии дискретной фотоники связан с исследованием решеток волноводов, элементарные ячей-

ки которых содержат более двух узлов (волноводов или микрорезонаторов – аналогов фотонных точек) [29–31]. Простым примером является квазиодномерная ромбическая решетка (рис. 1). Спектр линейных волн в этой решетке имеет три ветви, одна из которых имеет нулевую кривизну и по этой причине называется плоской зоной. Если излучение вводится в решетку так, что поле в центральной линейке равно нулю, а в узлах двух других окружающих линеек поля находятся в противофазе, то дифракция излучения вдоль решетки отсутствует. Соответствующая указанному распределению полей по волноводам мода принадлежит плоской зоне. Экспериментальная демонстрация локализации излучения (отсутствия дифракции) проведена на примере ромбической решетки [32–34] и в случае двумерной решетки «кагомэ» [35].

На основе теории связанных волн было показано [36], что в линейной ромбической решетке любое незначительное отклонение от конфигурации полей, соответствующей моде плоской зоны (засветка хотя бы одного узла центральной линейки решетки или не равная нулю сумма фаз полей в окружающих центральную линейку узлах), восстанавливает дифракцию. В случае волноводов ромбической решетки с кубической нелинейностью было показано, что моды плоской зоны модуляционно неустойчивы [37]. Численные исследования локализации в одной

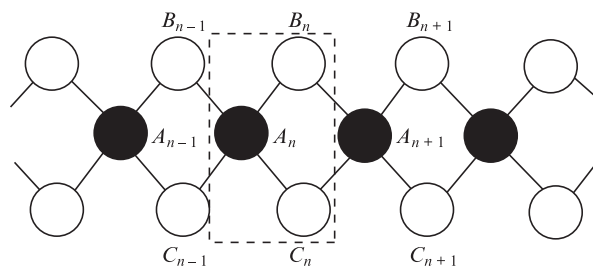


Рис.1. Схематическое изображение бинарной квазиодномерной ромбической решетки волноводов. Элементарная ячейка решетки обозначена прямоугольником.

А.И.Маймистов. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: aimaimistov@gmail.com

элементарной ячейке простой и двойной ромбической решеток [38] показали, что локализация какое-то время сохраняется, но затем излучение начинает проникать в соседние волноводы и дифракция восстанавливается. Модуляционная неустойчивость в двумерной ромбической решетке изучена в [39]. Исследование двумерной нелинейной решетки Либа, у которой спектр линейных волн имеет плоскую зону, показало, что модуляционная неустойчивость приводит к локализации излучения в ней [40].

В настоящей работе рассматривается локализация излучения в нелинейной ромбической решетке, в которой центральная линейка волноводов изготовлена из материала с положительной нелинейной восприимчивостью третьего порядка и отрицательной восприимчивостью пятого порядка. Две другие линейки волноводов состоят из оптически линейного материала. Кроме того, предполагается, что волноводы либо центральной линейки, либо окружающих линеек изготовлены из материала с отрицательным показателем преломления [41, 42]. В этом смысле можно говорить о слабо нелинейной бинарной ромбической решетке. Эта модель достаточно проста для анализа, учитывает насыщение нелинейности, связь прямой и обратной волн и позволяет учесть влияние нелинейности на моды плоской зоны, которая существует в ромбической решетке. В разд.2 сформулированы уравнения, описывающие распределения медленно меняющихся амплитуд электрического поля электромагнитной волны по волноводам, образующим ромбическую решетку. Система уравнений связанных волн сведена к одному дифференциально-разностному уравнению. Затем, считая волны квазигармоническими, в континуальном приближении было получено дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка для огибающей распределения амплитуд полей в волноводах. В общем случае его решения представляют собой локализованную в решетке волну. Однако в одном исключительном случае было получено решение, описывающее доменную стенку (кинк) для распределения интенсивностей по волноводам центральной линейки и локализованные распределения интенсивностей по волноводам двух других линеек ромбической решетки. Следует отметить, что такого рода локализация электромагнитной волны невозможна, если все волноводы характеризуются показателем преломления одного и того же знака.

