

Квантовый перенос в одномерной вихревой ромбической решетке

П.С.Мураев, А.Р.Коловский

Проанализирован стационарный ток бозонных частиц в вихревой ромбической решетке, соединяющей два резервуара с частицами. Показано, что при исчезающе малом взаимодействии частиц ток этих частиц монотонно убывает по мере увеличения магнитного потока и обращается точно в нуль при фазе Пайерлса, равной π . Отличие силы взаимодействия от нуля модифицирует эту зависимость, и при умеренной ее величине было обнаружено, что ток частиц не зависит от величины магнитного потока.

Ключевые слова: квантовый перенос, ромбическая решетка, псевдоклассический подход.

1. Введение

Квантовый перенос частиц в периодических структурах вызывает постоянный интерес со времени зарождения квантовой механики [1]. В последние годы эта задача актуальна для холодных атомов в оптических ловушках, для которых одно из направлений исследований – перенос бозе- или ферми-атомов между двумя резервуарами, соединенными решеткой [2–9]. При определенных условиях данная задача может быть решена аналитически, что дает точку отсчета для изучения различных реалистических систем. Эти условия таковы: резервуары являются марковскими, так что оправданно использование кинетического уравнения для приведенной матрицы плотности фермионных/бозонных носителей в решетке; взаимодействия между частицами пренебрежимо малы, что позволяет применять формализм одночастичной матрицы плотности; решетка имеет простую структуру и может быть аппроксимирована линейной цепочкой с сильной связью. Нарушение любого из указанных условий намного усложняет анализ системы, но одновременно обуславливает появление новых эффектов. В частности, в недавно опубликованной работе [9] показано, что межчастичные взаимодействия приводят к смене баллистического режима переноса диффузионным, при котором ток частиц обратно пропорционален длине решетки.

Настоящая статья обобщает результаты работы [9] на случай переноса бозе-частиц в ромбической решетке. Как известно, блоховский спектр данной решетки состоит из двух дисперсионных ветвей и одной плоской зоны, формируемой локализованными состояниями. Более того, накладывая внешнее калибровочное поле, можно модифицировать дисперсионное соотношение, делая дисперсионные зоны также плоскими [10–12]. Это связывает

рассматриваемую в статье задачу с другими фундаментальными задачами, такими как роль плоских зон в квантовом переносе [13–15] и устойчивость локализованных состояний в присутствии межчастичных взаимодействий [10, 16, 17].

Квазиодномерная оптическая решетка, близкая к ромбической вихревой решетке, была реализована в работе [18], где вместо ромбов использовались квадраты (так называемая лестница с двумя ножками). Меняя поток синтезированного магнитного поля через квадраты, авторы [18] убедительно продемонстрировали изменение дисперсионного соотношения Блоха, но при квадратной геометрии решетки плоские зоны, к сожалению, получить невозможно. Отметим, что ромбическую вихревую решетку можно рассматривать как цепочку идентичных интерферометров Маха–Цендера с различными длинами плеч. Эта аналогия может предполагать совершенно иную физическую реализацию модели. Однако для определенности будем иметь в виду реализацию на холодных атомах, при которой бозе-атомы загружаются в оптическую решетку с ромбической геометрией.

2. Описание системы

Элементарная ячейка ромбической решетки состоит из трех узлов, которые обозначим буквами C_m , A_m и B_m , где индекс m – номер ячейки (рис. 1). Магнитный поток через каждую ячейку характеризуется фазой Пайерлса Φ , которая определяет матричные элементы переходов между узлами. Тогда зоны Блоха описываются уравнениями

$$\varepsilon_0(\kappa) = 0, \quad \varepsilon_{\pm}(\kappa) = \pm J\sqrt{1 + \cos(\Phi/2)\cos(\kappa - \Phi/2)}, \quad (1)$$

