

Механизм группировки электронов в сгустке, генерируемом лазерным импульсом ультрарелятивистской интенсивности при пересечении границы неоднородной плазмы

С.В.Кузнецов

Путем численного моделирования исследован процесс аккумуляции электронов в сгустке, генерируемом лазерным импульсом при его проникновении в плазму, имеющую на границе с вакуумом неоднородный профиль плотности с выходом на плато. Установлено, что для такой плазмы существует механизм, который способствует более плотной группировке электронов в генерируемом сгустке по сравнению с плазмой, имеющей резкую границу. Показано, что этот механизм связан с нестационарностью кильватерной волны, создаваемой лазерным импульсом в начале плато плотности плазмы.

Ключевые слова: лазерный импульс, сгусток электронов, генерация, инжекция.

1. Введение

Интенсивный лазерный импульс в лазерно-плазменном ускорителе генерирует кильватерную волну, поле которой на порядки превышает ускоряющие поля, достижимые с помощью традиционной радиочастотной технологии, что позволяет ускорять сгустки электронов до энергий ~ 8 ГэВ на длине 20 см [1]. Лазерный импульс ультрарелятивистской интенсивности может также при взаимодействии с неоднородной плазмой создавать ультракороткие электронные сгустки [2], представляющие особый интерес при получении коротких рентгеновских импульсов, используемых в физике ультрабыстрых процессов [3]. Длина электронного сгустка, инжектируемого в лазерно-плазменный ускоритель, сильно влияет на его характеристики после ускорения, в частности на его моноэнергетичность, что очень важно при разработке лазеров на свободных электронах, для которых требуется относительный разброс по энергии менее 0.1% [4]. Поэтому исследование физических процессов, приводящих к генерации сгустков электронов наименьшей длины, имеет большое практическое значение.

Один из таких процессов был обнаружен в работе [5], где путем численного моделирования исследовалось взаимодействие лазерного импульса с полуограниченной плазмой, имеющей размытую границу раздела с вакуумом в виде линейного по плотности переходного слоя. Было продемонстрировано, что лазерный импульс ультрарелятивистской интенсивности при прохождении через такую границу плазмы может генерировать электронные сгустки аттосекундной длительности. При этом данный физический процесс является квазиодномерным, а формирование электронного сгустка происходит из электронов, которые находятся вблизи точки перехода линейного по плотности приграничного слоя плазмы в плато.

С.В.Кузнецов. Объединенный институт высоких температур РАН, Россия, 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр.2; e-mail: svk-IVTAN@yandex.ru

Поступила в редакцию 28 февраля 2020 г., после доработки – 7 мая 2020 г.

Теоретический анализ процесса генерации сгустка электронов лазерным импульсом, взаимодействующим с полуограниченной плазмой, в одномерной геометрии показал [6–8], что указанный процесс имеет пороговый характер и реализуется, когда энергия $E_{ос}$ продольных осцилляций электронов после взаимодействия с лазерным импульсом превышает пороговое значение $E_{ос th} = mc^2\gamma_{ph} = mc^2/\sqrt{1 - V_{gr}^2/c^2}$, где V_{gr} – групповая скорость лазерного импульса на плато плотности, а m – масса электрона. Установлено [8], что характер границы раздела плазмы с вакуумом (является она резкой или размытой) не оказывает влияния на пороговую энергию, но приводит к ухудшению характеристик генерируемого сгустка. В настоящей работе проводится численное моделирование процесса формирования сгустков электронов аттосекундной длительности лазерным импульсом, взаимодействующим с размытой границей неоднородной плазмы, для выяснения особенностей механизма генерации сгустков электронов в этих условиях.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу, в которой на границу плазмы нормально к ее поверхности вдоль оси z падает лазерный импульс с несущей частотой, много большей плазменной. Нулевая точка оси z располагается в начале плато плотности плазмы в точке, соответствующей $n(z) = n_0$. В переходном слое ($z < 0$) с характерной толщиной σ концентрация плазмы изменяется согласно зависимости $n(z) = n_0 \exp[-z^2/(2\sigma^2)]$, более реалистичной, чем линейная.