2. Основные уравнения модели

Распространение электромагнитного излучения в линейке волноводов обычно описывается на основе теории связанных волн [43]. Электромагнитная волна представляется линейной суперпозицией квазигармонических волн, локализованных в n -м волноводе. С использованием приближения медленно меняющихся амплитуд из волнового уравнения выводится дифференциально-разностное уравнение для амплитуд связанных волн A_n в n -м волноводе [1–4, 42]. В случае ромбической решетки (см. рис.1) элементарная ячейка содержит три узла. Следовательно, в приближении медленно меняющихся амплитуд будет получена система трех дифференциально-разностных уравнений для комплексных амплитуд A_n, B_n, C_n электрических полей в волноводах, входящих в n -ю элементарную ячейку. При условии, что расстояния между ближайшими волноводами одинаковы, все константы связи (или длины связи) можно считать равными друг другу. Пусть длины волноводов невелики, так что можно пренебречь раз-

личием групповых скоростей, положив их равными некоторой средней скорости v_g . Тогда система уравнений для медленно меняющихся амплитуд A_n, B_n, C_n запишется в следующем виде [30, 44]:

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)A_n + e^{i\delta_b \zeta}(B_n + B_{n-1}) + e^{i\delta_c \zeta}(C_n + C_{n-1}) &= 0, \\ i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)B_n + e^{-i\delta_b \zeta}(A_{n+1} + A_n) &= 0, \\ i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)C_n + e^{-i\delta_c \zeta}(A_{n+1} + A_n) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ζ – пространственная координата, измеренная в единицах длины связи L_c ; τ – время, измеренное в единицах $t_c = L_c/v_g$. Параметры $\delta_b = (\beta_b - \beta_a)L_c$ и $\delta_c = (\beta_c - \beta_a)L_c$ есть разности постоянных распространения $\beta_b, \beta_c, \beta_a$ волн, локализованных в соседних волноводах В, С и А соответственно, и являются мерой несовпадения фазовых скоростей этих волн. Обычно предполагается, что условие фазового синхронизма $\delta_a = \delta_c = 0$ выполнено. Система уравнений (1) использовалась при анализе данных экспериментов [32–34]. В работе [36] было получено ее точное решение.

Обобщение модели ромбической решетки волноводов заключается в учете нелинейных свойств материала, из которого изготовлены волноводы. Дополнительно можно предположить, что волноводы разных типов характеризуются разными знаками показателя преломления [41]. Простое обобщение системы уравнений (1), которое будет рассмотрено ниже, основано на следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)A_n + (B_n + B_{n-1}) + (C_n + C_{n-1}) + G(|A_n|^2)A_n &= 0, \\ i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)B_n + (A_{n+1} + A_n) &= 0, \\ i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)C_n + (A_{n+1} + A_n) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ_1 и σ_2 – знаки показателя преломления материала волноводов соответствующей линейки. Функция $G(|A_n|^2)$ описывает нелинейность материала волноводов А. Например, для керровской среды $G(|A_n|^2) = \mu |A_n|^2$, и насыщение нелинейности учитывается функцией вида [19, 22, 24]

$$G(|A_n|^2) = \frac{\mu |A_n|^2}{1 + \rho |A_n|^2}.$$

Если напряженность поля не очень велика, то это выражение можно записать как

$$G(|A_n|^2) = \mu |A_n|^2 - \mu\rho |A_n|^4. \quad (3)$$

Такой тип нелинейности при $\rho > 0$ использовался в качестве примера конкурирующих нелинейностей третьего и пятого порядков (в зарубежной литературе «cubic-quintic») для описания солитонов в оптических волокнах [45–49], вихревых солитонов [50, 51], а также распространения предельно коротких импульсов [52].