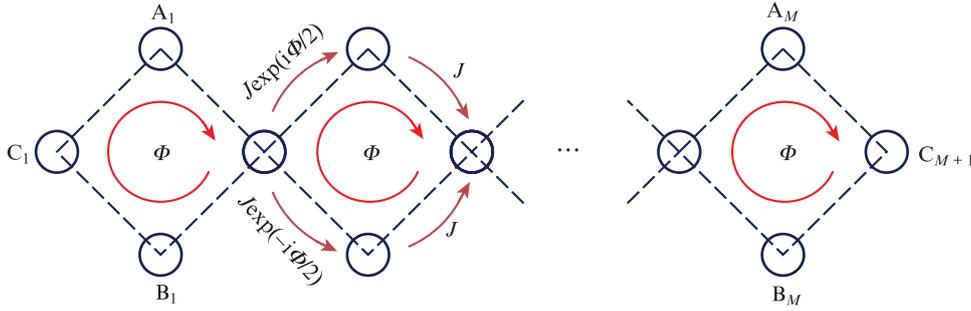
где κ – квазиимпульс; $\varepsilon_0(\kappa)$ – энергия плоской зоны. Особый интерес представляет случай $\Phi = \pi$, когда дисперсионные зоны $\varepsilon_{\pm}(\kappa)$ также становятся плоскими, т.е. $\varepsilon_{\pm}(\kappa) = \pm J$.

Система характеризуется гамильтонианом типа гамильтониана Бозе–Хаббарда,

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{l,m}(J_{lm}\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_l + \text{h.c.}) + \frac{U}{2}\sum_l\hat{n}_l(\hat{n}_l - 1), \quad (2)$$

* Перевод с англ. В.Л.Дербова.

П.С.Мураев, А.Р.Коловский. Институт физики им. Л.В.Киренского СО РАН, Россия, 660036 Красноярск, Академгородок, 50, стр.38; Сибирский федеральный университет, Россия, 660041 Красноярск, просп. Свободный, 79; e-mail: murayev.pavel@mail.ru


 Рис.1. Вихревая ромбическая решетка, состоящая из M ромбов.

где $|J_{lm}| = J$ – частота перескока атомов между узлами решетки; параметр U характеризует силу межатомных взаимодействий при столкновениях; \hat{n}_l – оператор числа частиц. Мы выбрали калибровку, в которой матричный элемент $J_{CA} = J \exp(i\Phi/2)$, матричный элемент $J_{CB} = J \exp(-i\Phi/2)$, а оставшиеся два матричных элемента равны J . Для численных расчетов перенумеруем узлы решетки в порядке $C_1, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ (так, например, индекс $l = 5$ соответствует узлу А второй ячейки).

Рассмотрим перенос бозе-частиц в ромбической решетке. Частицы приходят из резервуара слева в узел C_1 и выходят из решетки в резервуар справа из узла C_{M+1} . Наличие резервуаров частиц преобразует гамильтонову систему (2) в открытую многочастичную систему, динамика которой описывается матрицей плотности $R(t)$ носителей в решетке, что подразумевает справедливость приближения Борна–Маркова [19]. Кинетическое уравнение для матрицы плотности R имеет вид [6–9]

$$\frac{dR}{dt} = -i[H, R] + L_{\text{source}}(R) + L_{\text{drain}}(R), \quad (3)$$

где операторы

$$L_{\text{source}}(R) = -\frac{\gamma_L}{2} [(\hat{n}_L + 1)(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 R - 2\hat{a}_1 R \hat{a}_1^\dagger + R \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) + \hat{n}_L(\hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger R - 2\hat{a}_1^\dagger R \hat{a}_1 + R \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger)], \quad (4)$$

$$L_{\text{drain}}(R) = -\frac{\gamma_R}{2} [(\hat{n}_R + 1)(\hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L R - 2\hat{a}_L R \hat{a}_L^\dagger + R \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L) + \hat{n}_R(\hat{a}_L \hat{a}_L^\dagger R - 2\hat{a}_L^\dagger R \hat{a}_L + R \hat{a}_L \hat{a}_L^\dagger)] \quad (5)$$

учитывают процессы обмена частицами между системой (решеткой) и резервуарами. Параметры γ_L, γ_R и \hat{n}_L, \hat{n}_R в уравнениях (4) и (5) – скорости обмена и плотности числа частиц для левого и правого резервуаров соответственно. Отметим, что использование терминов «исток» и «сток» в уравнениях (3)–(5) подразумевает, что $\hat{n}_L > \hat{n}_R$.