В одномерной геометрии при циркулярной поляризации лазерного импульса продольное движение электронов вдоль оси z описывается уравнениями

$$\frac{dp}{dt} = |e|\frac{\partial\varphi}{\partial z} - mc^2 \frac{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{eA}{mc^2} \right)^2}{2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2} + \left(\frac{eA}{mc^2} \right)^2}}, \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = u = \frac{plm}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2} + \left(\frac{eA}{mc^2} \right)^2}},$$

где $A(z, t)$ – амплитуда огибающей векторного потенциала лазерного импульса; $\varphi(z, t)$ – скалярный потенциал поля разделения зарядов; p и u – импульс и скорость электрона. Для численных расчетов будем представлять электронную компоненту плазмы в виде совокупности электронных макрочастиц, т. е. плоских слоев толщиной $k_p \Delta z = 0.0005$ (k_p – волновое число плазменной волны), движение которых определяется уравнениями (1).

В уравнениях (1) амплитуду и форму лазерного импульса будем считать неизменными, потому что согласно работам [6–9] генерация электронного сгустка происходит на отрезке времени, на котором изменением параметров лазерного импульса можно пренебречь. Для упрощения также будем считать, что его групповая скорость зависит только от концентрации плазмы и для импульса, длина которого много меньше характерного размера переходного слоя, определяется по текущему положению его центра z_L на оси z соотношением

$$V_{gr}(z_L) = V_{gr}(n(z_L)) = c^2 k_0 / \sqrt{c^2 k_0^2 + \omega_p^2(z_L)},$$

где $\omega_p^2(z_L) = 4\pi e^2 n(z_L) / m$, а k_0 – волновое число высокочастотного заполнения лазерного импульса.

Потенциал $\varphi(z, t)$ и поле разделения зарядов $E_z = -d\varphi/dz$, присутствующие в уравнениях (1), находятся из уравнения Пуассона

$$d^2\varphi/dz^2 = 4\pi |e| (n_e - n_i(z)), \quad (2)$$

в котором n_e и n_i – концентрации электронов и неподвижных ионов ($n_i = n(z)$). При интегрировании уравнения (2) для вычисления поля разделения зарядов полагается, что в глубине плазмы в той области, куда еще не проник лазерный импульс, концентрация электронов совпадает с концентрацией ионов, что соответствует заданию граничных условий $\varphi(\infty) = 0$, $d\varphi(\infty)/dz = 0$. При этом концентрация электронной компоненты плазмы вдоль оси z определяется расположением электронных макрочастиц в данный момент времени.

3. Численное моделирование

Численное моделирование процесса генерации сгустка электронов проводилось для лазерного импульса, который в момент времени t_0 проходит через точку, соответствующую началу плато плотности плазмы ($z = 0$), и имеет огибающую

$$a = a_0 \cos^2[(t - t_0) / \tau_L] \operatorname{sgn}(\pi \tau_L / 2 - |t - t_0|),$$

где $a_0 = |e| A_0 / (mc^2) = 6.2$ – безразмерная амплитуда векторного потенциала; τ_L – длительность лазерного импульса, соответствующая его длительности на полувысоте $\tau_{FWHM} = 1.143 \tau_L = 12$ фс. Считается, что групповая скорость V_{gr} распространения лазерного импульса на плато плотности плазмы отвечает гамма-фактору $\gamma_{ph} = 1 / \sqrt{1 - V_{gr}^2(n_0) / c^2} = 7$. Концентрация плазмы определяется из соотношения $k_0 / k_p = \gamma_{ph}$, где $k_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0} / (mc^2)$, $k_0 = 2\pi / \lambda_0$, $\lambda_0 = 1$ мкм. Лазерный импульс при взаимодействии с такой плазмой возбуждает на плато продольные осцилляции электронов с энергией $E_{os} = 7.8617 mc^2$. Таким образом, нами исследуется процесс генерации сгустков электронов в режиме слабой «надпороговости», поскольку $E_{os} / (mc^2) - \gamma_{ph} \ll \gamma_{ph}$.