Для одинаковых сред линеек волноводов В и С можно определить новые переменные, $F_n = B_n + C_n$ и $S_n = B_n - C_n$. Тогда уравнения модели запишутся в следующем виде:

$$i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)A_n + F_n + F_{n-1} + G(|A_n|^2)A_n = 0,$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)F_n + 2(A_{n+1} + A_n) = 0.$$

Уравнение для S_n тривиально:

$$i\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)S_n = 0.$$

Предположив, что введенное в волноводы излучение является непрерывным, систему уравнений для связанных волн можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} i\sigma_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} A_n + F_n + F_{n-1} + G(|A_n|^2)A_n &= 0, \\ i\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} F_n + 2(A_{n+1} + A_n) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключив F_n , систему уравнений первого порядка можно переписать как дифференциально-разностное уравнение второго порядка:

$$\sigma \frac{\partial^2 A_n}{\partial \zeta^2} + 2(A_{n+1} + 2A_n + A_{n-1}) - i\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} [G(|A_n|^2)A_n] = 0, \quad (5)$$

где $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$.

Если согласно формуле $A_n = (-1)^n \tilde{A}_n$ ввести новые поля \tilde{A}_n , то они будут определяться решениями дифференциально-разностного уравнения

$$\sigma \frac{\partial^2 \tilde{A}_n}{\partial \zeta^2} - 2(\tilde{A}_{n+1} - 2\tilde{A}_n + \tilde{A}_{n-1}) - i\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} [G(|\tilde{A}_n|^2)\tilde{A}_n] = 0. \quad (6)$$

3. Квазигармонические волны и континуальное приближение

Теперь воспользуемся предположением, что волны в каждом волновомоду удовлетворяют условию $\tilde{A}_n(\zeta) = \exp(i\beta\zeta)\mathcal{A}_n$, где β – постоянная распространения, а \mathcal{A}_n не зависит от переменной ζ . В этом случае уравнение связанных волн (6) сводится к разностному уравнению

$$\sigma\beta^2\mathcal{A}_n + 2(\mathcal{A}_{n+1} - 2\mathcal{A}_n + \mathcal{A}_{n-1}) - \sigma_2\beta[G(|\mathcal{A}_n|^2)\mathcal{A}_n] = 0.$$

В континуальном приближении разностные производные заменяются непрерывными согласно правилу

$$\mathcal{A}_{n\pm 1} = \mathcal{A}(x) \pm l \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} \pm \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 \mathcal{A}}{\partial x^3} + \frac{l^4}{4!} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial x^4} \pm \dots,$$

где $x = nl$; l – шаг решетки. Полученное выше разностное уравнение записывается как

$$\sigma\beta^2\mathcal{A} - \sigma_2\beta[G(|\mathcal{A}|^2)\mathcal{A}] + 2l^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} + \frac{2l^4}{4!} \frac{\partial^4 \mathcal{A}}{\partial x^4} + \dots$$

Если ограничиться второй производной по «поперечной» переменной x , то в континуальном приближении получится уравнение

$$2l^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} + \sigma\beta^2\mathcal{A} - \sigma_2\beta G(|\mathcal{A}|^2)\mathcal{A} = 0, \quad (7)$$

которое учитывает «поперечную дисперсию» в минимальной степени.

Если все слагаемые в уравнении (7) умножить на производную по x от \mathcal{A} и проинтегрировать полученный результат по x , то получится следующее уравнение:

$$l^2 \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\sigma\beta^2}{2}\mathcal{A}^2 - \frac{\sigma_2\beta}{2}R(|\mathcal{A}|^2) = I_0, \quad (8)$$

где I_0 – постоянная интегрирования. Здесь было использовано соотношение $G(z) = dR(z)/dz$, определяющее $R(|\mathcal{A}|^2)$ в (8).

Далее будет рассматриваться случай, когда материал, из которого изготовлены волноводы типа А, обладает нелинейными свойствами, описываемыми выражением (3). Тогда

$$R(|\mathcal{A}|^2) = \frac{\mu}{2} \left(|\mathcal{A}|^4 - \frac{2}{3}\rho |\mathcal{A}|^6 \right).$$

Подстановка этого выражения в (8) дает уравнение

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\sigma\beta^2}{2l^2}\mathcal{A}^2 - \frac{\sigma_2\beta\mu}{4l^2}\mathcal{A}^4 + \frac{\sigma_2\beta\mu\rho}{6l^2}\mathcal{A}^6 = I_1, \quad (9)$$

где I_1 – перенормированная постоянная интегрирования. Введение новых переменных,

$$y = \sqrt{\frac{\beta^2}{2l^2}}x, \quad \mathcal{A} = A_0 a, \quad A_0^2 = \frac{2\beta}{|\mu|},$$

позволяет превратить (9) в следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 + \sigma a^2 - \sigma_2 v (a^4 - \kappa a^6) = I_3 = \text{const}, \quad (10)$$

где $v = \text{sgn}\mu$; $\kappa = 4\beta\rho/(3|\mu|)$ – мера конкуренции нелинейностей.

