Исследование поведения орбитального углового момента светового поля при астигматической модовой конверсии

В.Г.Волостников

Рассмотрено поведение орбитального углового момента светового поля как суперпозиции пучков Эрмита–Гаусса при астигматической модовой конверсии. Получено аналитическое выражение для орбитального углового момента таких полей. Найдены выражения для различных линейных комбинаций пучков Эрмита–Гаусса. Показано, что астигматическая модовая конверсия эквивалентных с точки зрения орбитального углового момента исходных световых полей приводит к существенно различным конечным результатам.

Ключевые слова: *когерентная оптика, спиральные пучки света, орбитальный угловой момент.*

1. Введение

Модовая конверсия как средство изменения орбитального углового момента (ОУМ) светового поля известна уже достаточно давно (см. [1] и приведенные там ссылки). Характерной чертой данного преобразования является то, что ОУМ при этом радикально меняется в зависимости от вида исходного поля.

В работе [2] была теоретически исследована и экспериментально получена астигматическая модовая конверсия (АМК) различных пучков Эрмита–Гаусса. Оптическая система, состоящая из сферических и цилиндрических линз и осуществляющая астигматическое преобразование, подробно описана в [1]. В работах [3, 4] показано, что линейные комбинации мод Эрмита–Гаусса могут иметь значительный угловой момент. Асимптотическое поведение таких световых полей было рассмотрено в [4]. Представляет интерес вопрос: как меняется ОУМ линейной комбинации мод Эрмита–Гаусса при АМК?

Конечно, как интегральная характеристика угловой момент не является полной характеристикой светового поля, однако известно, что при АМК изменение орбитального момента зависит от вида исходного поля. Например, поле, не имеющее ОУМа, может его приобрести, и наоборот, поле с угловым моментом может его в результате конверсии потерять. Характерно, что исходный пучок Эрмита–Гаусса с астигматической фазовой весовой функцией обладает тем же ОУМом, что и результирующий пучок Лагерра–Гаусса. Тем не менее очевидно, что исходное поле лишено оптических вихрей. В работах [3, 4] показано, что линейные комбинации мод Эрмита–Гаусса могут содержать оптические вихри и иметь ненулевой ОУМ.

Примеры невращающихся при распространении световых полей с ненулевым ОУМом можно найти также в [4, 5]. Работа [6] посвящена связи ОУМа с вращением светового поля при распространении. На первый взгляд, кажется несколько необычным, что сумма полей, не обладающих по отдельности орбитальным угловым моментом, этим моментом обладает. Однако понятно, что система функций Эрмита–Гаусса является полной и ортогональной, и любое световое поле с конечной энергией может быть представлено в виде их суперпозиции. Наиболее наглядно смысл этого становится понятным, если рассмотреть моду Лагерра–Гаусса с ОУМом, равным –1.

Цель настоящей работы – исследование поведения ОУМа характерных световых полей до и после астигматической конверсии. Получены выражения для ОУМа при АМК характерных световых полей, являющихся линейной комбинацией пучков Эрмита–Гаусса.

2. ОУМ светового поля

Рассмотрим плоскополяризованное поле E, определяемое выражениями

$$E_x = F(x, y, l)\exp(\mathrm{i}kl - \mathrm{i}\omega t),$$

$$E_y = 0,$$

$$E_l = g(x, y, l)\exp(\mathrm{i}kl - \mathrm{i}\omega t).$$

Из уравнения Максвелла $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$ найдём в параксиальном приближении связь продольной и поперечной составляющих электрического вектора:

$$g(x, y, l) \approx \frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Из уравнения Максвелла

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mathrm{i}k}\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$$

получим компоненты магнитного поля:

$$B_x \approx 0,$$

В.Г.Волостников. Самарский филиал Физического института им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: coherent@fian.smr.ru

Поступила в редакцию 28 февраля 2020 г., после доработки – 26 мая 2020 г.

