Нелинейные волны в тонкой пленке диэлектрика на поверхности топологического изолятора

А.И.Маймистов, Е.И.Ляшко, С.О.Елютин

Исходя из дисперсионного соотношения для волны, локализованной в тонкой пленке нелинейного диэлектрика, который расположен на поверхности топологического изолятора, выведена система уравнений, описывающая распространение поверхностной волны. Показано, что продольная и поперечная касательные компоненты вектора электрического поля связаны из-за нелинейности пленки и периодически изменяются в процессе распространения. Обнаружено, что период вращения этого вектора определяется аксионным зарядом топологического диэлектрика и нелинейной восприимчивостью тонкой пленки.

Ключевые слова: *тонкая пленка, топологический изолятор, дисперсионное соотношение, локализация волн, бегущие волны, нелинейные волны.*

1. Введение

Целый ряд явлений нелинейной оптики исследуется в тонких пленках, представляющих собой слой поляризующегося материала толщиной, существенно меньшей длины волны электромагнитного излучения. Первые работы в этом направлении были посвящены изучению оптической бистабильности [1–7] и смежным вопросам, например динамическому хаосу [8–10]. На основе модели тонкой пленки изучались многие нелинейные оптические процессы, происходящие на границе раздела сред. Здесь надо отметить исследования когерентных переходных процессов, в частности сверхизлучения [11–14] и фотонного эха [15], отражения и преломления ультракоротких импульсов [1, 2, 6, 16–24], параметрических процессов [25–28]. Чаще всего предполагалось, что нелинейные свойства тонкой пленки обусловлены присутствием в ней резонансных (двухуровневых или трехуровневых) атомов. Однако нелинейные свойства пленки могут быть присущи ей самой, например в случае ферроэлектрических сред [29], полупроводников [30], полимеров [23, 31] и металлов [32, 33].

Для существования поверхностной волны необходимо, чтобы диэлектрическая проницаемость одной из сред была отрицательной. Это условие выполняется для поверхности раздела металл–диэлектрик. Отрицательную диэлектрическую проницаемость имеют искусственно созданные среды – метаматериалы [34, 35] и гиперболические среды [36, 37]. Однако если на поверхности раздела двух диэлектриков с положительными диэлектрическими проницаемостями расположена тонкая пленка поляризующегося материала, то наведенные в нем токи смещения могут также обеспечивать существование поверхностной волны. Тем самым использование тонких пленок расширяет область существования поверхностных волн.

А.И.Маймистов, Е.И.Ляшко, С.О.Елютин. Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; e-mail: aimaimistov@gmail.com

Поступила в редакцию 9 октября 2020 г.

Известно, что при прохождении через границу раздела различных топологических изоляторов (с обычными диэлектриками) происходит поворот векторов магнитного и электрического полей [38–40]. По этой причине нет отдельно поверхностных ТЕ или ТМ волн и поверхностная волна является гибридной – все компоненты ее полей ненулевые. В этом состоит особенность поверхностных волн на границе раздела диэлектрик–топологический изолятор.

В настоящей работе исследовано распространение электромагнитной волны, локализованной в тонкой пленке нелинейного диэлектрика, расположенного на границе раздела топологического изолятора и обычного диэлектрика. Поскольку толщина пленки меньше длины волны излучения, макроскопическое описание полей внутри пленки невозможно, и наличие пленки проявляется через условия непрерывности/разрывности компонент полей и индукций [1, 2, 41]. Эти условия применительно к рассматриваемой ситуации представлены в разд.2. Нелинейное дисперсионное соотношение для поверхностной волны получено в разд.3. Укороченные волновые уравнения для касательных компонент медленно меняющегося в пространстве и во времени электрического поля выведены в разд.4. Решение волновых уравнений приведено в разд.5. Показано, что касательные поперечная и продольная компоненты огибающей электрического поля периодически меняются во времени и в пространстве так, что касательный вектор электрического поля вращается в плоскости раздела с определенной частотой. Нормальная компонента вектора электрического поля меняется синхронно с продольной компонентой.