Пусть все волноводы ромбической решетки изготовлены из оптически линейного материала. В таком случае линеаризованное уравнение (5) позволяет определить дисперсионное соотношение для линейных волн: $\sigma\beta^2(q) = 8\cos^2(q/2)$. Отсюда следует, что точки $q = \pm\pi/l$ являются границами зоны Бриллюэна. Линеаризованное уравнение (6) приводит к дисперсионному соотношению $\sigma\beta^2(q) = -8\sin^2(q/2)$. Это означает, что $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ должна быть равна -1 , и уравнение (7) описывает эволюцию волнового пакета, компоненты которого имеют волновые векторы около границ зоны Бриллюэна.

4. Локализованные волны

Локализованные электромагнитные волны в рассматриваемой линейке волноводов отвечают решениям уравнения (10) с граничными условиями при $x \rightarrow -\infty$:

$$\mathcal{A}(x) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \rightarrow 0. \quad (11)$$

Следовательно, постоянная I_3 в этом уравнении равна нулю, и (10) принимает вид

$$\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 = -\sigma a^2 + \vartheta(a^4 - \kappa a^6), \quad (12)$$

где $\vartheta = \sigma_2 \nu$. Отсюда следует, что при малых значениях a положительная левая часть этого уравнения пропорциональна $-\sigma a^2$. Это означает, что решение уравнения (10) для выбранных краевых условиях при $x \rightarrow -\infty$ не существует при $\sigma = 1$. Таким образом, необходимо считать, что $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 = -1$.

Способ решения уравнения (10) стандартный. Делается замена $a = u^{-1/2}$, что приводит к уравнению

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u^2 + \vartheta(u - \kappa) = \left(u + \frac{1}{2} \vartheta\right)^2 - \frac{1}{4}(1 + 4\vartheta\kappa). \quad (13)$$

Введение новой переменной w , такой, что

$$\left(u + \frac{1}{2} \vartheta\right) = \Delta w, \quad \Delta^2 = \frac{1}{4}(1 + 4\vartheta\kappa),$$

приводит к уравнению

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = w^2 - 1,$$

решение которого известно: $w(y) = \cosh[2(y - y_0)]$, где y_0 – постоянная интегрирования, которая имеет смысл положения максимального значения функции $a(y)$. Начало координат на оси рассматриваемой решетки может быть выбрано таким, чтобы $y_0 = 0$. Следовательно, $u(y) = \Delta \cosh(2y) - \vartheta/2$. Отсюда имеем

$$a^2(y) = 2[2\Delta \cosh(2y) - \vartheta]^{-1}.$$

Окончательно решение уравнения (9) при выбранном краевом условии записывается в следующем виде:

$$\mathcal{A}^2(x) = \frac{2A_0^2}{2\Delta \cosh(Kx) - \vartheta}, \quad (14)$$

где

$$A_0^2 = \frac{2\beta}{|\mu|}; \quad K = 2\sqrt{\frac{\beta^2}{2l^2}}; \quad \vartheta = \pm 1.$$

Следует помнить, что $\mathcal{A}^2(x)$ представляет собой огибающую распределения интенсивностей излучения по узлам линейки волноводов А. Это распределение параметризовано величиной $\vartheta = \pm 1$. Значение $\vartheta = +1$ отвечает фокусирующей (дефокусирующей) керровской нелинейности и волноводам А, изготовленным из положительно (отрицательно) преломляющего материала. Поле $\mathcal{A}^2(x)$ задано выражением

$$\mathcal{A}^2(x) = \frac{2A_0^2}{(1 + 4\kappa)^{1/2} \cosh(Kx) - 1}.$$

Если бы нелинейные волноводы были чисто керровскими ($\rho = 0$), то данное решение было бы сингулярным – неразумным с точки зрения физических свойств.