$$B_y \approx F(x,y,l)\exp(\mathrm{i}kl - \mathrm{i}\omega t),$$

$$B_l \approx \frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial F}{\partial x}\exp(\mathrm{i}kl - \mathrm{i}\omega t).$$

Усреднённая по времени плотность ОУМа вдоль оси l определяется выражением

$$M_l = \frac{1}{8\pi c}\mathrm{Re}[\boldsymbol{r},[\varepsilon\boldsymbol{E},\bar{\boldsymbol{B}}]]_l,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды. Подставляя в него составляющие электрического и магнитного полей, получаем

$$\begin{aligned} M_l &= \mathrm{Re}[-x(\varepsilon E_x\bar{B}_l - \varepsilon E_l\bar{B}_x) - y(\varepsilon E_y\bar{B}_l - \varepsilon E_l\bar{B}_y)\\ &= \frac{\varepsilon}{8\pi ck}\mathrm{Im}\left(x\bar{F}\frac{\partial F}{\partial y} - y\bar{F}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\\ &= -\frac{\varepsilon}{8\pi ck}\mathrm{Im}\left(xF\frac{\partial\bar{F}}{\partial y} - yF\frac{\partial\bar{F}}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

$$L_l = \iint M\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad E = \iint F\bar{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Затем подставим в эти выражения представление поля в виде суперпозиции мод Лагерра–Гаусса, используя их ортогональность:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm}LG_{nm}(x,y),\\ \frac{L_l}{E} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} m\frac{(n+m)!(|c_{nm}|^2 - |c_{n\,-m}|^2)}{2^m n!}\\ &\quad\times\left[\sum_{n,m=0}^{\infty} m\frac{(n+m)!(|c_{nm}|^2 + |c_{n\,-m}|^2)}{2^m n!}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

3. АМК световых полей как суперпозиции пучков Эрмита–Гаусса и результирующий ОУМ

Астигматическая модовая конверсия A в математическом виде может быть представлена следующей формулой:

$$\begin{aligned} A(\alpha, HG_{nm}(x,y)) &= G_{nm}(\alpha)\\ &= \exp[\mathrm{i}\varphi(x,y,\alpha)/8]\exp[\mathrm{i}\pi(n+m)/4]\\ \times\iint_{R^2}&\exp[-\mathrm{i}(x\xi + y\eta) + \mathrm{i}\varphi(\xi,\eta,\alpha)]HG_{nm}(\xi,\eta)F(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \end{aligned}$$

где

$$HG_{nm} = H_{nm}(x,y)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

– пучки Эрмита–Гаусса;

$$\varphi(\xi,\eta,\alpha) = (\xi^2 - \eta^2)\cos(2\alpha) + 2\xi\eta\sin(2\alpha);$$

параметр α имеет физический смысл угла поворота оптической системы, состоящей из сферических и цилиндрических линз и осуществляющей астигматическое преобразование, относительно оптической оси.

Для мод Эрмита–Гаусса эта конверсия преобразует их в моды Лагерра–Гаусса (при $\alpha = \pi/4$) [3] или в моды Эрмита–Гаусса (при $\alpha = 0$). Преобразование в моду Эрмита–Гаусса является нетривиальным – результирующая мода Эрмита–Гаусса имеет дополнительный фазовый множитель [3]:

$$\begin{aligned} A(\pi/4, HG_{nm}(x,y)) &= G_{nm}(\pi/4) = \exp(\mathrm{i}xy/4)\exp[\mathrm{i}\pi(n+m)/4]\\ &\times\iint_{R^2}\exp[-\mathrm{i}(x\xi + y\eta)]HG_{nm}(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\ &= \begin{cases} (-1)^m 2^n m! LG_{mn-m}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}},\dfrac{y}{2\sqrt{2}}\right) & \text{при } n \geqslant m,\\ (-1)^n 2^m n! LG_{nm-n}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{2}},\dfrac{x}{2\sqrt{2}}\right) & \text{при } n \leqslant m, \end{cases}\\ A(0, HG_{nm}(x,y)) &= G_{nm}(0) = \exp[\mathrm{i}(x^2 - y^2)/4]\\ &\times\exp[\mathrm{i}\pi(n+m)/4]\iint_{R^2}\exp[-\mathrm{i}(x\xi + y\eta) + \mathrm{i}(\xi^2 - \eta^2)]\\ &\times HG_{nm}(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = (-\mathrm{i})^m HG_{nm}(x,y). \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть исходные поля имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= HG_n(x)HG_{n+1}(y),\\ F_2 &= HG_n(x)HG_{n+1}(y) + HG_{n+1}(x)HG_n(y). \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим их модовые астигматические конверсии (при $\alpha = 0$) следующим образом:

$$\begin{aligned} A(\alpha, F_1) &= G_1(\alpha) = A(\alpha, HG_n(x)HG_{n+1}(y)),\\ A(\alpha, F_2) &= G_2(\alpha) = A(\alpha, HG_n(x)HG_{n+1}(y)\\ &\quad + HG_{n+1}(x)\,HG_n(y)) = G_{2\,n\,n+1}(\alpha) + G_{2\,n+1\,n}(\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

Эти поля выбраны потому, что они обладают сходными свойствами: оба вещественны и структурно устойчивы при распространении, однако их астигматические конверсии имеют совершенно разные ОУМы.

Интересно и важно отметить, что модовая астигматическая конверсия $G_2(\alpha)$ при $\alpha = 0$ совпадает с точностью до постоянного множителя $(-\mathrm{i})^{n+1}$ с суперпозицией полей, приведенной в [4, 5], поэтому и удельный ОУМ будет тем же:

$$\left.\frac{L_l(G_{n\,n+1}(\alpha) + G_{n+1\,n}(\alpha))}{E(G_{n\,n+1}(\alpha) + G_{n+1\,n}(\alpha))}\right|_{\alpha=0} = -(n+1).$$

Это свойство справедливо и для других случаев, рассмотренных в [4, 6]. Пусть, например, световое поле имеет вид

$$\begin{aligned} F(x,y) &= HG_n(x)HG_{n+1}(y) + A_1 HG_{n+1}(x)HG_n(y)\\ &\quad + A_2 HG_{n+2}(x)HG_{n-1}(y). \end{aligned}$$

Его АМК

$$G(\alpha = 0, x, y) = (-\mathrm{i})^{n+1}\,[HG_n(x)HG_{n+1}(y)$$

$$+\,\mathrm{i}A_1 HG_{n+1}(x)HG_n(y) + \mathrm{i}^2 A_2 HG_{n+2}(x)HG_{n-1}(y)].$$

Таким образом, вопрос о модовой астигматической конверсии световых полей типа (5) свёлся к задаче, подробно изученной в [4, 6]. Из приведённых выражений видно, что вещественное световое поле при АМК может приобретать существенно ненулевой ОУМ.

Рассмотрим астигматическую конверсию полученных выше световых полей. Пусть поле имеет вид

$$F = HG_n(x)HG_{n+1}(y) + \mathrm{i}HG_{n+1}(x)HG_n(y).$$

АМК в этом случае представляет интерес при $\alpha = \pi/4$, т. к. при $\alpha = 0$ модовая конверсия даёт $L = 0$. После АМК имеем

$$A(\pi/4, F) = (-1)^n[2^{n+1}n!LG_n^{(-1)}(x,y) + \mathrm{i}2^{n+1}n!LG_n^{(1)}(x,y)].$$