2. Роль поверхностных токов на границе раздела

Распространение электромагнитной волны в диэлектрике или в топологическом изоляторе описывается системой уравнений Максвелла (свободных зарядов и токов нет) [42]

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad (1)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0. \qquad (2)$$

При этом в диэлектрике индукции и поля связаны соотношениями $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$, а в топологическом изоляторе – соотношениями $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} \equiv \boldsymbol{B} - \alpha\theta\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{\mathrm{a}} \equiv \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} + \alpha\theta\boldsymbol{B}$. Здесь α – постоянная тонкой структуры, а параметр θ, называемый аксионным зарядом [42], равен нулю в обычном диэлектрике и $\pi(\mathrm{mod}2\pi)$ в топологическом изоляторе [40]. При переходе волны из одной среды в другую напряженности полей и индукций изменяются согласно условиям непрерывности на границе раздела.

Пусть оси координат выбраны так, что нормаль к плоскости раздела $\boldsymbol{n}$ направлена вдоль оси x, а орты $\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{e}_y$ осей z и y лежат в плоскости раздела, причем ось z направлена вдоль волнового вектора поверхностной волны, а ось y перпендикулярна ему. Условия непрерывности выводятся из уравнений (1) и (2). Если по обе стороны от границы раздела расположены среды с различными значениями θ, то выполняются следующие условия [43, 44]:

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{D}^{(1)} - \boldsymbol{D}^{(2)})\boldsymbol{n} = \alpha(\theta^{(2)} - \theta^{(1)})\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{n},\\
&(\boldsymbol{H}^{(1)} - \boldsymbol{H}^{(2)})\boldsymbol{e}_{z,\,y} = \alpha(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\boldsymbol{E}^{(1)}\boldsymbol{e}_{z,\,y},\\
&(\boldsymbol{B}^{(1)} - \boldsymbol{B}^{(2)})\boldsymbol{n} = 0, \ (\boldsymbol{E}^{(1)} - \boldsymbol{E}^{(2)})\boldsymbol{e}_{z,\,y} = 0.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь и далее верхний индекс указывает номер среды. Выражения (3) означают, что по поверхности раздела течет ток

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{a}} = \frac{c\alpha}{4\pi}(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\boldsymbol{E}^{(1)} \times \boldsymbol{n},$$

имеющий топологическую природу. Его направление определяется ориентацией границы раздела и разностью чисел $\theta^{(1,2)}$. Как и в эффекте Холла, ток $\boldsymbol{j}_{\mathrm{a}}$ перпендикулярен электрическому полю.

Если на границе раздела расположена тонкая (толщиной менее длины волны) пленка вещества, которая характеризуется поляризацией $\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}$, то условия непрерывности (3) (их вывод при $\theta = 0$ и в отсутствие тонкой пленки можно найти в [45], а при учете тонкой пленки – в [1–10]) модифицируются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{D}^{(1)} - \boldsymbol{D}^{(2)})\boldsymbol{n} = \alpha(\theta^{(2)} - \theta^{(1)})\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{n},\\
&(\boldsymbol{B}^{(1)} - \boldsymbol{B}^{(2)})\boldsymbol{n} = 0, \ (\boldsymbol{E}^{(1)} - \boldsymbol{E}^{(2)})\boldsymbol{e}_{z,\,y} = 0,\\
&(\boldsymbol{H}^{(1)} - \boldsymbol{H}^{(2)})\boldsymbol{e}_z = \alpha(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\boldsymbol{E}^{(1)}\boldsymbol{e}_z + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{e}_y,\\
&(\boldsymbol{H}^{(1)} - \boldsymbol{H}^{(2)})\boldsymbol{e}_y = \alpha(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\boldsymbol{E}^{(1)}\boldsymbol{e}_y - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Согласно (4) магнитные индукции испытывают разрыв, определяемый поверхностными токами: топологическим током $\boldsymbol{j}_{\mathrm{a}}$ и током смещения в тонкой пленке.