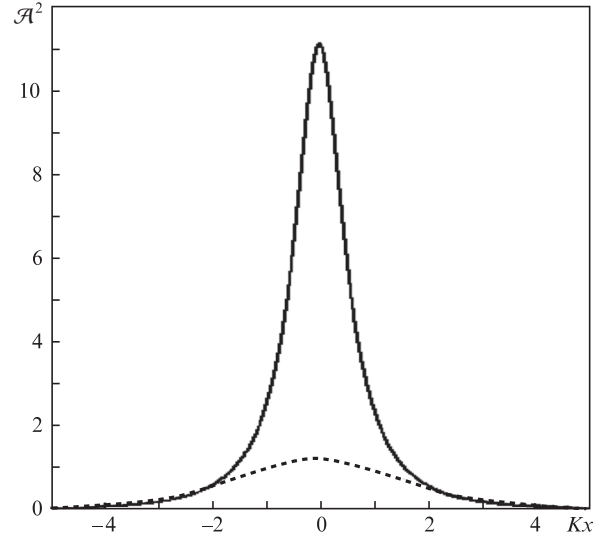


Рис.2. Огибающие локализованных волн при $\vartheta = +1$ (сплошная кривая) и $\vartheta = -1$ (пунктир).

Значение $\vartheta = -1$ отвечает дефокусирующей (фокусирующей) керровской нелинейности волноводов А, изготовленных из отрицательно (положительно) преломляющего материала. Поле $\mathcal{A}^2(x)$ в этом случае задано выражением

$$\mathcal{A}^2(x) = \frac{2A_0^2}{(1 - 4\kappa)^{1/2} \cosh(Kx) + 1}.$$

Отсюда видно, что параметр нелинейности пятого порядка ограничен неравенством $\kappa < 1/4$.

На рис.2 показаны огибающие локализованных волн для $\vartheta = +1$ и -1 . При этом в обоих случаях $\sigma_2 = 1$ и $\kappa = 0.1$. Можно заметить, что максимальные значения амплитуды $\mathcal{A}(x)$ для случаев $\vartheta = +1$ и -1 сильно различаются.

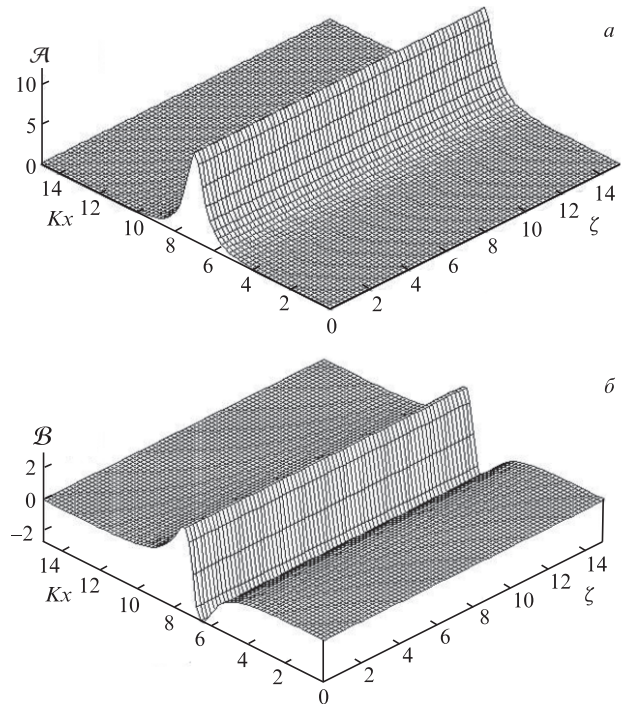


Рис.3. Огибающие локализованных волн для $\mathcal{A}(x)$ (а) и $\mathcal{B}(x)$ (б) при $\vartheta = +1$.

Когда нелинейность среды чисто керровская, при $\vartheta = +1$ амплитуда $\mathcal{A}(x)$ становится в одном из волноводов бесконечно большой величиной. Ограничиваться здесь кубической (керровской) нелинейностью будет ошибочно.