Удельный орбитальный момент такого поля также равен нулю:

$$\frac{L_l}{E} = 0.$$

Рассмотрим теперь поле [6]

$$F = HG_n(x)HG_n(y) + \mathrm{i}HG_{n+1}(x)HG_{n-1}(y).$$

Из работы [4] следует, что эта комбинация имеет то же асимптотическое значение ОУМа, что и поле (2), однако для АМК в данном случае получим выражение

$$A(\pi/4, F) = (-1)^n 2^n n!LG_n^{(0)}(x,y)$$

$$+\,(-1)^{n-1}\mathrm{i}2^{n+1}(n-1)!LG_{n-1}^{(2)}(x,y).$$

Соответственно удельный ОУМ

$$\frac{L_l}{E} = -\frac{2(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2 + (n-1)!(n+1)!} = -\left[\frac{2}{n/(n+1)} + 1\right].$$

Асимптотическое значение ОУМа при $n \to \infty$ равно -1. Таким образом, при АМК равенство ОУМов для этих двух случаев не выполняется.

На рис.1 показаны распределения интенсивности и фазы поля (5) при $n = 4$ и результат его АМК для $\alpha = \pi/4$.

Пусть теперь световое поле представляет собой суперпозицию трёх мод Эрмита – Гаусса (весовые коэффициенты взяты из [6]):

$$F(x,y) = HG_n(x)HG_{n+1}(y) + \mathrm{i}A_1 HG_{n+1}(x)HG_n(y)$$

$$+\,\mathrm{i}^2 A_2 HG_{n+2}(x)HG_{n-1}(y), \qquad (6)$$

$$A_1 = \sqrt{2}, \ A_2 = 1.$$

Найдём его АМК:

$$A(\alpha, F) = (-1)^n 2^{n+1} n!LG_n^{(-1)}(x,y) + (-1)^n 2^{n+1} A_1 n!LG_n^{(1)}(x,y)$$

$$+\,\mathrm{i}^2(-1)^{n-1}2^{n+2}A_2(n-1)!LG_{n-1}^{(3)}(x,y).$$

Удельный ОУМ такого поля для случая, рассмотренного в [6], определяется выражением

$$\frac{L_l}{E} = \frac{\frac{1}{2}n!(n+1)! + \frac{3}{2}(n-1)!(n+1)!}{\frac{1}{2}n!(n+1)! + n!(n+1)! + \frac{1}{2}(n-1)!(n+1)!}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{n+2}{n}\right)^{-1}.$$

Асимптотическое значение ОУМа при $n \to \infty$ равно 1. На рис.2 показаны распределения интенсивности и фазы поля (6) при $n = 4$ и результат его АМК ($\alpha = \pi/4$).

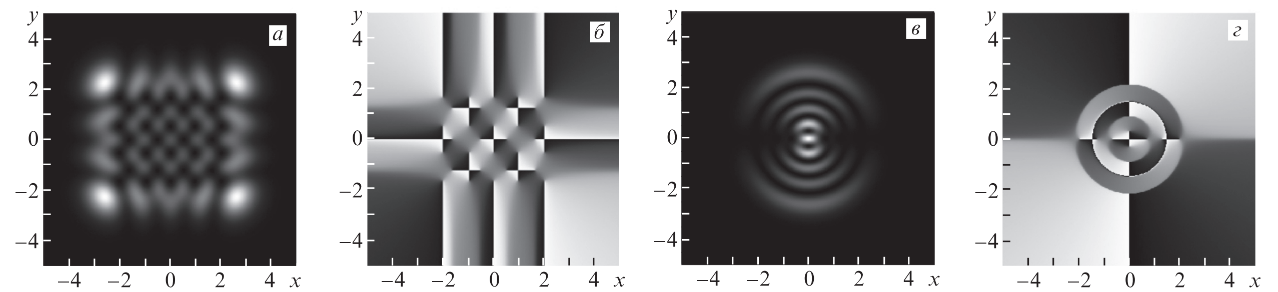

Рис.1. Распределения амплитуды (*а*, *в*) и фазы (*б*, *г*) поля (5) до (*а*, *б*) и после (*в*, *г*) АМК ($\alpha = \pi/4$).