Для наглядного представления о том, в чем состоит влияние характера границы плазмы на процесс генерации электронного сгустка лазерным импульсом, проходящим через нее, было выполнено моделирование этого процесса для плазмы с переходным слоем толщиной $\sigma = 40$ мкм (рис.1) и плазмы с резкой границей (рис.2). На рис.1 и 2 на фазовой плоскости с координатами z, p показаны распределения электронных макрочастиц в момент начала процесса пересечения траекторий электронов и опрокидывания кильватерной волны, который приводит к самоинжекции электронов в кильватерную волну, создаваемую лазерным импульсом, и к генерации электронного сгустка.

На рис.1 и 2 большая черная точка соответствует электрону, находящемуся в момент времени t_{crf} на фазовой плоскости в точке с координатами z_{crf}, p_{crf} , с которого начинается процесс пересечения траекторий электронов и их самоинжекции в кильватерную волну. Для плазмы с размытой границей первый инжектирующийся электрон является двусторонней точкой сгущения распределения электронов, и в генерирующемся сгустке будут собираться электроны одновременно с двух ветвей распределения. Это означает, что в данном случае процесс инжекции электронов и генерации сгустка происходит более интенсивно, чем в плазме с резкой границей.

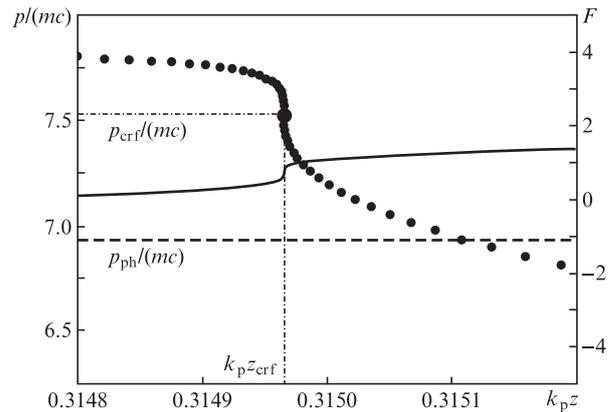


Рис.1. Распределение на фазовой плоскости с координатами z, p электронов (точки) в момент начала процесса генерации сгустка в плазме с переходным слоем толщиной $\sigma = 40$ мкм. Штриховая линия соответствует импульсу $p_{ph} = mc \sqrt{\gamma_{ph}^2 - 1}$, сплошная кривая – силе $F = -|e| E_z / (mc \omega_p)$, действующей на электроны в кильватерной волне.

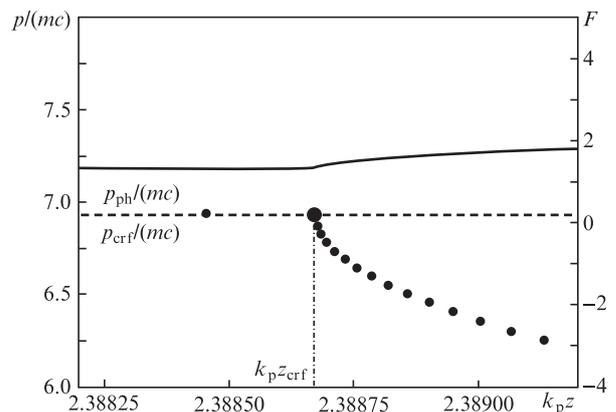


Рис.2. То же, что и на рис.1, но для плазмы с резкой границей.

