

# Обобщенные рэмсиевские методы подавления полевых сдвигов в атомных часах на основе эффекта когерентного пленения населенностей

Д.В.Коваленко, М.Ю.Басалаев, В.И.Юдин, Т.Занон-Виллет, А.В.Тайченачев

*Исследуется возможность подавления полевых сдвигов в рэмсиевской спектроскопии когерентного пленения населенностей (КПН) методами обобщенной автобалансной рэмсиевской спектроскопии (ОАБРС) и комбинированного сигнала ошибки (КСО). Рассмотрено возбуждение когерентным бихроматическим полем КПН-резонансов в открытой  $\Lambda$ -системе с «ловушечным» состоянием. На основании проведенного строгого математического доказательства и численных расчетов показано, что использование данных методов приводит к полному подавлению полевого сдвига и его флуктуаций. Реализация методов ОАБРС и КСО в КПН-часах позволит значительно повысить их точность и долговременную стабильность. Указанные методы также могут быть применимы в атомных КПН-магнитометрах и интерферометрах.*

**Ключевые слова:** рэмсиевская спектроскопия, резонансы когерентного пленения населенностей, полевые сдвиги, атомные часы и магнитометры.

## 1. Введение

Атомные часы – важные и востребованные квантовые устройства, обеспечивающие высокоточные измерения частоты и времени [1–3], – имеют широкий спектр приложений в таких областях, как навигация (GPS, ГЛОНАСС, GALILEO), системы связи и передачи информации, геодезия, проверка фундаментальных физических теорий и т. д. [4–7]. Отдельный класс среди атомных часов представляют часы на основе эффекта когерентного пленения населенностей (КПН) [8–12], суть которого состоит в следующем. При взаимодействии с когерентным бихроматическим полем атомы переходят в так называемое темное (непоглощающее свет) состояние. Формирование последнего происходит, когда разность оптических частот поля варьируется вблизи сверхтонкого расщепления основного состояния, что приводит к появлению узкого провала (пика) в сигнале поглощения (пропускания). Использование оптических ячеек с буферным газом или антирелаксационным покрытием позволяет значительно уменьшить ширину КПН-резонанса, которая обычно составляет 0.1–1 кГц. Главными преимуществами КПН-часов являются компактность и малое энергопотребление благодаря применению полностью оптической схемы воз-

буждения радиочастотного перехода без использования микроволнового резонатора [13–15].

Основная цель исследований, посвященных атомным часам, – повышение стабильности частоты, характеризующей случайные изменения эталонной частоты во времени. Во многих случаях ключевым фактором, ограничивающим стабильность и точность атомных часов, является полевой сдвиг частоты часового перехода за счет динамического эффекта Штарка; при этом флуктуации мощности излучения приводят к нестабильности частоты осциллятора. Данная проблема, в частности, может быть решена с помощью рэмсиевской спектроскопии [16], включая ее различные модификации и обобщения. Так, для подавления полевых сдвигов в одной из модифицированных рэмсиевских схем, описанной в работе [17], предложено использовать импульсы различной длительности, при этом второй импульс является композитным (т. е. его часть имеет фазу, сдвинутую на  $\pi$ ). Такая «гиперрэмсиевская» схема была успешно реализована в оптических часах и продемонстрировала подавление полевого сдвига на несколько порядков [18, 19]. В дальнейших вариантах развития гиперрэмсиевского подхода использовались другие различные способы формирования сигнала ошибки [20–24].

Относительно недавно были разработаны новые методы подавления полевых сдвигов, такие как автобалансная рэмсиевская спектроскопия (АБРС) [25] и ее обобщение (ОАБРС) [26], а также комбинированный сигнал ошибки (КСО) [27]. Данные спектроскопические схемы «не страдают» от эффектов релаксации в атомной среде, импульсных флуктуаций, зависящих от времени, и других неидеальностей процедуры опроса атомов. Они основаны на возбуждении атомов двумя рэмсиевскими последовательностями с разными временами свободной эволюции (темные времена). В методе ОАБРС используются две петли обратной связи, одна из которых служит для регулировки частоты часового сигнала, а другая – для управления некоторым сопутствующим, хорошо контро-

Д.В.Коваленко, А.В.Тайченачев. Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15Б; e-mail: dvk.laser@yandex.ru

М.Ю.Басалаев, В.И.Юдин. Новосибирский государственный университет, Россия, 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2; Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15Б; Новосибирский государственный технический университет, Россия, 630073 Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20

T.Zanon-Willette. Sorbonne Université, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, LERMA, F-75005, Paris, France

лируемым параметром, связанным с рэмсиевскими импульсами. Одновременная стабилизация частоты атомных часов и сопутствующего параметра обеспечивает подавление полевого сдвига. В [25] была предложена и реализована схема стабилизации частоты, в которой в качестве сопутствующего параметра используется дополнительный сдвиг фазы поля во время действия второго рэмсиевского импульса. В теоретической работе [26] показано, что существуют и другие альтернативы при выборе сопутствующего параметра. В отличие от метода ОАБРС, в КСО [27] используется только одна петля обратной связи, и сигнал ошибки для стабилизации частоты формируется путем вычитания с соответствующим калибровочным коэффициентом двух обычных сигналов ошибки для каждой рэмсиевской последовательности. Использование метода АБРС позволило достичь в КПН-часах с цезиевой паровой ячейкой стабильности на уровне  $10^{-15}$  [28, 29]. Методы ОАБРС и КСО были экспериментально реализованы в работах [30, 31] для лазерно-охлажденных атомов рубидия, у которых полевой сдвиг был подавлен более чем на порядок.