В последующих разделах мы решим уравнение (3) и вычислим элементы одночастичной матрицы плотности (ОМП) носителей

$$\rho_{lm}(t) = \text{Tr}[\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_m R(t)], \quad 1 \leq l, m \leq L, \quad (6)$$

что достаточно для предсказания тока частиц между резервуарами. Размерность этой матрицы, очевидно, дается выражением $L = 3M + 1$, где M – число ромбов.

3. Невзаимодействующие частицы ($U = 0$)

В случае исчезающе малого межчастичного взаимодействия для элементов ОМП получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{lm}(t) = & -i[H, \hat{\rho}]_{lm} - \sum_{j=1, L} \frac{\gamma_j}{2} (\delta_{lj} + \delta_{mj}) \rho_{lm} \\ & + \sum_{j=1, L} \gamma_j \hat{n}_j \delta_{lj} \delta_{mj}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что эти уравнения верны для любой решетки, если частицы инжектируются в первый узел решетки и изымаются из последнего. Ниже для упрощения уравнений мы предполагаем, что релаксационные постоянные $\gamma_1 \equiv \gamma_L$ и $\gamma_L \equiv \gamma_R$ одинаковы и равны γ .

Обсудим вначале случай $\Phi = 0$, когда уравнение (7) решается аналитически. Пример стационарной ОМП бозе-носителей в ромбической решетке приведен слева внизу на рис.2 для $M = 7$. Здесь стационарные населенности узлов С (кроме первого и последнего) одинаковы и даются выражением

$$\rho_{ll}^C = \frac{\hat{n}_L + \hat{n}_R}{2}, \quad (8)$$

а населенности узлов А и В равны половине этой величины. Недиagonальные элементы ρ_{lm} (здесь l и m – номера

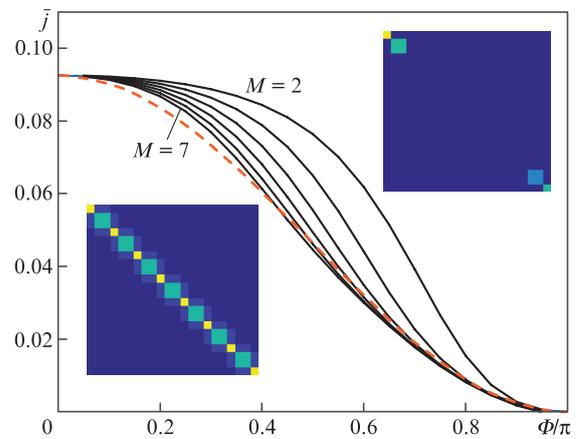


Рис.2. Нормированный стационарный ток как функция Φ при $M = 2-7$. Использовались параметры $\gamma_L = \gamma_R = 0.4J$ и $\hat{n}_R/\hat{n}_L = 0.5$. Штриховая кривая соответствует выражению (12). На вставках показаны абсолютные величины элементов ОМП для $M = 7$ при $\Phi = 0$ и π . Цветные варианты рис.2 и 4 помещены на сайте нашего журнала <http://www.quantum-electron.ru>.

ближайших двух узлов решетки) одинаковы. Эти элементы определяют стационарный ток бозе-атомов в решетке и подчиняются уравнению

$$\bar{j} = j_0 \frac{J\gamma}{J^2 + \gamma^2/2} \frac{\bar{n}_L - \bar{n}_R}{2}, \quad (9)$$

где $j_0 = Jd\hbar$; d – период решетки. Сравнивая это уравнение с уравнением (34) из работы [9], приходим к выводу, что при $\Phi = 0$ ромбическая решетка ведет себя подобно простой линейной решетке, четные узлы которой представляют собой «сумму» узлов А и В ромбической решетки. Отметим также, что разность $\bar{n}_L - \bar{n}_R$ можно переписать в виде $\bar{n}_L(1 - \bar{n}_R/\bar{n}_L)$. Тогда после нормировки на $j_0\bar{n}_L$ стационарный ток \bar{j} становится функцией только двух параметров – отношения \bar{n}_R/\bar{n}_L и отношения γ/J .