Другое различие рис.1 и 2 состоит в том, что энергии первого инжектирующегося в кильватерную волну электрона в плазме с резкой и размытой границами являются существенно разными. Из работ [6–8] известно, что в момент начала процесса пересечения траекторий электронов плазмы, который приводит к генерации электронного сгустка, скорость самоинжектирующегося электрона совпадает с фазовой скоростью кильватерной волны в той же точке. В случае резкой границы [6, 7] энергия первого инжектирующегося электрона совпадает с гамма-фактором кильватерной волны γ_{ph} в глубине плазмы, т.е. $p_{crf} = mc\sqrt{\gamma_{ph}^2 - 1}$. Этот электрон имеет центр осцилляций в точке z_{0f} , находящейся от резкой границы плазмы, т.е. от начала плато, на расстоянии, равном амплитуде $A_m = \sqrt{(E_{os} - mc^2)/(2\pi e^2 n_0)}$ его продольных осцилляций после взаимодействия с лазерным импульсом.

Для плазмы с размытой границей из рис.1 следует, что $p_{crf} > mc\sqrt{\gamma_{ph}^2 - 1}$. Это означает, что центр осцилляций рассматриваемого электрона находится в точке, удовлетворяющей соотношению $z_{0f} < A_m$, потому что только при таком условии самоинжекция электрона в кильватерную волну может происходить в той области, в которой гамма-фактор волны не совпадает с γ_{ph} на плато.

Относительно фазовой скорости кильватерной волны, генерируемой лазерным импульсом, следует иметь в виду следующее. В любой точке оси z и в любой момент времени скорость кильватерной волны определяется двумя факторами: групповой скоростью лазерного импульса, которая при прохождении его через переходный слой уменьшается от световой до постоянного значения, задаваемого концентрацией плазмы на плато n_0 , а также предысторией движения электронов, которые в данной точке пространства формируют кильватерную волну. В настоящем исследовании параметры лазерного импульса подобраны таким образом, чтобы изменение групповой скорости импульса при переходе его из приграничного слоя плазмы на плато ее плотности не влияло на движение тех электронов, которые в дальнейшем самоинжектируются в кильватерную волну. На эти и следующие за ними электроны в глубине плазмы действует лазерный импульс, распространяющийся с постоянной групповой скоростью $V_{gr}(n_0)$. Данные электроны формируют регулярную кильватерную волну с потенциалом $\varphi(z - V_{ph}t)$ и постоянной фазовой скоростью $V_{ph} = V_{gr}(n_0)$ до тех пор, пока они не выходят в переходный слой, потому что в процессе колебаний каждого электрона относительно своего центра осцилляций их разность фаз сохраняется. Однако если электрон имеет центр осцилляций в точке с координатой $z_0 < A_m$, то с течением времени он выходит в переходный слой. После возвращения его и прилегающих к нему электронов на плато их энергия осцилляций остается прежней и, как показано в работе [8], удовлетворяет соотношению

$$E_{os} = mc^2 \left[1/\sqrt{1 - u^2/c^2} + k_p^2(z - z_0)^2/2 \right], \quad (3)$$

где z и u – текущая координата и скорость электрона с центром осцилляций в точке z_0 . Но разность фаз колебаний электронов относительно друг друга изменяется, и поэтому в слое плазмы при $z < A_m$ кильватерная волна становится нестационарной. При этом фазовая скорость кильватерной волны, которую формируют данные электроны, как следует из результатов моделирования [5], оказывается выше, чем на плато, где $V_{ph} = V_{gr}(n_0)$ при

$z_0 \geq A_m$. Однако она постепенно снижается до фазовой скорости кильватерной волны в глубине плато, равной $V_{gr}(n_0)$, по мере приближения положений центров осцилляций z_0 электронов, образующих кильватерную волну, к значению A_m .

В начале процесса пересечения траекторий электронов заряд сгустка является малым и слабо влияет на движение других электронов, которые вслед за первым самоинжектирующимся электроном вступают в процесс пересечения их траекторий с траекториями соседних электронов. Тогда из соотношения (3) с учетом совпадения в момент самоинжекции скорости электрона u с фазовой скоростью кильватерной волны $V_{ph}(z_{cr})$ следует, что фаза собственных колебаний электрона относительно его центра осцилляций, при которой он вступает в процесс пересечения траекторий, должна изменяться. При этом изменяться она должна таким образом, чтобы для каждого последующего электрона момент пересечения его траектории с траекторией соседнего электрона наступал на более ранней стадии его собственных колебаний относительно центра осцилляций, потому что фазовая скорость кильватерной волны уменьшается.