Положив в рассматриваемом приближении $F_n(\xi) = (-1)^n \mathcal{F} \exp(i\beta\xi)$ и используя уравнение (4), для огибающей $\mathcal{B}(x)$ можно получить следующее выражение:

$$2\mathcal{B}(x) = \mathcal{F}(x) = -\frac{2l}{\sigma_2\beta} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}.$$

Огибающие распределений полей в линейке волноводов А и В в поперечном и продольном направлениях показаны на рис.3.

5. Доменные стенки

Выше рассмотрен случай, когда параметр нелинейности пятого порядка ограничен неравенством $4\kappa < 1$. Случай $4\kappa = 1$ надо рассмотреть отдельно. Здесь переменная $u(y)$ определяется уравнением

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u^2 - u + \frac{1}{4} = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = w^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \pm 2w.$$

Решение этого уравнения таково: $w^{(\pm)} = \exp[\pm 2(y - y_0)]$. Таким образом, есть два решения для амплитуды a :

$$a^{(\pm)2}(x) = \frac{2}{1 + 2 \exp[\pm 2(y - y_0)]}, \quad (15)$$

где $y - y_0 = K(x - x_0)$. Решение $a^{(+2)}(x)$ описывает волну с экспоненциально убывающей огибающей при $x \rightarrow +\infty$,

$$a^{(+2)}(x) \sim \exp[-2K(x - x_0)],$$

и амплитудой, стремящейся к постоянному значению при $x \rightarrow -\infty$:

$$a^{(+2)}(x) \sim 2\{1 - 2 \exp[-2K(x - x_0)]\}.$$

Напротив, $a^{(-2)}(x)$ описывает волну с экспоненциально убывающей огибающей при $x \rightarrow -\infty$,

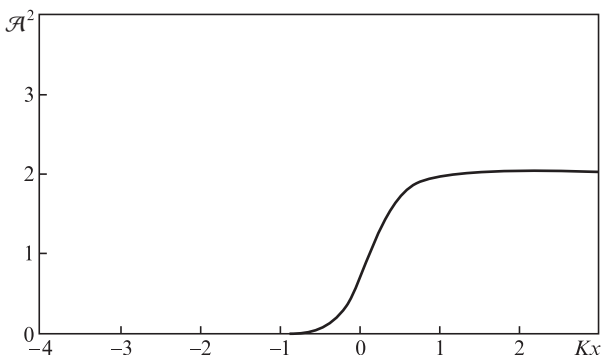


Рис.4. Профиль поля $\mathcal{A}^{(-)}(x)$ при $4\kappa = 1$.

$$a^{(-2)}(x) \sim \exp[-2K(x - x_0)],$$

и амплитудой, стремящейся к постоянному значению при $x \rightarrow +\infty$:

$$a^{(-2)}(x) \sim 2\{1 - 2 \exp[-2K(x - x_0)]\}.$$

Найденные решения можно понимать как доменные стенки (пример показан на рис.4.)

Следует подчеркнуть, что краевому условию (11) соответствует доменная стенка, описываемая формулой для $a^{(-)}(x)$. Огибающая $\mathcal{B}^{(-)}(x)$ выглядит как уединенная волна с нулевыми асимптотиками, локализованная на доменной стенке $\mathcal{A}^{(-)}(x)$.

Чтобы рассмотреть локализованные волны в виде волнового пакета плоских волн с волновыми векторами, лежащими вблизи $q = 0$, можно повторить вывод уравнения для огибающей исходя из (5) и воспользоваться дисперсионным уравнением для линейных волн около $q = 0$. Так, в длинноволновом пределе может быть получено уравнение

$$2l^2 \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}\right)^2 + (8 - \beta^2)\mathcal{A}^2 + \beta\mu(A^3 - \rho A^5) = 0. \quad (16)$$

Из дисперсионного соотношения для линейных волн в центре зоны Бриллюэна следует, что $\max \beta^2 = 8$. Таким образом, второе слагаемое в уравнении (16) – положительное, и локализованных решений с нулевыми асимптотиками у этого уравнения нет.