Следует отметить, что для оптических часов теоретический анализ проводился в рамках двухуровневой атомной системы [26, 27], а для КПН-часов – в рамках замкнутой трехуровневой  $\Lambda$ -системы [32]. Однако при традиционной схеме накачки атомной среды однонаправленным световым циркулярно-поляризованным  $\sigma^+$ - или  $\sigma^-$ -полем в случае  $D_1$ -линии атомов щелочных металлов существует так называемое ловушечное состояние («карман»), т. е. подуровень основного состояния с максимальной или минимальной проекцией полного углового момента атома. Наличие данного состояния приводит к ухудшению параметров КПН-резонанса (уменьшению амплитуды и контраста), поскольку атомы, которые в результате процессов оптического возбуждения и релаксации возбужденного состояния накачиваются в «кармане», оттуда уже не возбуждаются и не участвуют в формировании темного состояния. Поэтому важно было обобщить исследование, проведенное в работе [32], на случай открытой  $\Lambda$ -системы с учетом ловушечного состояния.

В настоящей работе получены аналитические результаты, строго доказывающие применимость методов ОАБРС и КСО в КПН-часах в рамках открытой  $\Lambda$ -системы с ловушечным состоянием и сопровождающиеся различными численными расчетами. Для метода ОАБРС, в частности, рассмотрен вариант, когда сопутствующий параметр является дополнительным частотным прыжком в течение действия обоих рэмсиевских импульсов (накачки и детектирующего).

## 2. Теоретическая модель

В качестве теоретической модели атомной среды рассмотрим открытую  $\Lambda$ -систему (рис.1) с учетом наличия ловушечного состояния (состояние |4>), взаимодействующую с рэмсиевскими импульсами (рис.2) бихроматического поля

$$E(t) = E_1(t)e^{-i(\omega_1 t + \varphi_1)} + E_2(t)e^{-i(\omega_2 t + \varphi_2)} + \text{с.с.} \quad (1)$$

КПН-резонанс возбуждается при условии, что разность частот  $\omega_1 - \omega_2$  варьируется вблизи частоты сверхтонкого расщепления  $\omega_{\text{hfs}}$  перехода между подуровнями |1> и |2>

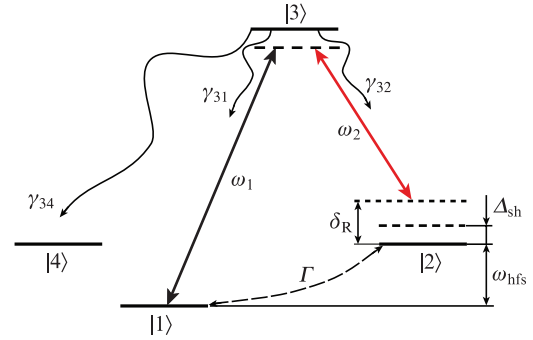


Рис.1. Схема открытой  $\Lambda$ -системы:  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты резонансных оптических полей;  $\Delta_{\text{sh}}$  – полевой (штарковский) сдвиг частоты часового перехода;  $\gamma_{31}$ ,  $\gamma_{32}$  и  $\gamma_{34}$  – скорости спонтанного распада населенности из состояния |3> на состояния |1>, |2> и |4> соответственно;  $\Gamma$  – скорость распада когерентности между состояниями |1> и |2>; состояние |4> – ловушечное состояние.

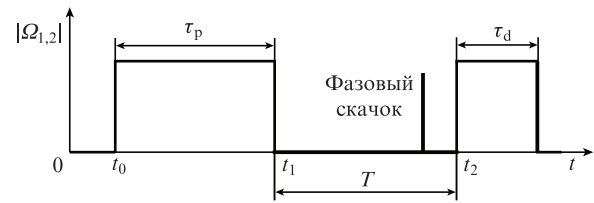


Рис.2. Рэмсиевская схема для спектроскопии КПН-резонансов. Первый импульс накачивает атомы в темное состояние, второй импульс детектирует спектроскопическую информацию.

(часовой переход) основного состояния. Временную динамику атомной системы будем описывать, используя формализм атомной матрицы плотности в базисе состояний  $\{|j\rangle\}$  (см. рис.1):

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m,n} |m\rangle \rho_{mn}(t) \langle n|. \quad (2)$$

В приближении вращающейся волны уравнения для матрицы плотности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{11} &= p_1 \Gamma \text{Tr}[\hat{\rho}] - \Gamma \rho_{11} + \gamma_{31} \rho_{33} + i(\Omega_1^* \rho_{31} - \Omega_1 \rho_{13}), \\ \partial_t \rho_{21} &= [-\Gamma + i(\delta_R - \Delta_{\text{sh}})] \rho_{21} + i(\Omega_2^* \rho_{31} - \Omega_2 \rho_{23}), \\ \partial_t \rho_{22} &= p_2 \Gamma \text{Tr}[\hat{\rho}] - \Gamma \rho_{22} + \gamma_{32} \rho_{33} + i(\Omega_2^* \rho_{32} - \Omega_2 \rho_{23}), \\ \partial_t \rho_{31} &= (-\gamma_{\text{opt}} + i\delta_1) \rho_{31} + i\Omega_1(\rho_{11} - \rho_{33}) + i\Omega_2 \rho_{21}, \\ \partial_t \rho_{32} &= (-\gamma_{\text{opt}} + i\delta_2) \rho_{32} + i\Omega_2(\rho_{22} - \rho_{33}) + i\Omega_1 \rho_{12}, \\ \partial_t \rho_{33} &= -(\Gamma + \gamma_{\text{sp}}) \rho_{33} + i(\Omega_1 \rho_{13} - \Omega_1^* \rho_{31}) + i(\Omega_2 \rho_{23} - \Omega_2^* \rho_{32}), \\ \partial_t \rho_{44} &= -(p_1 + p_2) \Gamma \text{Tr}[\hat{\rho}] + \Gamma(\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33}) + \gamma_{34} \rho_{33}, \\ \rho_{12} &= \rho_{21}^*, \quad \rho_{13} = \rho_{31}^*, \quad \rho_{23} = \rho_{32}^*. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Omega_1 = d_{31} E_1 e^{-i\varphi_1} / \hbar$  и  $\Omega_2 = d_{32} E_2 e^{-i\varphi_2} / \hbar$  – частоты Раби для переходов |1> → |3> и |2> → |3> соответственно ( $d_{31}$  и  $d_{32}$  – матричные элементы оператора электрического дипольного момента);  $\delta_1 = \omega_1 - \omega_{31}$  и  $\delta_2 = \omega_2 - \omega_{32}$  – однофотонные отстройки лазерных полей;  $\delta_R = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{\text{hfs}}$  – двухфотонная (рамановская) отстройка;  $\Delta_{\text{sh}}$  – полевой