Фазу колебания, при которой происходит пересечение траекторий для каждого электрона, удобно выражать в виде разности $z_{cr} - z_0$, которая соответствует отклонению данного электрона от положения его центра осцилляций z_0 . На рис.3 показаны зависимости величины $z_{cr} - z_0$ от положения центра осцилляций z_0 электрона для плазмы с переходным слоем ($\sigma = 40$ мкм) и плазмы с резкой границей, полученные в результате численного моделирования. Для удобства сопоставления этих зависимостей по оси абсцисс отложена величина $z_0 - z_{0f}$, где z_{0f} – положение центра осцилляций электрона, с которого начинается процесс пересечения траекторий. Из рис.3 видно, что в случае плазмы с резкой границей фаза $z_{cr} - z_0$ практически неизменна, т.е. процесс пересечения траекторий каждого последующего электрона происходит примерно так же, как и для предыдущего электрона. В плазме с размытой границей ($\sigma = 40$ мкм) каждый последующий электрон вступает в процесс пересечения траекторий на все более ранней стадии своих колебаний, а значит и раньше инжектируется в кильватерную волну. Это увеличивает интенсивность процесса аккумуляции электронов в генерируемом лазерным импульсом сгустке.

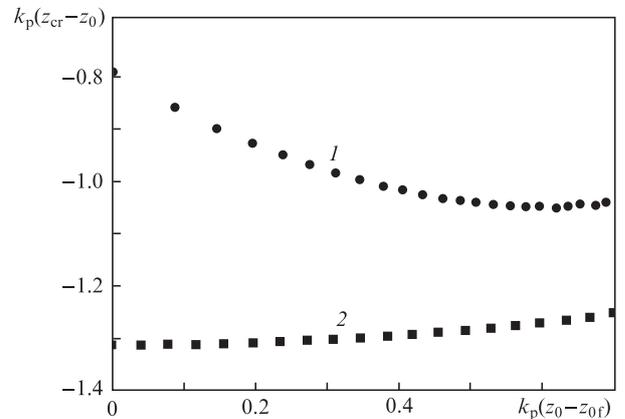


Рис.3. Зависимости фазы $z_{cr} - z_0$ колебаний электрона, вступающего в процесс пересечения траекторий, от положения его центра осцилляций z_0 для плазмы с размытой (1; $\sigma = 40$ мкм) и резкой (2) границами.

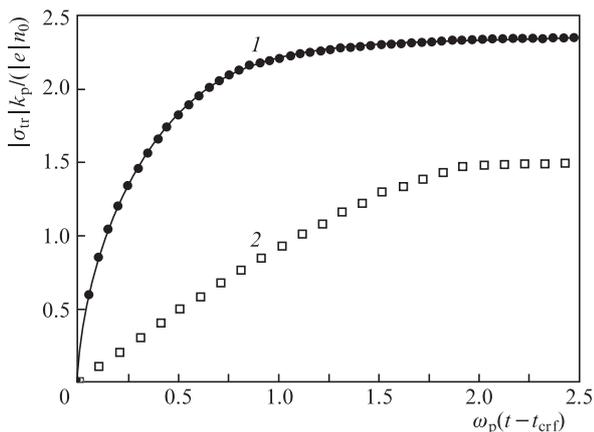


Рис.4. Зависимости от времени плотности заряда в генерируемом сгустке на единицу его поперечного сечения для плазмы с размытой (1; $\sigma = 40$ мкм) и резкой (2) границами.