3. Поля вне границы раздела и дисперсионное соотношение

В выбранной системе координат напряженности всех полей зависят только от переменных x, z и времени. В этом случае для компонент электрического поля E_y и магнитного поля H_y можно записать волновые уравнения, а остальные компоненты выразить через них. Тогда система уравнений Максвелла сводится к системе уравнений для фурье-компонент напряженностей полей:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_0^2 D_y = 0, \ H_x = \frac{\mathrm{i}}{k_0}\frac{\partial E_y}{\partial z}, \ H_z = -\frac{\mathrm{i}}{k_0}\frac{\partial E_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mathrm{i}k_0 H_y, \ \mathrm{i}k_0 D_x = \frac{\partial H_y}{\partial z}, \ \mathrm{i}k_0 D_z = -\frac{\partial H_y}{\partial x},$$

где $k_0 = \omega/c$. Поскольку в направлении оси z среды однородны, все поля и индукция могут быть представлены в виде $\boldsymbol{E}(x, z; \omega) = \boldsymbol{e}(x; \omega)\exp(\mathrm{i}\beta z)$, $\boldsymbol{H}(x, z; \omega) = \boldsymbol{h}(x; \omega)\exp(\mathrm{i}\beta z)$ и $\boldsymbol{D}(x, z; \omega) = \boldsymbol{d}(x; \omega)\exp(\mathrm{i}\beta z)$, где β – постоянная распространения. Это позволяет свести систему приведенных выше уравнений к двум обыкновенным уравнениям относительно компонент $e_y(x)$ и $e_z(x)$. Остальные компоненты выражаются через них. Пусть среды изотропны и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1$ при $x < 0$ и $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_2$ при $x > 0$.

Вне тонкой пленки среды линейны, уравнения для $e_y(x)$ и $e_z(x)$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 e_{y,z}}{\partial x^2} - p^2 e_{y,z} = 0 \ \text{при}\ x > 0,$$

$$\frac{\partial^2 e_{y,z}}{\partial x^2} - q^2 e_{y,z} = 0 \ \text{при}\ x < 0,$$

где $p^2 = \beta^2 - k_0^2\varepsilon_2$ и $q^2 = \beta^2 - k_0^2\varepsilon_1$. Решения для всех полей в линейных средах, которые удовлетворяют краевым условиям (для поверхностных волн поля обращаются в нуль вдали от границы раздела), записываются в следующем виде:

$$e_x^{(1)}(x) = [\beta/(\mathrm{i}q)]B_1\exp(qx), \ e_y^{(1)}(x) = A_1\exp(qx),$$

$$e_z^{(1)}(x) = B_1\exp(qx),$$

$$h_x^{(1)}(x) = -(\beta/k_0)A_1\exp(qx), \ h_y^{(1)}(x) = [k_0\varepsilon_1/(\mathrm{i}q)]B_1\exp(qx),$$

$$h_z^{(1)}(x) = -(\mathrm{i}q/k_0)A_1\exp(qx)$$

при $x < 0$ и

$$e_x^{(2)}(x) = (\mathrm{i}\beta/p)B_2\exp(-px), \ e_y^{(2)}(x) = A_2\exp(-px),$$

$$e_z^{(2)}(x) = B_2\exp(-px),$$

$$h_x^{(2)}(x) = -(\beta/k_0)A_2\exp(-px), \ h_y^{(2)}(x) = (\mathrm{i}k_0\varepsilon_2/p)B_2\exp(-px),$$

$$h_z^{(2)}(x) = (\mathrm{i}p/k_0)A_2\exp(-px)$$

при $x > 0$.

Условия непрерывности при $x = 0$ позволяют определить амплитуды $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$. В рассматриваемом случае это приводит к уравнениям

$$A_1 = A_2, \ B_1 = B_2,$$

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{q} + \frac{\varepsilon_2}{p}\right)B_1 = \mathrm{i}\frac{\kappa}{k_0}A_1 - 4\pi p_z, \qquad (5)$$

$$(q+p)A_1 = \mathrm{i}\kappa k_0 B_1 + 4\pi k_0^2 p_y, \tag{6}$$

где $\kappa = \alpha\Delta\theta$; $\Delta\theta = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}$; p_z и p_y – касательные компоненты поляризации тонкой пленки.