(штарковский) сдвиг частоты часового перехода во время действия рэмсиевских импульсов;  $\gamma_{\text{opt}}$  – скорость затухания оптических когерентностей (из-за процессов спонтанного распада, столкновений с буферным газом и т. д.);  $\gamma_{31}$ ,  $\gamma_{32}$  и  $\gamma_{34}$  – скорости спонтанного распада населенности из состояния  $|3\rangle$  на состояния  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  и  $|4\rangle$  соответственно;  $\gamma_{\text{sp}}$  – скорость спонтанного распада возбужденного состояния  $|3\rangle$  (в случае замкнутой атомной системы  $\gamma_{\text{sp}} = \gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{34}$ ); константа  $\Gamma$  определяет скорость релаксации атомов (например, за счет пролетных эффектов) к изотропному распределению по подуровням основного состояния (в отсутствие светового поля);  $p_1$  и  $p_2$  – коэффициенты релаксации к данному изотропному распределению.

Представим систему линейных уравнений (3) в векторном виде:

$$\partial_t \rho = \hat{L} \rho, \quad (4)$$

где вектор-столбец  $\rho(t)$  сформирован из элементов матрицы плотности  $\hat{\rho}(t)$  следующим образом:

$$\rho = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{13}, \rho_{31}, \rho_{23}, \rho_{32}, \rho_{33}, \rho_{44})^T, \quad (5)$$

а матрица  $\hat{L}$  (лиувиллиан) (см. Приложение, выражение (П1)) определяется коэффициентами уравнений (3).

В качестве спектроскопического сигнала исследуется поглощение в течение детектирующего импульса (для  $t > t_2$ , см. рис.2), которое в приближении оптически тонкой среды пропорционально следующей величине:

$$A(t) = 2 \text{Im} \{ \Omega_1(t) \rho_{31}(t) + \Omega_2(t) \rho_{32}(t) \}. \quad (6)$$

Сигнал, накопленный в течение детектирующего времени  $\tau_d$ , вычисляется интегрированием выражения (6) по времени:

$$\bar{A}(\delta_R) = \int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} A(t) dt. \quad (7)$$

С использованием стандартного определения скалярного произведения

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_m x_m^* y_m$$

выражение (6) может быть записано следующим образом:

$$A(t) = (\Omega(t), \hat{W}_d(t) \hat{G}_T \hat{W}_p \rho_{\text{in}}), \quad (8)$$

где вектор  $\Omega$  определяется как

$$\Omega = (0, 0, 0, 0, -i\Omega_1^*, i\Omega_1, -i\Omega_2^*, i\Omega_2, 0, 0)^T. \quad (9)$$

Вектор  $\rho_{\text{in}}$  соответствует начальному атомному состоянию. Операторы  $\hat{W}_p = \hat{W}_p(t_1, t_0)$  и  $\hat{W}_d = \hat{W}_d(t, t_2)$  определяют эволюцию атомов, взаимодействующих с импульсом накачки ( $t_0 < t < t_1$ ) и детектирующим импульсом ( $t > t_2$ ) соответственно. Оператор  $\hat{G}_T$  (см. (П3)) описывает свободную эволюцию атомов ( $t_1 < t < t_2 = t_1 + T$ ):

$$\hat{G}_T = e^{\hat{L}_0 T}, \quad (10)$$

где лиувиллиан  $\hat{L}_0$  (П2) формируется из уравнений (3)–(5) в отсутствие светового поля (т.е. когда  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$  и  $\Delta_{\text{sh}} = 0$ ).

В экспериментах темное время  $T$ , как правило, значительно (на 2–4 порядка) превышает времена распада населенности возбужденного состояния и затухания оптических когерентностей, что соответствует условию  $T \gg \gamma_{\text{opt}}^{-1}, \gamma_{\text{sp}}^{-1}$ . Поэтому в диагональных элементах матрицы  $\hat{G}_T$  можно принять, что  $e^{-\gamma_{\text{sp}} T} \approx 0$  и  $e^{-\gamma_{\text{opt}} T} \approx 0$ . В этом случае оператор  $\hat{G}_T$  принимает вид

$$\hat{G}_T \approx \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{19} & G_{1,10} \\ 0 & e^{-(\Gamma + i\delta_R)T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\Gamma - i\delta_R)T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{49} & G_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{10,1} & 0 & 0 & G_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{10,9} & G_{10,10} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Рассмотрим схему стабилизации, в которой для формирования сигнала ошибки  $S_{\text{err}}(\delta_R)$  используются скачки (т.е. изменение ступенчатым образом) относительной фазы бихроматического поля ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) перед вторым рэмсиевским импульсом. Используя формулы (7) и (8), запишем выражение для спектроскопического сигнала с учетом скачка фазы:

$$\bar{A}(\delta_R, \alpha_1, \alpha_2) = \int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\Omega(t), \hat{W}_d(t) \hat{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2) \hat{G}_T \hat{W}_p \rho_{\text{in}}) dt, \quad (12)$$