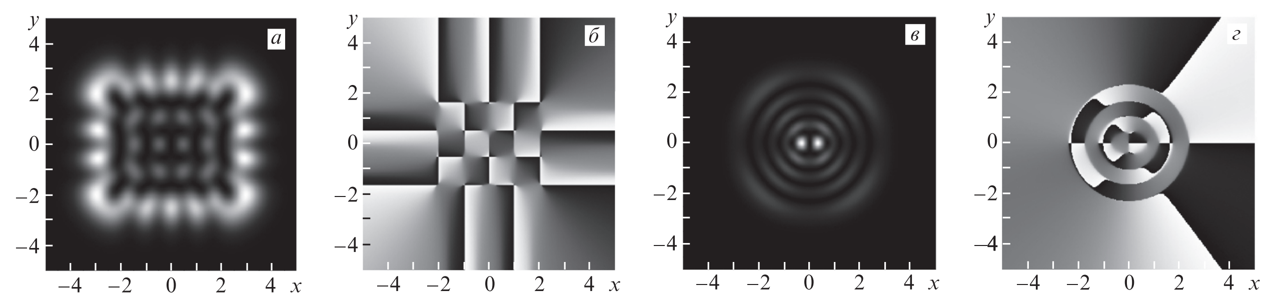

Рис.2. Распределения амплитуды (*а*, *в*) и фазы (*б*, *г*) поля (6) до (*а*, *б*) и после (*в*, *г*) АМК ($\alpha = \pi/4$).

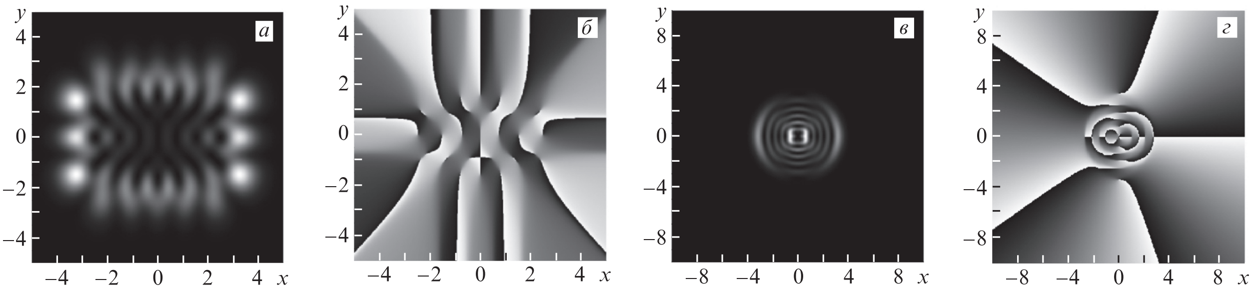

Рис.3. Распределения амплитуды (*а*, *в*) и фазы (*б*, *г*) поля (8) до (*а*, *б*) и после (*в*, *г*) АМК ($\alpha = \pi/4$).

Возьмём теперь «симметричную» комбинацию (весовые коэффициенты взяты из [6]), являющуюся результатом модовой конверсии симметричной комбинации полей:

$$F(x,y) = -\mathrm{i}A_{-1}HG_{n-1}(x)HG_{n+2}(y) + HG_n(x)HG_{n+1}(y) + \mathrm{i}A_1 HG_{n+1}(x)HG_n(y). \quad (7)$$

Её АМК ($\alpha = \pi/4$) определяется выражением

$$A(\alpha,F) = -\mathrm{i}(-1)^{n-1}A_{-1}2^{n+2}(n-1)!\,LG_{n-1}^{(-3)}(x,y) + 2^{n+1}(-1)^n n!\,LG_n^{(-1)}(x,y) + \mathrm{i}2^{n+1}(-1)^n n!\,A_1 LG_n^{(1)}(x,y).$$