Для поляризации пленки выбрана модель, используемая в работах [46, 47]:

$$p_{y,z} = \chi e_{y,z}(0) + \chi_3[|e_y(0)|^2 + |e_z(0)|^2]e_{y,z},$$

где $e_{y,z}(0)$ – касательные компоненты электрического поля волны внутри пленки, т. е. в точке $x = 0$; χ и χ_3 – линейная и нелинейная третьего порядка восприимчивости. Из-за непрерывности касательных компонент имеем $e_y(0) = A_1$ и $e_z(0) = B_1$. Следовательно, $p_y = R(|A|^2,|B|^2)A$ и $p_z = R(|A|^2,|B|^2)B$, где $R(|A|^2,|B|^2) = \chi + \chi_3(|A|^2 + |B|^2)$. Индексы у переменных A и B здесь и далее опущены.

Учитывая выражения для поляризации, уравнения (5) и (6) можно переписать в виде

$$a_{11}A - a_{12}B = g_1 A, \;\; a_{21}A + a_{22}B = -g_2 B, \tag{7}$$

где введены обозначения

$$a_{11} = p + q - 4\pi k_0^2\chi, \;\; a_{12} = k_0\kappa, \;\; a_{22} = \varepsilon_1 p + 4\pi pq\chi,$$

$$a_{21} = (\kappa/k_0)pq, \;\; g_1 = 4\pi k_0^2\chi_3(|A|^2 + |B|^2),$$

$$g_2 = 4\pi pq\chi_3(|A|^2 + |B|^2).$$

Для случая линейной тонкой пленки ($\chi_3 = 0$) уравнения (7) становятся однородной системой линейных уравнений, нетривиальное решение которой возможно при условии равенства нулю ее определителя: $f(\omega,\beta) \equiv a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = 0$. Это и есть дисперсионное соотношение для линейных поверхностных волн. В нелинейном случае волны с амплитудами A и B связаны за счет нелинейности поляризации пленки. Уравнения (7) можно считать нелинейным обобщением дисперсионного соотношения. Чтобы явно выделить выражение, определяющее закон дисперсии линейных волн, перепишем (7) в эквивалентной форме:

$$(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})A = f(\omega,\beta)A$$
$$= R_{\mathrm{nl}}(|A|^2,|B|^2)(a_{22}k_0^2 A - a_{12}pqB), \tag{8}$$

$$(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})B = f(\omega,\beta)B$$
$$= R_{\mathrm{nl}}(|A|^2,|B|^2)(a_{21}k_0^2 A + a_{11}pqB), \tag{9}$$

где $R_{\mathrm{nl}}(|A|^2,|B|^2) = 4\pi\chi_3(|A|^2 + |B|^2)$ отражает нелинейные свойства тонкой пленки в модели Аграновича – Бабиченко – Черняка [46, 47].

Далее будет рассматриваться распространение квазигармонической волны, которую можно представить в виде волны с медленно меняющейся огибающей.

4. Уравнения, описывающие поверхностную квазигармоническую волну

Если определить нормированные огибающие касательных компонент электрического поля поверхностной волны внутри тонкой пленки ψ_1 и ψ_2 формулами

$$A\exp(\mathrm{i}\beta z) = (k_0\kappa pq)^{1/2}\psi_1, \;\; B\exp(\mathrm{i}\beta z) = (k_0\kappa pq)^{1/2}\psi_2,$$

то уравнения (8) и (9) можно записать в следующем виде:

$$f(\omega,\beta)\psi_1 = 4\pi\chi_3(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)(\delta_1\psi_1 - \psi_2), \tag{10}$$

$$f(\omega,\beta)\psi_2 = -4\pi\chi_3(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)(\delta_2\psi_2 + \psi_1). \tag{11}$$

Здесь введены параметры

$$\delta_1 = \frac{k_0 a_{22}}{\kappa pq}, \;\; \delta_2 = \frac{a_{11}}{\kappa k_0}.$$