где оператор фазового скачка для бихроматического поля имеет вид

$$\hat{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Сигнал ошибки формируется как разность сигналов (12) для двух различных фазовых скачков:

$$\begin{aligned} S_{\text{err}}(\delta_R) &= \bar{A}(\delta_R, \alpha_1^+, \alpha_2^+) - \bar{A}(\delta_R, \alpha_1^-, \alpha_2^-) \\ &= \int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\Omega(t), \hat{W}_d(t) \hat{D}_\Phi \hat{G}_T \hat{W}_p \rho_{\text{in}}) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

где верхний индекс «+» обозначает изменения фазы для первого скачка, а индекс «-» соответствует второму фазовому скачку. Оператор  $\hat{D}_\Phi$  в (14) определяется как

$$\hat{D}_\Phi = \hat{\Phi}(\alpha_1^+, \alpha_2^+) - \hat{\Phi}(\alpha_1^-, \alpha_2^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_1^+} - e^{-i\alpha_1^-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_1^+} - e^{i\alpha_1^-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_1^+} - e^{-i\alpha_1^-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_1^+} - e^{i\alpha_1^-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\alpha_2^+} - e^{-i\alpha_2^-} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha_2^+} - e^{i\alpha_2^-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь мы ввели обозначение для относительной фазы бихроматического поля:

$$\alpha_r^+ = \alpha_1^+ - \alpha_2^+, \quad \alpha_r^- = \alpha_1^- - \alpha_2^-. \quad (16)$$

В соответствии с (11) и (15) получаем следующее выражение для матричного произведения  $\hat{D}_\Phi \hat{G}_T$ :

$$\hat{D}_\Phi \hat{G}_T = \exp(-\Gamma T) \hat{Y}_T, \quad (17)$$

где матрица  $\hat{Y}_T$  имеет вид

$$\hat{Y}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_R T} (e^{-i\alpha_r^+} - e^{-i\alpha_r^-}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_R T} (e^{i\alpha_r^+} - e^{i\alpha_r^-}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тогда с учетом (17) сигнал ошибки (14) вычисляется по формуле

$$S_{err}(\delta_R) = \exp(-\Gamma T) \int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\mathbf{Q}(t), \hat{W}_d(t) \hat{Y}_T \hat{W}_p \rho_{in}) dt. \quad (19)$$

Таким образом, как следует из (18), сигнал ошибки чувствителен только к изменению относительной фазы  $\alpha_r = \alpha_1 - \alpha_2$ , но не зависит от фаз  $\alpha_{1,2}$  по отдельности. Также отметим, что максимальная амплитуда сигнала ошибки (19) достигается для фазовых скачков  $\alpha_r^+ = \pi/2$  и  $\alpha_r^- = -\pi/2$ .

В атомных часах частота стабилизируется в нуле сигнала ошибки для центрального рэмсиевского резонанса. Поэтому одним из ключевых параметров, влияющих на метрологические характеристики, является сдвиг частоты  $\delta_{clock}$ , что соответствует решению уравнения

$$S_{err}(\delta_R) = 0 \quad (20)$$

относительно  $\delta_R$ .

### 3. Обобщенная автобалансная рэмсиевская спектроскопия для КПН-резонансов

Схема стабилизации для метода ОАБРС содержит две петли обратной связи, действующие параллельно на попеременно сменяющихся рэмсиевских последовательно-

стях с различными временами свободной эволюции  $T_1$  и  $T_2$ . Первая петля управляет частотой генератора (т.е. рамановской отстройкой  $\delta_R$ ), а вторая петля – некоторым сопутствующим параметром  $\xi$ , связанным с первым и/или вторым рэмсиевским импульсом. Алгоритм ОАБРС организован как серия следующим циклов. Для рэмсиевской последовательности с временем свободной эволюции  $T_1$  сопутствующий параметр фиксируется ( $\xi = \xi_{fix}$ ), а частота стабилизируется в нуле первого сигнала ошибки  $S_{err}^{(T_1)}(\delta_R, \xi_{fix}) = 0$ . Затем измерения проводятся для последовательности рэмсиевских импульсов с другим темным временем ( $T_2$ ), когда ранее полученная частота фиксируется ( $\delta_R = \delta_{fix}$ ) и сопутствующий параметр стабилизируется в нуле второго сигнала ошибки  $S_{err}^{(T_2)}(\delta_{fix}, \xi) = 0$ . При повторении этих итераций оба параметра ( $\delta_R = \delta_{clock}$  и  $\xi = \xi$ ) в конечном итоге стабилизируются, что соответствует решению системы уравнений

$$S_{err}^{(T_1)}(\delta_R, \xi) = 0, \quad S_{err}^{(T_2)}(\delta_R, \xi) = 0 \quad (21)$$

в отношении переменных  $\delta_R$  и  $\xi$ .

Покажем, что система (21) всегда имеет решение  $\delta_R = 0$ . Подставляя выражение для сигнала ошибки (19) в (21), получаем

$$\int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\mathbf{Q}(t), \hat{W}_d(t) \hat{Y}_{T_1} \hat{W}_p \rho_{in}) dt = 0, \quad (22)$$

$$\int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\mathbf{Q}(t), \hat{W}_d(t) \hat{Y}_{T_2} \hat{W}_p \rho_{in}) dt = 0.$$

Из (18) следует, что в случае  $\delta_R = 0$  имеет место равенство для матриц  $\hat{Y}_{T_1}$  и  $\hat{Y}_{T_2}$ :

$$\hat{Y}_{T_1}(\delta_R = 0) = \hat{Y}_{T_2}(\delta_R = 0). \quad (23)$$

В этом случае система из двух уравнений (22) сводится к одному уравнению с неизвестным параметром  $\xi$ :

$$\int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\mathbf{Q}(t), \hat{W}_d(t) \hat{Y}_T(\delta_R = 0) \hat{W}_p \rho_{in}) dt = 0, \quad (24)$$

которое всегда имеет решение.