Результаты моделирования демонстрирует рис.4, где показано, как происходит рост плотности заряда на единицу поперечного сечения генерируемого сгустка для плазмы с размытой и резкой границами. Из него следует, что интенсивность накопления заряда в сгустке для плазмы с размытой границей ($\sigma = 40$ мкм) значительно выше, чем для плазмы с резкой границей. Поэтому можно ожидать, что в данном случае в головной части сгустка электроны будут группироваться в пространстве, т. е. по длине сгустка, более плотно. По той же причине процесс накопления заряда в сгустке для плазмы с размытой границей быстрее достигает насыщения и выходит на некоторое асимптотическое значение раньше, чем для плазмы с резкой границей.

Необходимо подчеркнуть, что представленное выше описание накопления заряда в генерируемом лазерным импульсом сгустке является качественным и в основном относится к начальной стадии этого процесса, пока заряд сгустка мал. В реальности данный процесс имеет очень сложный характер, особенно на поздней стадии генерации сгустка, когда в результате перемешивания и взаимного расталкивания влияние электронов сгустка на захват последующих электронов становится столь существенным, что такой простой подход к анализу движения электронов не может быть применен. Кроме того, на временном промежутке, включающем в себя конец стадии генерации сгустка и начало стадии ускорения, развивается процесс обмена электронами между хвостовой частью сгустка и фоновой плазмой, который не показан на рис.4. В результате некоторая часть тех электронов, которые находятся в хвосте сгустка в дальнейшем выпадают из него или образуют длинный шлейф малоэнергетичных электронов, что влияет на конечную длину электронного сгустка, если учитывать всю совокупность электронов, выделившихся из фоновой плазмы.

Следует, однако, отметить, что электроны, захваченные в сгусток в начальный период его генерации, располагаются по длине сгустка в порядке, близком к последовательности их инжекции. Поэтому приведенные выше качественные соображения о механизме инжекции и группировке электронов в инжектируемом сгустке позволяют предполагать, что из общей массы электронов сгустка путем разделения их по энергии можно выделить головную часть, обладающую достаточно хорошими характеристиками. С этой целью было проведено моделирование про-

цесса генерации электронных сгустков лазерным импульсом, проходящим через границу плазмы с переходным слоем различной толщины. Поскольку эффект расталкивания зарядов влияет на длину сгустка, то имеет смысл разделить электроны по энергии уже на стадии ускорения, когда лидирующий в сгустке электрон достиг достаточно большого значения энергии $E_{ld} \gg mc^2$. В данном случае скорость большинства частиц сгустка становится настолько близкой к световой, что в дальнейшем длина сгустка практически не увеличивается.

На рис.5 для сгустков, получаемых при пересечении лазерным импульсом границы плазмы с переходными слоями разных толщин, показаны зависимости характеристик сгустка от энергии отрезания $E_{cut} < E_{ld}$ при энергии лидирующего электрона сгустка $E_{ld} = 40mc^2$, дости-