Пусть касательные компоненты электрического поля поверхностной волны описываются квазигармоническими волнами $\psi_{1,2}(z,t) = u_{1,2}(z,t)\exp(\mathrm{i}\beta_{\mathrm{c}}z - \mathrm{i}\omega_{\mathrm{c}}t)$, где ω_{c} – частота несущей волны, а β_{c} – ее постоянная распространения, связанная с частотой уравнением $f(\omega_{\mathrm{c}},\beta_{\mathrm{c}}) = 0$. Огибающие $u_{1,2}(z,t)$ предполагаются медленно меняющимися в пространстве и во времени по сравнению с изменениями несущей волны. Пусть фурье-компоненты квазигармонической волны удовлетворяют нелинейному дисперсионному соотношению $f(\omega,\beta)\psi_{1,2}(\omega,\beta) = h_{1,2}(\omega,\beta;|\psi_{1,2}|^2)$, в котором правая часть есть малая величина. В случае, когда $h_{1,2} = 0$, дисперсионное соотношение для огибающей следует из дисперсионного соотношения для квазигармонической волны: $f(\omega_{\mathrm{c}}+\omega, \beta_{\mathrm{c}}+\beta)u_{1,2}(\omega,\beta) = 0$. Если $h_{1,2} \neq 0$, задача может стать очень сложной. Существует метод получения приближенного дисперсионного соотношения для $u_{1,2}(z,t)$ [48, 49]. Если $h_{1,2}$ рассматривать как малое возмущение, то в первом порядке малости

$$f(\omega_{\mathrm{c}}+\omega, \beta_{\mathrm{c}}+\beta)u_{1,2}(\omega,\beta) = h_{1,2}(\omega_{\mathrm{c}}+\omega, \beta_{\mathrm{c}}+\beta;|u_{1,2}|^2),$$

или

$$f(\omega_{\mathrm{c}}+\omega, \beta_{\mathrm{c}}+\beta)u_{1,2}(\omega,\beta) = h_{1,2}(\omega_{\mathrm{c}}, \beta_{\mathrm{c}};|u_{1,2}|^2). \tag{12}$$

Для квазигармонической волны функции $u_{1,2}(\omega,\beta)$ отличны от нуля в области, где $\omega \ll \omega_{\mathrm{c}}$ и $k \ll k_0$. Следовательно, можно разложить $f(\omega_{\mathrm{c}}+\omega, \beta_{\mathrm{c}}+\beta)$ в ряд Тейлора и ограничиться первым (или первым и вторым, если учитывать дисперсии второго порядка) порядком производных. Поскольку $f(\omega_{\mathrm{c}},\beta_{\mathrm{c}}) = 0$, выражение (12) записывается в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\omega}\omega + \frac{\partial f}{\partial\beta}\beta + \cdots\right)u_{1,2}(\omega,\beta) = h_{1,2}(\omega_{\mathrm{c}}, \beta_{\mathrm{c}};|u_{1,2}|^2).$$

Производные в скобках вычисляются в точке $(\beta_{\mathrm{c}}, \omega_{\mathrm{c}})$, а многоточием обозначены более высокие порядки разложения по β и ω. Поскольку β и ω в окрестности точки $(\beta_{\mathrm{c}}, \omega_{\mathrm{c}})$ связаны дисперсионным соотношением $f(\omega,\beta) = 0$, можно использовать теорему о дифференцировании неявной функции, что даст $\partial f/\partial\beta = -(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta)\partial f/\partial\omega$, и определить групповую скорость $v_{\mathrm{g}} = (\partial\omega/\partial\beta)$ [48, 49]. Замены $\omega \to \mathrm{i}\partial/\partial t$, $\beta \to -\mathrm{i}\partial/\partial z$ и $u_{1,2}(\omega,\beta) \to u_{1,2}(z,t)$ приводят к эволюционному уравнению для медленно меняющихся огибающих. Применив эту процедуру к системе уравнений (10) и (11), можно получить систему уравнений, описывающих распространение поверхностной волны в нелинейной тонкой пленке на поверхности топологического изолятора:

$$\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\mathrm{g}}\frac{\partial}{\partial z}\right)u_1 = \mu(|u_1|^2 + |u_2|^2)(\delta_1 u_1 - u_2), \tag{13}$$

$$\mathrm{i}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\mathrm{g}}\frac{\partial}{\partial z}\Big)u_2 = -\mu\left(|u_1|^2 + |u_2|^2\right)(\delta_2 u_2 + u_1), \tag{14}$$

где $\mu = 4\pi\chi_3(\partial f/\partial\omega)^{-1}$ и производные вычисляются при $\omega = \omega_{\mathrm{c}}$. Уравнения (13), (14) описывают изменение огибающих касательных компонент электрических полей поверхностной волны без учета дисперсии групповых скоростей и в этом смысле могут быть названы укороченными (редуцированными) волновыми уравнениями. Похожие уравнения были получены при рассмотрении поверхностных волн на границе раздела нелинейного диэлектрика и топологического изолятора [50]. Отличия заключаются в виде правых частей уравнений (13) и (14) и обусловлены иным типом нелинейности в рассматриваемой в [50] задаче.