6. Заключение

Из уравнений связанных волн для модели ромбической квазиодномерной решетки волноводов, в которой для центральной линейки волноводов, помимо положительной кубической нелинейности материала, из которого изготовлены волноводы, учитывается отрицательная нелинейность пятого порядка, в континуальном приближении получено дифференциальное уравнение для огибающей распределения полей по волноводам. Это уравнение учитывает «поперечную дисперсию» в минимальной степени. Аналитически найдено стационарное решение для квазигармонических волн, которое описывает локализованную в решетке волну. В исключительном случае конкурирующие нелинейности допускают существование решения в форме кинка или доменной стенки. Эти волны представляют собой волновые пакеты, собранные из плоских волн с волновыми векторами, лежащими вблизи границ зоны Бриллюэна. В силу периодичности решетки волноводов границы $q = -\pi/l$ и $q = +\pi/l$ можно отождествить.

В точках зоны Бриллюэна $q = \pm \pi/l$ дисперсионные кривые, отвечающие модам плоской зоны и модам двух других обычных зон, сливаются. Локализация излучения в решетке волноводов обусловлена нелинейными эффектами подобно тому, как это происходит при самофокусировке в сплошных средах. Деформация решетки волноводов может снять вырождение в точках $q = \pm \pi/l$ [27, 53]. Потребуется обобщение представленной здесь теории на случай, в котором учитывается взаимодействие всех мод за счет нелинейности среды.

Относительно решения в форме доменной стенки нужно отметить, что экспериментально его можно получить

при очень большом значении амплитуды входного излучения: $A_0^2 \sim \chi^{(3)}/\chi^{(5)}$ в случае нерезонансной нелинейности или $A_0 \sim A_{\text{sat}}$ – амплитуды поля насыщения [54] для резонансной нелинейности.

Существенно, что локализация электромагнитной волны в ромбической решетке оказалась возможной (в принятом приближении) благодаря использованию для изготовления волноводов сред с положительным и отрицательным показателями преломления. Можно показать, что при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ решения уравнения (10) с нулевыми асимптотиками нет.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант №18-02-00278).