Перейдем к анализу случая $\Phi = \pi$ (см. справа сверху на рис.2). Как и ожидалось, распространение частиц по решетке блокируется деструктивной интерференцией, так что ток строго равен нулю. Для населенностей крайних узлов имеем выражения

$$\rho_{II} = \bar{n}_L, \quad \rho_{LL} = \bar{n}_R, \quad (10)$$

а населенности соседних узлов А и В составляют половину этих величин. Отметим также, что димеры А–В на краях решетки находятся в антисимметричном (левый край) и симметричном (правый край) состояниях, т. е.

$$\rho_{AB} = \mp \sqrt{\rho_{AA}\rho_{BB}}. \quad (11)$$

К сожалению, для стационарного тока при произвольном Φ не существует простого аналитического выражения. Более того, результат зависит от длины решетки. На рис.2 показаны зависимости установившегося тока в системе от Φ при $2 \leq M \leq 7$ (ток нормирован на плотность числа частиц в левом резервуаре).

Видно, что кривые быстро сходятся к некоторой предельной кривой, которая может быть аппроксимирована соотношением

$$\bar{j}(\Phi) \approx \bar{j}(\Phi = 0) \cos^2(\Phi/2). \quad (12)$$

Можно наивно предположить, что зависимость (12) определяется среднеквадратичной групповой скоростью квантовой частицы в решетке [8], однако оказывается, что это не так. Обоснование соотношения (12) остается открытой проблемой.

4. Взаимодействующие частицы

Для рассмотрения взаимодействующих частиц используем псевдоклассический подход (известный также как приближение усеченной функции Вигнера или усеченной функции Хусими), который продемонстрировал весьма высокую точность при анализе тока в простой линейной решетке [9]. В этом подходе кинетическое уравнение (3) сводится к уравнению Фоккера–Планка для классической функции распределения $f = f(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*; t)$, заданной в многомерном фазовом пространстве $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_L$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} + \sum_{l=1,L} [G^{(l)}(f) + D^{(l)}(f)], \quad (13)$$

где H – классический аналог гамильтониана Бозе–Хаббарда (2); $\{\dots, \dots\}$ – скобки Пуассона; члены в квадратных скобках – вейлевские образы операторов Линдблада $L_{\text{source}}(R)$ и $L_{\text{drain}}(R)$. Для прояснения математической структуры уравнения разложим эти образы на явно фрикционные,

$$G^{(l)}(f) = \frac{\gamma_l}{2} \left(a_l \frac{\partial f}{\partial a_l} + 2f + a_l^* + \frac{\partial f}{\partial a_l^*} \right), \quad (14)$$

и явно диффузионные,

$$D^{(l)}(f) = D_l \frac{\partial^2 f}{\partial a_l \partial a_l^*}, \quad (15)$$

члены, где коэффициенты диффузии $D_1 \equiv D_L$ и $D_L \equiv D_R$ пропорциональны плотностям числа частиц в резервуарах \bar{n}_L и \bar{n}_R соответственно.

Зная функцию распределения $f = f(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*; t)$, можно рассчитать элементы ОМП путем взятия многомерного интеграла

$$\rho_{lm}(t) = \int a_l^* a_m f(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*; t) d\mathbf{a} d\mathbf{a}^*. \quad (16)$$

Отметим, что данный метод точен при $U = 0$ и при формальном предельном переходе $U \rightarrow 0$, $\bar{n}_L \rightarrow \infty$, $g = U\bar{n}_L = \text{const}$. Основное достоинство подхода заключается в том, что при невозможности решить уравнение Фоккера–Планка (13) аналитически всегда можно оценить $\rho_{lm}(t)$ посредством перехода к уравнению Ланжевена и моделирования методом Монте-Карло.