5. Стационарная нелинейная поверхностная волна

Поскольку дисперсия групповых скоростей отсутствует, можно использовать производную вдоль характеристики

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\mathrm{g}}\frac{\partial}{\partial z}\Big)$$

и перейти от (13), (14) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Полезно также перейти к вещественным переменным $u_1(z, t) = a\exp(\mathrm{i}\varphi_1)$, $u_2(z, t) = b\exp(\mathrm{i}\varphi_2)$ и переписать результирующую систему уравнений в вещественной форме:

$$\frac{\partial a}{\partial\zeta} = -\mu(a^2 + b^2)b\sin\Phi,\ \ \frac{\partial b}{\partial\zeta} = \mu(a^2 + b^2)a\sin\Phi, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = \mu(a^2 + b^2)\Big[\delta + \Big(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\Big)\cos\Phi\Big], \tag{16}$$

где введены разность фаз $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1$ и параметр $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Уравнения (15) и (16) напоминают уравнения, возникающие при описании параметрического взаимодействия волн. По этой причине можно ожидать, что преобразование поперечной касательной компоненты электрического поля $e_y(z; t)$ в продольную компоненту $e_y(z; t)$ и обратно будет периодическим.

Система уравнений (15) и (16) имеет два интеграла движения:

$$a^2 + b^2 = a_0^2,\ \ ab\cos\Phi - \frac{\delta}{2}a^2 = I_0.$$

Если исключить из этих выражений b, то останется одно уравнение,

$$\frac{\partial w}{\partial\zeta} = -\sqrt{1 - w^2}\,\sin\Phi, \tag{17}$$

$$2w\sqrt{1 - w^2}\cos\Phi - \delta w^2 = J_0 = I_0/a_0^2,$$

для переменной $w = a/a_0$, которая зависит от $\xi = \mu a_0^2\zeta$. Константа J_0 определяется начальными условиями. В общем случае решение уравнения (17) выражается через эллиптические функции и является громоздким. Однако если предположить, что в начальный момент электрическое поле не имело поперечной компоненты, т. е. $e_y(z; 0) = 0$, то в последующие моменты времени поперечная компонента будет меняться согласно формуле

$$a(\zeta) = a_0\sqrt{\frac{4}{4 + \delta^2}}\sin\Big(\mu a_0^2\sqrt{\frac{4 + \delta^2}{4}}\zeta\Big). \tag{18}$$

Разность фаз Φ определяется соотношением

$$\cos^2\Phi = \frac{\delta^2\sin^2\phi}{\delta^2 + 4\cos^2\phi},\ \ \phi = \mu a_0^2\sqrt{\frac{4 + \delta^2}{4}}\zeta.$$

Из выражения для первого интеграла движения следует, что огибающая продольной компоненты поля $e_z(z; t)$ имеет вид

$$b(\zeta) = a_0\sqrt{\frac{4}{4 + \delta^2}}\cos\Big(\mu a_0^2\sqrt{\frac{4 + \delta^2}{4}}\zeta\Big). \tag{19}$$

Из (18) и (19) видно, что компоненты $e_y(z; t)$ и $e_z(z; t)$ изменяются гармонически со сдвигом на $\pi/2$. Это означает,что нелинейные свойства тонкой пленки проявляются во вращении касательного вектора электрического поля в плоскости раздела диэлектрика и топологического изолятора.

Из (18) можно определить период T колебаний (изменений в пространстве и во времени) огибающей электрического поля $e_y(z; t)$ или $e_z(z; t)$. Если измеряемой величиной является квадрат огибающей (т. е. интенсивность волны), то

$$\mu a_0^2\sqrt{\frac{4 + \delta^2}{4}}\,T = \pi. \tag{20}$$

Поскольку $\kappa \approx 10^{-2}$, параметр

$$\delta = \frac{1}{\kappa}\Big(\frac{a_{11}}{k_0} + \frac{k_0 a_{22}}{pq}\Big) \approx 10^2.$$

Следовательно, выражение под корнем в (20) много больше единицы. Это позволяет найти оценку для периода T:

$$T \approx \frac{\kappa}{a_0^2\chi_3}.$$

Таким образом, период колебаний может меняться в зависимости от интенсивности поверхностной волны.