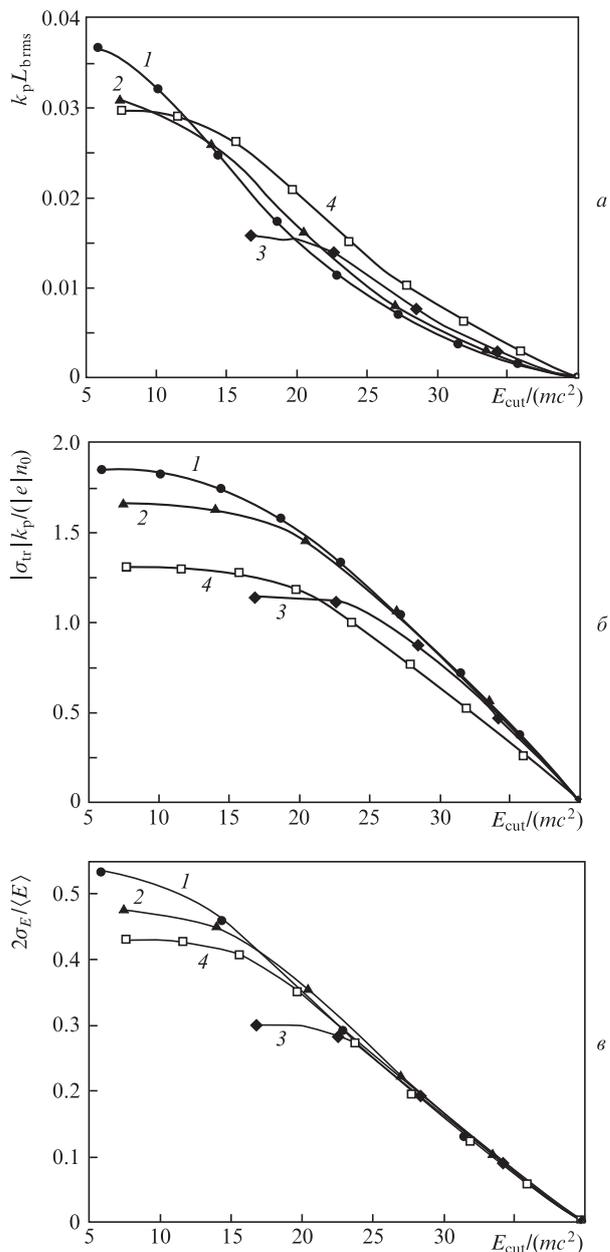


Рис.5. Зависимости от энергии отрезания длины сгустка $L_{b,rms}$ (а), плотности заряда в сгустке на единицу его поперечного сечения (б) и относительного разброса энергий E электронов сгустка (в) для плазмы с переходным слоем толщиной $\sigma = 40$ (1), 100 (2) и 150 мкм (3), а также для плазмы с резкой границей (4).

гаемой на длине ускорения ~ 10 мкм после самоинжекции электрона в кильватерную волну. Путем выбора энергии отрезания E_{cut} можно управлять характеристиками выделенной части электронов сгустка. Из рис.5,а,в видно, что разделение электронов по энергии позволяет улучшить характеристики выделенной части сгустка: его длину и разброс энергий электронов. Однако чрезмерное уменьшение разности $E_{\text{id}} - E_{\text{cut}}$ уменьшает и плотность заряда в этой части сгустка на единицу его поперечного сечения, полную величину которой без «обрезания» распределения электронов по энергии можно оценить по формуле

$$\sigma_{\text{tr}} \approx -|e|n_0k_p^{-1} \sqrt{2[E_{\text{os}}l/(mc^2) - \gamma_{\text{ph}}]}, \quad (4)$$

полученной ранее для плазмы с резкой границей [6, 7]. Отметим, что согласно работе [8] формула (4) с достаточной точностью дает оценку плотности заряда сгустка на единицу его поперечного сечения и в случае плазмы, имеющей на границе переходный слой с линейным профилем плотности. Это указывает на то, что механизм прекращения процесса накопления электронов в генерируемом сгустке носит универсальный характер и слабо зависит от типа границы плазмы.

Из рис.5 также видно, что толщина переходного слоя очень слабо влияет на разброс энергий электронов и плотность заряда в выделенной части сгустка, но его длина заметно зависит от этого параметра. Отсюда следует, что эффективность механизма группировки электронов в сгустке, генерируемом лазерным импульсом, проходящим через границу плазмы с переходным слоем, существенно зависит от толщины слоя. Точное определение оптимального значения толщины переходного слоя требует исследования данной задачи аналитическими методами, что и будет выполнено в дальнейшем. Из приведенных на рис.5,а результатов численного моделирования следует, что более короткие электронные сгустки генерируются в плазме с переходным слоем толщиной $\sigma = 40$ мкм. В данном случае при энергии отрезания $E_{\text{cut}} = 25mc^2$ можно получить сгусток длительностью ~ 30 ас. При этом относительный разброс энергий электронов выделенного сгустка составляет $\sim 25\%$, а плотность заряда в сгустке на единицу его поперечного сечения $|\sigma_{\text{tr}}| \approx 1.2|e|n_0k_p^{-1}$.