Таким образом, аналитически показано, что выбор соответствующего значения сопутствующего параметра позволяет полностью подавить полевой сдвиг часовой частоты ( $\delta_{clock} = 0$ ), стабилизируемой по КПН-резонансу. Данный результат не зависит от параметров рэмсиевских импульсов (амплитуды, формы, фазы), констант релаксации, ошибок в формировании фазовых скачков и т.д. Такая устойчивость метода к различным техническим ошибкам демонстрирует его высокую надежность.

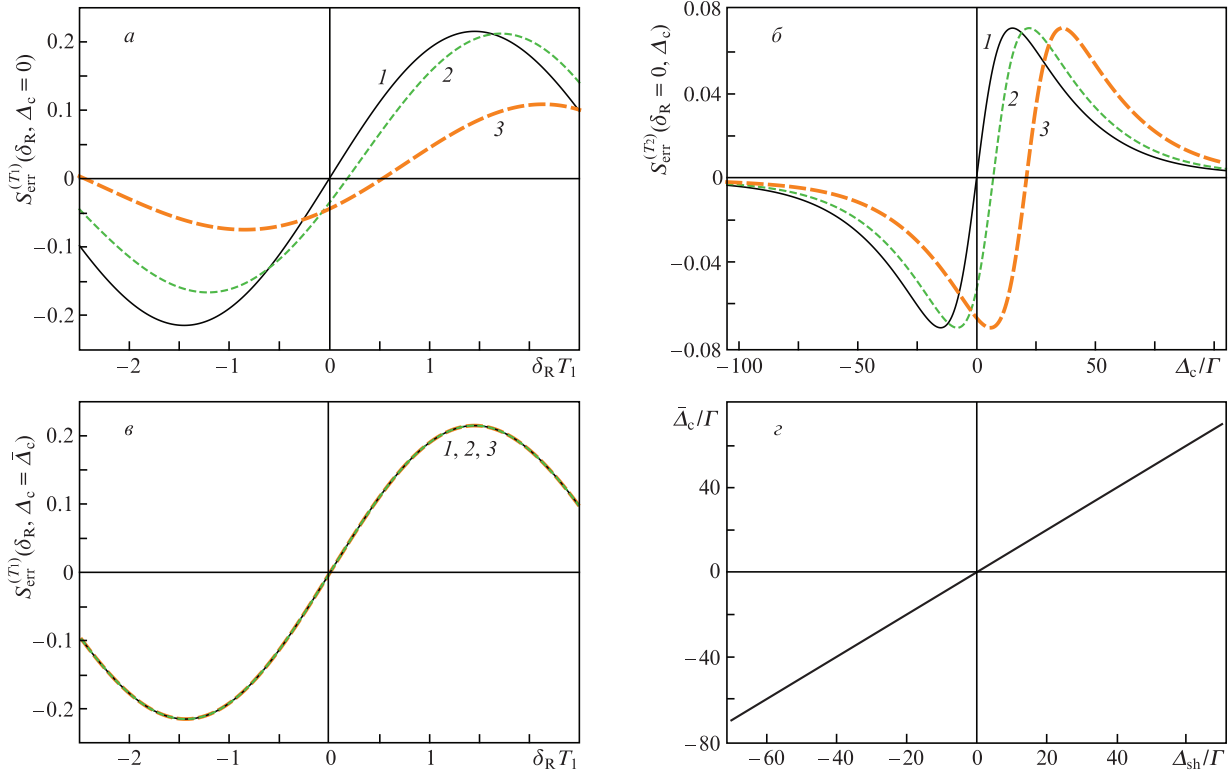


Рис.3. Сигнал ошибки  $S_{\text{err}}^{(T)}(\delta_R, \Delta_c = 0)$  в традиционной рэмсиевской схеме при различных значениях полевого сдвига  $\Delta_{sh}$  (а); сигнал ошибки  $S_{\text{err}}^{(T)}(\delta_R = 0, \Delta_c)$  для стабилизации компенсирующего частотного прыжка  $\Delta_c$  (б); сигнал ошибки  $S_{\text{err}}^{(T)}(\delta_R, \Delta_c = \bar{\Delta}_c)$  для частотной стабилизации рамановской отстройки в методе ОАБРС с компенсирующим частотным прыжком (в); зависимость частотного прыжка  $\bar{\Delta}_c$  от сдвига частоты часового перехода  $\Delta_{sh}$  (г). Численные зависимости рассчитаны для светового сдвига рамановского перехода  $\Delta_{sh}/\Gamma = 0$  (1), 7 (2) и 21 (3). Другие параметры модели:  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.3\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma_{34} = \gamma_{\text{sp}}/3$ ,  $\gamma_{\text{opt}} = 50\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\Gamma = 5 \times 10^{-5}\gamma_{\text{sp}}$ ,  $p_1 = p_2 = 1/3$ ,  $T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$ ,  $T_2 = 0.1\Gamma^{-1}$ ,  $\tau_p = \infty$  (стационарное состояние),  $\tau_d = 0.1\Gamma^{-1}$ ,  $\alpha_r^\pm = \pm\pi/2$ .

В качестве частного случая применения метода ОАБРС для КРН-резонансов рассмотрим автобалансную схему, в которой сопутствующий стабилизируемый параметр является дополнительным «прыжком» в разности частот  $\omega_1 - \omega_2$  в течение действия обоих рэмсиевских импульсов, т.е.  $\xi = \Delta_c$ . Частотный прыжок ( $\Delta_c = \bar{\Delta}_c$ ), который полностью подавляет полевой сдвиг ( $\bar{\delta}_{\text{clock}} = 0$ ), может быть найден из уравнения (24).