6. Заключение

В настоящей работе была рассмотрена поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела топологического изолятора и обычного диэлектрика. На границе раздела расположена тонкая пленка нелинейного диэлектрика, благодаря чему электромагнитная волна локализована на этой границе. В отсутствие пленки поверхностная волна может существовать только в том случае, если знаки диэлектрических проницаемостей сред противоположны либо диэлектрик нелинеен. Присущий топологическому изолятору магнитоэлектрический эффект приводит к смешиванию (гибридизации) поперечной электрической (TE) и поперечной магнитной (TM) волн, а нелинейность пленки – к их взаимодействию. В результате касательный вектор электрического поля поверхностной волны вращается в плоскости раздела сред при распространении волны. При этом нормальная компонента электрического поля осциллирует с той же частотой. Изменяя интенсивность поверхностной волны, можно изменять период колебаний.

Для учета нелинейных свойств тонкой пленки использовалась простая модель [46, 47], что позволяет дать качественную картину протекающих в пленке процессов. Принципиальным является магнитоэлектрический эффект, характерный для топологического изолятора.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант №18-02-00921).

1. Рупасов В.И., Юдсон В.И. *Квантовая электроника*, **9**, 2179 (1982) [*Sov. J. Quantum Electron*., **12**, 1415 (1982)].
2. Рупасов В.И., Юдсон В.И. *ЖЭТФ*, **93**, 494 (1987) [*Sov. Phys. JETP*, **66**, 282 (1987)].
3. Ben-Aryeh Y., Bowden C.M., Englund J.C. *Phys. Rev. A*, **34**, 3917 (1986).
4. Бенедикт М.Г., Зайцев А.И., Малышев В.А., Трифонов Е.Д. *Оптика и спектроскопия*, **66**, 726 (1989) [*Opt. Spectrosc.*, **66**, 424 (1989)].
5. Бенедикт М.Г., Зайцев А.И., Малышев В.А., Трифонов Е.Д. *Оптика и спектроскопия*, **68**, 812 (1990) [*Opt. Spectrosc*., **68**, 473 (1990)].
6. Benedict M.G., Malyshev V.A., Trifonov E.D., Zaitsev A.I. *Phys. Rev. A*, **43**, 3845 (1991).
7. Башаров А.М. *ЖЭТФ*, **94**, 12 (1988) [*Sov. Phys. JETP*, **67**, 1741 (1988)].
8. Башаров А.М. *ЖЭТФ*, **108**, 842 (1995) [*Sov. Phys. JETP*, **81**, 459 (1995)].
9. Логвин Ю.А., Самсон А.М., Туровец С.И. *Квантовая электроника*, **17**, 1521 (1990) [*Sov. J. Quantum Electron*., **20**, 1425 (1990)].
10. Логвин Ю.А., Самсон А.М. *ЖЭТФ*, **102**, 472 (1992) [*Sov. Phys. JETP*, **75**, 250 (1992)].
11. Lambruschini C.L.P. *J. Mod. Opt*., **37**, 1175 (1990).
12. Зайцев А.И., Рыжов И.В., Трифонов Е.Д., Малышев В.А. *Оптика и спектроскопия*, **87**, 827 (1999) [*Opt. Spectrosc.*, **87**, 755 (1999)].
13. Богданов А.А., Зайцев А.И., Малышев В.А., Рыжов И.В., Трифонов Е.Д. *Изв. РАН. Сер. физич*., **64**, 1931 (2000).
14. Malyshev V.A., Ryzhov I.V., Trifonov E.D., Zaitsev A.I. *Opt. Commun*., **180**, 59 (2000).
15. Захаров С.М., Маныкин Э.А. *Оптика и спектроскопия*, **63**, 1069 (1987) [*Opt. Spectrosc*., **63**, 630 (1987)].
16. Елютин С.О., Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **90**, 849 (2001) [*Opt. Spectrosc*., **90**, 765 (2001)].