1. Somekh S., Garmire E., Yariv A., et al. *Appl. Phys. Lett.*, **22**, 46 (1973).
2. Pertsch T., Zentgraf T., Peschel U., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 093901 (2002).
3. Staron G., Weinert-Raczka E., Urban P. *Opto-Electron. Rev.*, **13**, 93 (2005).
4. Röpke U., Bartelt H., Unger S. *Appl. Phys. B.*, **104**, 481 (2011).
5. Christodoulides D.N., Efremidis N.K. *Opt. Lett.*, **27** (8), 568 (2002).
6. Armaroli A., Feron P., Dumeige Ya. *Phys. Rev. A*, **98**, 013848 (2018).
7. Peschel U., Pertsch T., Lederer F. *Opt. Lett.*, **23**, 1701 (1998).
8. Szameit A., Pertsch T., Nolte S., et al. *J. Opt. Soc. Am.*, **24**, 2632 (2007).
9. Longhi S. *Opt. Lett.*, **34**, 2174 (2009).
10. Gang Wang. *J. Opt.*, **16**, 015502 (2014).
11. Yulin A., Driben R., Meier T. *Phys. Rev. A*, **96**, 033827 (2017).
12. Wei Feng Zhang, Xiao Zhang, Kartashov Ya.V., Xianfeng Chen, Fangwei Ye. *Phys. Rev. A*, **97**, 063845 (2018).
13. Efremidis N.K., Christodoulides D.N. *Phys. Rev. B*, **65**, 056607 (2002).
14. Казанцева Е.В., Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **43**, 807 (2013) [*Quantum Electron.*, **43**, 807 (2013)].
15. Lederer F., Stegeman G.I., Christodoulides D.N., Assanto G., Segev M., Silberberg Ya. *Phys. Rep.*, **463**, 1 (2008).
16. Shen Y., Kevrekidis P.G., Srinivasan G., Aceves A.B. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**, 295205 (2016).
17. Auditore A., Conforti M., De Angelis C., Aceves A.B. *Opt. Commun.*, **297**, 125 (2013).
18. Kivshar Yu.S., Flytzanis N. *Phys. Rev. A*, **46**, 7972 (1992).
19. Cuevas J., Eilbeck J.C. *Phys. Lett. A*, **358**, 15 (2006).
20. Darmanyan S., Kobayakov A., Lederer F. *Phys. Rev. E*, **57**, 2344 (1998).
21. Iwanow R., Schiek R., Stegeman G.I., Pertsch T., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 113902 (2004).
22. Herrmann J. *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**, 1507 (1991).
23. Afanasjev V.V., Chu P.L., Kivshar Y.S. *Opt. Lett.*, **22**, 1388 (1997).
24. Veretenov N.A., Rosanov N.N., Fedorov S.V. *Phys. Rev. Lett.*, **117**, 183901 (2016).
25. Abdullaev F.Kh., Salerno M. *Phys. Rev. E*, **97**, 052208 (2018).
26. Longhi S. *Laser & Photonics Rev.*, **3**, 243 (2009).
27. Szameit A., Nolte S. *J. Phys. B: Atom., Molec. Opt. Phys.*, **43**, 163001 (2010).
28. Maimistov A.I. *Nonlin. Phenom. Compl. Syst.*, **19**, 358 (2016).
29. Morales-Inostroza L., Vicencio R.V. *Phys. Rev. A*, **94**, 043831 (2016).
30. Flach S., Leykam D., Bodyfelt J.D., Matthies P., Desyatnikov A.S. *Europhys. Lett.*, **105**, 30001 (2014).
31. Leykam D., Andreanov A., Flach S. *Adv. Phys.: X*, **3**, 1473052 (2018).
32. Mukherjee S., Thomson R.R. *Opt. Lett.*, **40** (23), 5443 (2015).
33. Mukherjee S., Spracklen A., Choudhury D., Goldman N., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 245504 (2015).
34. Vicencio R.A., Cantillano C., Luis R.A., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 245503 (2015).
35. Yuanyuan Zong, Shiqiang Xia, Liqin Tang, et al. *Opt. Express*, **24** (8), 8877 (2016).
36. Maimistov A.I., Patrikeev V.A. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **737**, 012008 (2016).
37. Maimistov A.I. *J. Opt.*, **19**, 045502 (2017).
38. Zegadlo K., Nir Dror, Hung N.V., Trippenbach M., Malome B.M. *Phys. Rev. E*, **96**, 012204 (2017).
39. Porsezian K., Ali Shafeeqe A.K., Maimistov A.I. *J. Opt. Soc. Am. B*, **35**, 2057 (2018).
40. Lazarides N., Tsironis G.P. *Phys. Rev. B*, **96**, 054305 (2017).
41. Sarychev A.K., Shalaev V.M. *Electrodynamics of Metamaterials* (Singapore: World Scientific, 2007).
42. Maimistov A.I., Gabitov I.R. *Eur. Phys. J. Special Topics*, **147**, 265 (2007).
43. *Интегральная оптика*. Под ред. Т.Тамир (М.: Мир, 1978).
44. Longhi S. *Opt. Lett.*, **39**, 5892 (2014).
45. Азимов Б.С., Сагапов М.М., Сухоруков А.П. *Квантовая электроника*, **18**, 104 (1991) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **21**, 93 (1991)].
46. Mihalache D., Mazilu D., Crasovan L.-C., Malomed B.A., Lederer F. *Phys. Rev. E*, **61**, 7142 (2000).
47. Abdullaev F.Kh., Garnier J. *Phys. Rev. E*, **72**, 035603 (R) (2005).
48. Woo-Pyo Hong. *Opt. Commun.*, **194**, 217 (2001).
49. Woo-Pyo Hong. *Opt. Commun.*, **213**, 173 (2002).
50. Mihalache D., Mazilu D., Crasovan L.-C., Malomed B.A., Lederer F., Torner L. *Phys. Rev. E*, **68**, 046612 (2003).
51. Desyatnikov A., Maimistov A., Malomed B. *Phys. Rev. E*, **61**, 3107 (2000).
52. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **94**, 281 (2003) [*Optics Spectroscopy*, **94**, 251 (2003)].
53. Dreisow F., Szameit A., Heinrich M., Pertsch T., Nolte D., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 076802 (2009).
54. Пантел Р., Путхоф Г. *Основы квантовой электроники* (М.: Мир, 1972, с. 90–94).