На рис.3,а показано поведение сигнала ошибки для традиционной рэмсиевской схемы при различных значениях полевого сдвига  $\Delta_{sh}$ . Графики сигналов ошибки для стабилизации сопутствующего параметра  $\Delta_c$  представлены на рис.3,б. На рис.3,в приведены сигналы ошибки для частотной стабилизации, когда  $\Delta_c = \bar{\Delta}_c$ . Видно, что полевой сдвиг в этом случае полностью подавлен, а сигналы ошибки полностью совпадают и имеют антисимметричную форму. Наконец, из рис.3,г следует, что частотный прыжок  $\bar{\Delta}_c$  линейно зависит от полевого сдвига:  $\bar{\Delta}_c = \Delta_{sh}$ .

#### 4. Метод комбинированного сигнала ошибки для КРН-резонансов

Данный подход основан на возбуждении и опросе атомов при применении двух последовательностей рэмсиевских импульсов с различными временами свободной эволюции  $T_1$  и  $T_2$ . Однако, в отличие от ОАБРС, здесь используется только одна петля обратной связи, и сигнал ошибки для стабилизации частоты формируется как линейная суперпозиция двух обычных сигналов ошибки, полученных отдельно для каждой рэмсиевской последовательности:

$$S_{\text{err}}^{(\text{CES})}(\delta_R) = S_{\text{err}}^{(T_1)}(\delta_R) - \beta_{\text{cal}} S_{\text{err}}^{(T_2)}(\delta_R), \quad (25)$$

где  $\beta_{\text{cal}}$  – некоторый калибровочный коэффициент. Стабилизируемая частота генератора соответствует условию, когда комбинированный сигнал ошибки равен нулю:  $S_{\text{err}}^{(\text{CES})}(\delta_R) = 0$ . Подставляя (19) в выражение (25), получаем

$$S_{\text{err}}^{(\text{CES})}(\delta_R) = e^{-\Gamma T_1} \left[ \int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_d(t) \hat{Y}_{T_1} \hat{W}_p \rho_{\text{in}}) dt - \beta_{\text{cal}} e^{\Gamma(T_1 - T_2)} \int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_d(t) \hat{Y}_{T_2} \hat{W}_p \rho_{\text{in}}) dt \right]. \quad (26)$$

При выборе калибровочного коэффициента таким, что

$$\beta_{\text{cal}} = e^{-\Gamma(T_1 - T_2)}, \quad (27)$$

выражение для комбинированного сигнала ошибки (26) может быть записано как

$$S_{\text{err}}^{(\text{CES})}(\delta_R) = e^{-\Gamma T_1} \int_{t_2}^{t_2 + \tau_d} (\mathbf{\Omega}(t), \hat{W}_d(t) \times (\hat{Y}_{T_1} - \hat{Y}_{T_2}) \hat{W}_p \rho_{\text{in}}) dt. \quad (28)$$

Принимая во внимание равенство (23) для матриц  $\hat{Y}_{T_1}$  и  $\hat{Y}_{T_2}$  при  $\delta_R = 0$ , из (28) получаем

$$S_{\text{err}}^{(\text{CES})}(0) = 0. \quad (29)$$

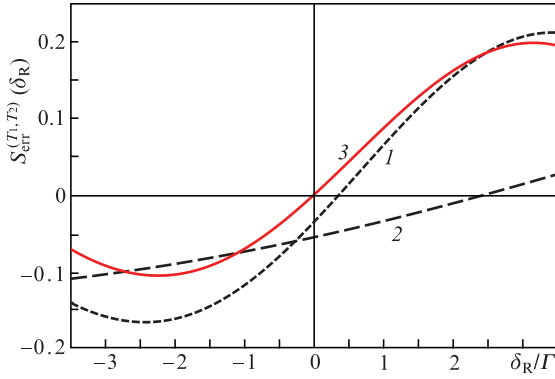


Рис.4. Сигналы ошибки для традиционной рэмсиевской схемы при  $T = 0.5\Gamma^{-1}$  (1) и  $0.05\Gamma^{-1}$  (2), а также комбинированный сигнал ошибки при  $T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$  и  $T_2 = 0.05\Gamma^{-1}$  (3). Другие параметры модели:  $\Delta_{sh}/\Gamma = 7$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.3\gamma_{sp}$ ,  $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma_{34} = \gamma_{sp}/3$ ,  $\gamma_{opt} = 50\gamma_{sp}$ ,  $\Gamma = 5 \times 10^{-5}\gamma_{sp}$ ,  $p_1 = p_2 = 1/3$ ,  $\tau_p = \infty$  (стационарное состояние),  $\tau_d = 0.1\Gamma^{-1}$ ,  $\alpha_r^\pm = \pm\pi/2$ .

Следовательно, проведенный анализ доказывает отсутствие полевого сдвига для частоты генератора, стабилизированной в нуле комбинированного сигнала ошибки (25) с калибровочным коэффициентом (27).

На рис.4 показаны сигналы ошибки для традиционной рэмсиевской схемы при двух различных временах свободной эволюции ( $T_1/T_2 = 10$ ) и комбинированный сигнал ошибки в зависимости от рамановской отстройки  $\delta_R$ . Видно, что при точном калибровочном коэффициенте  $\beta_{cal}$  (27) полевого сдвига для КСО полностью подавлен. Однако в реальных условиях  $\beta_{cal}$  может отличаться от идеального значения, что приводит к появлению остаточного сдвига для КСО. Тем не менее, как показывают расчеты (рис.5), даже при  $\pm 5\%$ -ном отклонении  $\beta_{cal}$  от идеального значения метод КСО обеспечивает подавление полевого сдвига примерно в 17 раз больше, чем традиционная рэмсиевская спектроскопия (с временем свободной эволюции  $T_1$ ).