17. Vanagas E. *Lith. J. Phys*., **32**, 330 (1992).
18. Vanagas E. *Lith. J. Phys*., **32**, 371 (1992).
19. Ванагас Э., Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **84**, 301 (1998) [*Opt. Spectrosc*., **84**, 258 (1998)].
20. Elyutin S.O. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*., **40**, 2533 (2007).
21. Maimistov A.I., Gabitov I.R. *J. Opt. Tech*., **82**, 727 (2015).
22. Самсон А.М., Логвин Ю.А., Туровец С.И. *Квантовая электроника*, **17**, 1223 (1990) [*Sov. J. Quantum Electron*., **20**, 1133 (1990].
23. Заболотский А.А. *ЖЭТФ*, **133**, 466 (2008) [*JETP*, **106**, 404 (2008)].
24. Paulau P.V., Loiko N.A. *Phys. Rev. A*, **72**, 013819 (2005).
25. Pedersen Th.G., Pedersen K., Kristensen Th.B. *Phys. Rev. B*, **61**, 10255 (2000).
26. Caputo J.-G., Maimistov A.I., Mishina E.D., Kazantseva E.V., Mukhortov V.M. *Phys. Rev. B*, **82**, 094113 (2010).
27. Капшай В.Н., Шамына А.А. *Оптика и спектроскопия*, **124**, 795 (2018) [*Opt. Spectrosc*., **124**, 826 (2018)].
28. Vizdrik G., Ducharme S., Fridkin V.M., Yudin S.G. *Phys. Rev. B*, **68**, 094113 (2003).
29. Caputo J.-G., Kazantseva E.V., Maimistov A.I. *Phys. Rev. B*, **77**, 014113 (2007).
30. Коровай О.В., Хаджи П.И. *Квантовая электроника*, **30**, 1091 (2000) [*Quantum Electron*., **30**, 1091 (2000)].
31. Prasad P.N. *Thin Solid Films*, **152**, 275 (1987).
32. Xiaoguang Li, Ao Teng, Mustafa M. Ozer, Jian Shen, Hanno H. Weitering, Zhenyu Zhang. *New J. Phys*., **16**, 065014 (2014).
33. Mirza I., McCloskey D., Blau W.J., Lunney J.G. *Opt. Lett*., **43**, 1455 (2018).
34. Ramakrishna S.A. *Rep. Prog. Phys*., **68**, 449 (2005).
35. Сарычев А.К., Шалаев В.М. *Электродинамика метаматериалов* (М.: Научный мир, 2011).
36. Drachev V.P., Podolskiy V.A., Kildishev A.V. *Opt. Express*, **21**, 15048 (2013).
37. Osamu Takayama, Lavrinenko A.V. *J. Opt. Soc. Am. B*, **36** , F38 (2019).
38. Wang-Kong Tse, MacDonald A.H. *Phys. Rev. Lett*., **105**, 057401 (2010).
39. Karch A. *Phys. Rev. Lett*., **103**, 171601 (2009).
40. Hasan M.Z., Kane C.L. *Rev. Mod. Phys*., **82**, 3045 (2010).
41. Maimistov A.I., Basharov A.M. *Nonlinear Optical Waves* (Dortrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999).
42. Wilczek F. *Phys. Rev. Lett*., **58**, 1799 (1987).
43. Karch A. *Phys. Rev. B*, **83**, 245432 (2011).
44. Маймистов А.И., Ляшко Е.И. *Оптика и спектроскопия*, **121**, 671 (2016) [*Opt. Spectrosc*., **121**, 635 (2016)].
45. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1970).
46. Агранович В.М., Бабиченко В.С., Черняк В.Я. *Письма в ЖЭТФ*, **32**, 532 (1980) [*JETP Lett*., **32**, 512 (1980)].
47. Michalache D., Mazilu D. *Appl. Phys. B*, **37**, 107 (1985).
48. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М.: ЛЕНАНД, 2015).
49. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны* (М.: ЛЕНАНД, 2017).
50. Маймистов А.И., Ляшко Е.И., Елютин С.О. *Изв. РАН. Сер. физич*., **84**, 7 (2020) [*Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys*., **84**, 1 (2020)].