В этом случае ОУМ будет следующим:

$$\frac{L_l}{E} = \frac{-5/4 + 1/4}{1/2 + 1/4 + 1/4} = -1.$$

Наконец, возьмём суперпозицию из четырёх мод Эрмита–Гаусса (весовые коэффициенты взяты из [6]):

$$F = HG_n(x)HG_{n+1}(y) + \mathrm{i}A_1HG_{n+1}(x)HG_n(y) + \mathrm{i}^2A_2HG_{n+2}(x)HG_{n-1}(y) + \mathrm{i}^3A_3HG_{n+3}(x)HG_{n-2}(y),$$

$$n \geqslant 2,\; A_1 = A_2,\; A_3 = 1,\; A_2 = (1+\sqrt{5})/2. \quad (8)$$

Найдём результат её АМК:

$$A(\alpha,F) = (-1)^n 2^{n+1} n!\,LG_n^{(-1)}(x,y) + \mathrm{i}A_1 2^{n+1}(-1)^n n!\,G_n^{(1)}(x,y) + \mathrm{i}^2(-1)^{n-1}A_2 2^{n+2}(n-1)!\,LG_n^{(3)}(x,y) + \mathrm{i}^3(-1)^{n-2}A_3 2^{n+3}(n-2)!\,LG_n^{(5)}(x,y). \quad (9)$$

Для ОУМа получим выражение

$$\frac{L_l}{E} = \frac{2 + 2\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^2}{1 + \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right]^2} = 2.$$

На рис.3 показаны распределения интенсивности и фазы поля (8) при $n = 4$ и результат его АМК. Сравним этот результат с результатом, соответствующим симметричной комбинации:

$$F(x,y) = -\mathrm{i}A_{-2}HG_{n-1}(x)HG_{n+2}(y) + A_{-1}HG_n(x)HG_{n+1}(y) + \mathrm{i}A_1HG_{n+1}(x)HG_n(y) + \mathrm{i}^2A_2HG_{n+2}(x)HG_{n-1}(y).$$

Для этого поля АМК описывается выражением

$$A(\alpha,F) = -\mathrm{i}(-1)^{n+2}2^{n-1}(n-1)!\,A_{-2}LG_{n-1}^{(-3)}(x,y) + A_{-1}2^{n+1}(-1)^{n+1}n!\,LG_n^{(-1)}(x,y) + \mathrm{i}A_1 2^{n+1}(-1)^n n!\,LG_n^{(1)}(x,y) + \mathrm{i}^2A_2 2^{n+2}(-1)^{n-1}(n-1)!\,LG_{n-1}^{(3)}(x,y),$$

а удельный ОУМ будет нулевым:

$$\frac{L_l}{E} = -6A_{-2}^2 + 6A_2^2 = 0.$$

В работе [4] показано, что для поля (8) и для симметричной комбинации асимптотические ОУМы одинаковы. Из проведённого выше рассмотрения видно, что и для этих комбинаций равенство ОУМов после АМК также не выполняется.

4. Заключение

Таким образом, проведено исследование изменения ОУМа при АМК. Установлено, что ОУМ радикально изменяется. Более того, даже поля, имеющие одинаковый ОУМ, при АМК приобретают совершенно различные его значения. Например, это справедливо для вещественных структурно устойчивых световых полей.

Автор выражает благодарность С.А.Самагину за помощь в проведении численных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №20-02-00671А.

1. Allen L. *Phys. Rev. A*, **45**, 8185 (1992).
2. Abramochkin E., Volostnikov V. *Opt. Commun.*, **83**, 123 (1991).
3. Kotlyar V., Kovalev A. *J. Opt. Soc. Am. A*, **31**, 274 (2014).
4. Волостников В.Г. *Компьютерная оптика*, **39** (4), 459 (2015).
5. Волостников В.Г. *Методы анализа и синтеза когерентных световых полей* (М.: Физматлит, 2014).
6. Волостников В.Г. *Компьютерная оптика*, **40** (2), 147 (2016).