В случае двумерной геометрии задачи заряд сгустка зависит также от характерной ширины лазерного импульса σ_L в поперечном направлении. Однако она должна быть довольно большой, $k_p\sigma_L \gg \sqrt{a_0}$ (см., напр., [5, 6, 10]), чтобы считать движение электронов достаточно близким к одномерному, как предполагается в настоящем исследовании. Используемые в данных расчетах параметры лазерного импульса удовлетворяют указанному соотношению, если принять, что характерный поперечный размер лазерного импульса $\sigma_L \approx 20\lambda_0$. В этом случае

можно считать, что полученные выше результаты исследования в одномерной геометрии процесса генерации сгустка электронов лазерным импульсом, проникающим в плазму с размытой границей, дают качественно верную картину особенностей действия механизма, лежащего в основе данного процесса. Тогда, учитывая формулу (4) и используя подход, изложенный в работах [5, 6], для заряда сгустка можно получить оценку $q_{\text{tr}} \approx 100$ пК.

4. Заключение

Проведенное в одномерной геометрии численное моделирование процесса генерации электронных сгустков при прохождении лазерного импульса ультрарелятивистской интенсивности через границу плазмы с переходным слоем позволяет прояснить основные качественные характеристики этого физического явления. Показано, что вследствие изменения фазовой скорости кильватерной волны, генерируемой лазерным импульсом вблизи начала плато плотности плазмы, существует механизм, который для плазмы с размытой границей способствует более интенсивной генерации сгустка, чем в случае плазмы с резкой границей. Вследствие этого аккумулируемые в сгустке электроны более плотно группируются в пространстве по длине сгустка и формируются сгустки с более плотной головной частью. Выделив эти электроны из общей массы электронов сгустка, для плазмы с размытой границей можно получить более качественные по характеристикам сгустки, чем для плазмы с резкой границей. Изменяя плотность плазмы и размер переходного слоя, а также выбирая энергию отрезания, можно управлять параметрами сгустка и подбирать наиболее оптимальные их значения для сгустка, инжектируемого в лазерно-плазменный ускоритель.

1. Gonsalves A.J., Nakamura K., Daniels J., Benedetti C., Pieronek C., de Raadt T.C.H., Steinke S., Bin J.H., Bulanov S.S., van Tilborg J., Geddes C.G.R., Schroeder C.B., Toth Cs., Esarey E., Swanson K., Fan-Chiang L., Bagdasarov G., Bobrova N., Gasilov V., Korn G., Satorov P., Leemans W.P. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 084801 (2019).
2. Weikum M., Li F., Assmann R., Sheng Z., Jaroszynski D. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res., Sect. A*, **829**, 33 (2016).
3. Lewenstein M. *Science*, **297**, 1131 (2002).
4. Corde S., Ta Phuoc K., Lambert G., Fitour R., Malka V., Rousse A., Beck A., Lefebvre E. *Rev. Mod. Phys.*, **85**, 1 (2013).
5. Li F.Y., Sheng Z.M., Liu Y., Meyer-ter-Vehn J., Mori W.B., Lu W., Zhang J. *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 135002 (2013).
6. Кузнецов С.В. *Квантовая электроника*, **48**, 945 (2018) [*Quantum Electron.*, **48**, 945 (2018)].
7. Кузнецов С.В. *ЖЭТФ*, **150**, 195 (2016) [*JETP*, **123**, 169 (2016)].
8. Кузнецов С.В. *Письма в ЖТФ*, **45**, 48 (2019) [*Tech. Phys. Lett.*, **45**, 683 (2019)].
9. Vieira J., Fiúza F., Silva L.O., Tzoufras M., Mori W.B. *New J. Phys.*, **12**, 045025 (2010).
10. Kostyukov I., Pukhov A., Kiselev S. *Phys. Plasmas*, **11**, 5256 (2004).