## 5. Заключение

В настоящей работе строго доказана применимость методов обобщенной автобалансной рэмсиевской спектроскопии и комбинированного сигнала ошибки для КПП-резонансов в открытой  $\Lambda$ -системе с ловушечным состоянием, которая моделирует случай  $D_1$ -линии атомов щелочных металлов в бихроматическом циркулярно-поляризованном поле. Полученные аналитические ре-

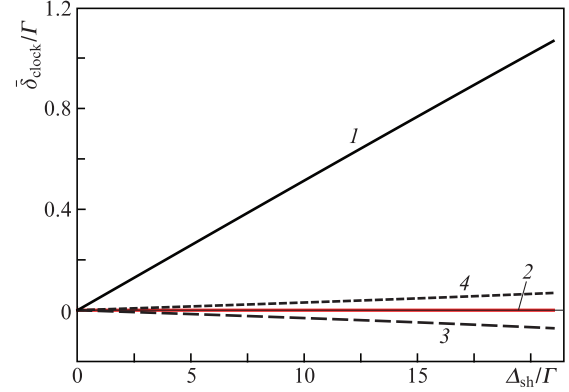


Рис.5. Сдвиги часовой частоты  $\delta_{clock}^{\tilde{}}$  в зависимости от полевого сдвига  $\Delta_{sh}$  для традиционной рэмсиевской схемы при  $T = 0.5\Gamma^{-1}$  (1), а также для КСО при  $T_1 = 0.5\Gamma^{-1}$  и  $T_2 = 0.05\Gamma^{-1}$  в случае равенства калибровочного коэффициента  $\beta_{cal}$  идеальному значению (2) и при отклонении  $\beta_{cal}$  на  $+5\%$  и  $-5\%$  от идеального значения (3 и 4 соответственно). Другие параметры модели:  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.3\gamma_{sp}$ ,  $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma_{34} = \gamma_{sp}/3$ ,  $\gamma_{opt} = 50\gamma_{sp}$ ,  $\Gamma = 5 \times 10^{-5}\gamma_{sp}$ ,  $p_1 = p_2 = 1/3$ ,  $\tau_p = \infty$  (стационарное состояние),  $\tau_d = 0.1\Gamma^{-1}$ ,  $\alpha_r^\pm = \pm\pi/2$ .

зультаты сопровождаются численными расчетами, демонстрирующими высокую эффективность подавления полевого сдвига и его флуктуаций. Применительно к методу ОАБРС рассмотрен вариант, когда для подавления полевого сдвига сопутствующим параметром является дополнительный частотный прыжок в величине рамановской отстройки. Реализация методов ОАБРС и КСО позволит значительно улучшить долговременную стабильность (до уровня ниже  $10^{-14}$ ) и точность КПП-часов. Указанные методы могут найти применение в атомных КПП-магнитометрах и интерферометрах. Преимуществом данных спектроскопических схем также является их высокая устойчивость к различным искажениям формы импульсов, релаксационным процессам, ошибкам в формировании фазовых прыжков и т. д.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-161.2020.2), РФФИ (гранты № 19-32-90181, 20-02-00505, 20-52-18004, 19-29-11014), Министерства науки и высшего образования РФ (FSUS-2020-0036), фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект № 19-1-1-67-2).

## Приложение

Лиувиллиан, определяемый уравнениями (3)–(5), имеет вид

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -(1-p_1)\Gamma & 0 & 0 & p_1\Gamma & -i\Omega_1 & i\Omega_1^* & 0 & 0 & \gamma_{31} + p_1\Gamma & p_1\Gamma \\ 0 & -\Gamma - i(\delta_R - \Delta_{sh}) & 0 & 0 & -i\Omega_2 & 0 & 0 & i\Omega_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma + i(\delta_R - \Delta_{sh}) & 0 & 0 & i\Omega_2^* & -i\Omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2\Gamma & 0 & 0 & -(1-p_2)\Gamma & 0 & 0 & -i\Omega_2 & i\Omega_2^* & \gamma_{32} + p_2\Gamma & p_2\Gamma \\ -i\Omega_1^* & -i\Omega_2^* & 0 & 0 & -\gamma_{opt} - i\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\Omega_1 & 0 & i\Omega_2 & 0 & 0 & -\gamma_{opt} + i\delta_1 & 0 & 0 & -i\Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & -i\Omega_1^* & -i\Omega_2^* & 0 & 0 & -\gamma_{opt} - i\delta_2 & 0 & i\Omega_2^* & 0 \\ 0 & i\Omega_1 & 0 & i\Omega_2 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{opt} + i\delta_2 & -i\Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\Omega_1 & -i\Omega_1^* & i\Omega_2 & -i\Omega_2^* & -\gamma_{sp} - \Gamma & 0 \\ (1-p_1-p_2)\Gamma & 0 & 0 & (1-p_1-p_2)\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{34} + (1-p_1-p_2)\Gamma & -(p_1+p_2)\Gamma \end{pmatrix}. \quad (P1)$$

В отсутствие светового поля ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$  и  $\Delta_{sh} = 0$ ) лиу-виллиан

$$\hat{L}_0 = \begin{pmatrix} -(1-p_1)\Gamma & 0 & 0 & p_1\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{31} + p_1\Gamma & p_1\Gamma \\ 0 & -\Gamma - i\delta_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma + i\delta_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2\Gamma & 0 & 0 & -(1-p_2)\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{32} + p_2\Gamma & p_2\Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{opt} - i\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{opt} + i\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{opt} - i\delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{opt} + i\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{sp} - \Gamma & 0 \\ (1-p_1-p_2)\Gamma & 0 & 0 & (1-p_1-p_2)\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{34} + (1-p_1-p_2)\Gamma & -(p_1+p_2)\Gamma \end{pmatrix}. \quad (P2)$$

Оператор  $\hat{G}_T = e^{\hat{L}_0 T}$ , описывающий свободную эволюцию атомов, определяется как

$$\hat{G}_T = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{19} & G_{1,10} \\ 0 & e^{-(\Gamma+i\delta_R)T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\Gamma-i\delta_R)T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{49} & G_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{opt}+i\delta_1)T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{opt}-i\delta_1)T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{opt}+i\delta_2)T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{opt}-i\delta_2)T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-(\gamma_{sp}+\Gamma)T} & 0 \\ G_{10,1} & 0 & 0 & G_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{10,9} & G_{10,10} \end{pmatrix}, \quad (P3)$$

где

$$G_{11} = p_1 + (1-p_1)e^{-\Gamma T};$$

$$G_{14} = G_{1,10} = p_1(1 - e^{-\Gamma T});$$

$$G_{19} = \frac{p_1(\gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{34} + \Gamma)}{\gamma_{sp} + \Gamma} + \frac{(1-p_1)\gamma_{31} - p_1(\gamma_{32} + \gamma_{34})}{\gamma_{sp}} e^{-\Gamma T} - \frac{\gamma_{sp}(\gamma_{31} + p_1\Gamma) + \Gamma[(1-p_1)\gamma_{31} - p_1(\gamma_{32} + \gamma_{34})]}{\gamma_{sp}(\gamma_{sp} + \Gamma)} e^{-(\gamma_{sp} + \Gamma)T};$$

$$G_{41} = G_{4,10} = p_2(1 - e^{-\Gamma T});$$

$$G_{44} = p_2 + (1-p_2)e^{-\Gamma T};$$

$$G_{49} = \frac{p_2(\gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{34} + \Gamma)}{\gamma_{sp} + \Gamma} + \frac{(1-p_2)\gamma_{32} - p_2(\gamma_{31} + \gamma_{34})}{\gamma_{sp}} e^{-\Gamma T} - \frac{\gamma_{sp}(\gamma_{32} + p_2\Gamma) + \Gamma[(1-p_2)\gamma_{32} - p_2(\gamma_{31} + \gamma_{34})]}{\gamma_{sp}(\gamma_{sp} + \Gamma)} e^{-(\gamma_{sp} + \Gamma)T};$$

$$G_{10,1} = G_{10,4} = (1-p_1-p_2)(1 - e^{-\Gamma T});$$

$$G_{10,9} = \frac{(1-p_1-p_2)(\gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{34} + \Gamma)}{\gamma_{sp} + \Gamma} + \frac{(p_1+p_2)\gamma_{34} - (1-p_1-p_2)(\gamma_{31} + \gamma_{32})}{\gamma_{sp}} e^{-\Gamma T} - \frac{[\gamma_{sp}[\gamma_{34} + (1-p_1-p_2)\Gamma] + \Gamma(p_1+p_2)\gamma_{34}]}{\gamma_{sp}(\gamma_{sp} + \Gamma)} e^{-(\gamma_{sp} + \Gamma)T};$$

$$- \frac{\Gamma(1-p_1-p_2)(\gamma_{31} + \gamma_{32})}{\gamma_{sp}(\gamma_{sp} + \Gamma)} e^{-(\gamma_{sp} + \Gamma)T};$$

$$G_{10,10} = 1 - p_1 - p_2 + (p_1 + p_2)e^{-\Gamma T}.$$

1. Riehle F. *Frequency Standards: Basics and Applications* (New York: Wiley-VCH, 2005).
2. Ludlow A.D. et al. *Rev. Mod. Phys.*, **87**, 637 (2015).
3. Kajita M. *Measuring Time: Frequency Measurements and Related Developments in Physics* (Bristol: Institute of Physics, 2018).
4. Prestage J.D., Weaver G.L. *Proc. IEEE*, **95**, 2235 (2007).
5. Mehlstäubler T.E. et al. *Rep. Prog.*, **81**, 064401 (2018).
6. Maleki L., Prestage J. *Metrologia*, **42**, S145 (2005).
7. Derevianko A., Pospelov M. *Nature Phys.*, **10**, 933 (2014).
8. Alzetta G. et al. *Nuovo Cimento B*, **36**, 5 (1976).
9. Агапьев Б.Д. и др. *УФН*, **163**, 1 (1993) [*Phys. Usp.*, **36**, 763 (1993)].
10. Arimondo E. *Prog. Opt.*, **35**, 257 (1996).
11. Vanier J. *Appl. Phys. B*, **81**, 421 (2005).
12. Shah V., Kitching J. *Adv. At., Mol., Opt. Phys.*, **59**, 21 (2010).
13. Knappe S. et al. *Opt. Express*, **13**, 1249 (2005).
14. Wang Z. *Chin. Phys. B*, **23**, 030601 (2014).
15. Kitching J. *Appl. Phys. Rev.*, **5**, 031302 (2018).
16. Ramsey N.F. *Phys. Rev.*, **78**, 695 (1950).
17. Yudin V.I. et al. *Phys. Rev. A*, **82**, 011804(R) (2010).
18. Huntemann N. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 213002 (2012).
19. Huntemann N. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 063001 (2016).
20. Hobson R. et al. *Phys. Rev. A*, **93**, 010501(R) (2016).
21. Zanon-Willette T. et al. *Phys. Rev. A*, **92**, 023416 (2015).
22. Zanon-Willette T., de Clercq E., Arimondo E. *Phys. Rev. A*, **93**, 042506 (2016).
23. Yudin V.I. et al. *Phys. Rev. A*, **94**, 052505 (2016).
24. Zanon-Willette T. et al. *Rep. Prog. Phys.*, **81**, 094401 (2018).
25. Sanner C. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **120**, 053602 (2018).
26. Yudin V.I. et al. *Phys. Rev. Appl.*, **9**, 054034 (2018).
27. Yudin V.I. et al. *New J. Phys.*, **20**, 123016 (2018).
28. Abdel Hafiz M. et al. *Phys. Rev. Appl.*, **9**, 064002 (2018).
29. Abdel Hafiz M. et al. *Appl. Phys. Lett.*, **112**, 244102 (2018).
30. Shuker M. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 113601 (2019).
31. Shuker M. et al. *Appl. Phys. Lett.*, **114**, 141106 (2019).
32. Basalaeв M.Yu. et al. *Phys. Rev. A*, **102**, 013511 (2020).