На рис.3 приведены зависимости от Φ стационарных токов в вихревой ромбической решетке при $g = 0, 0.7$ и 2 . Видно, что при Φ , близком к нулю, взаимодействия подавляют ток. Это согласуется с результатами работы [9] и фактически указывает на переход от баллистического режима переноса к диффузионному режиму. Однако для Φ , близких к π , ток усиливается и имеет конечное значение даже при $\Phi = \pi$, когда перенос запрещен из-за эффекта локализации, если $g = 0$. Таким образом, взаимодействия разрушают локализацию. Это согласуется с результатами работы [10], в которой анализируется энергетический

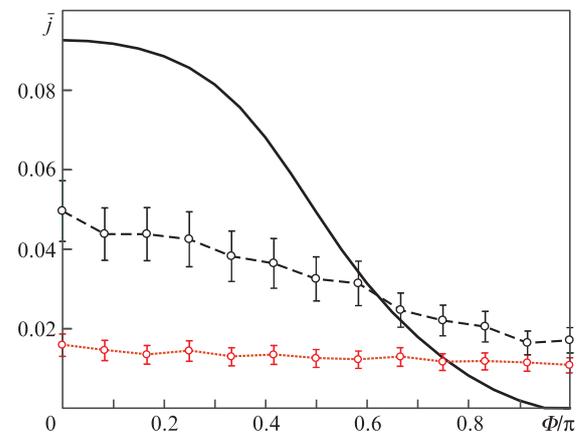


Рис.3. Стационарный ток как функция Φ при $M = 5$ и $g = 0$ (сплошная кривая), 0.7 (штриховая кривая) и 2 (пунктирная кривая). Другие параметры те же, что и для рис.2. Погрешности указывают величину статистической ошибки, связанной с моделированием методом Монте-Карло.

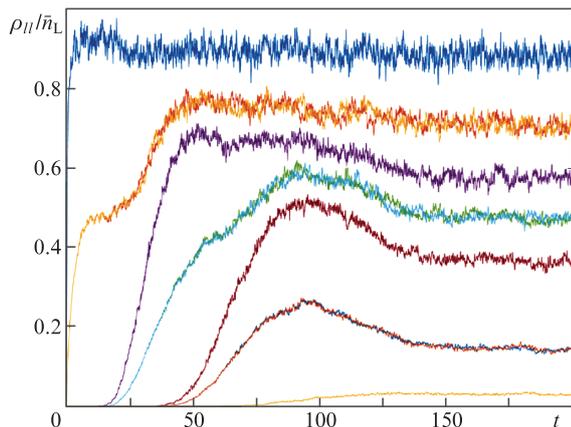


Рис.4. Населенности узлов решетки (диагональные элементы ОМП) как функции времени при $\Phi = \pi$, $M = 3$ и других параметрах $\gamma_L = \gamma_R = 0.4J$, $\tilde{n}_R = 0$, $g = 4$. Усреднение проводилось по 400 реализациям. Кривые для $\rho_{CC}^{(1)}$, $\rho_{AA}^{(1)}$ и $\rho_{BB}^{(1)}$, $\rho_{CC}^{(2)}$, $\rho_{AA}^{(2)}$, $\rho_{BB}^{(2)}$ и т.д. расположены сверху вниз. Время t нормировано на время туннелирования \hbar/J .

спектр двух взаимодействующих фермионов в вихревой ромбической решетке, и работы [17], специально посвященной устойчивости локализованных состояний по отношению к взаимодействиям. В частности, в [17] было показано, что асимметричное (или симметричное, в зависимости от выбранной калибровки) локализованное состояние А–В подвержено динамической нестабильности, которая приводит к возбуждению незащищенного симметричного (асимметричного) состояния А–В. Поскольку развитие неустойчивости требует некоторого времени, в ромбической решетке мы имеем весьма длительный переходный режим при $\Phi = \pi$. В течение этого переходного процесса наблюдается последовательное заселение узлов С с временной задержкой, определяемой временем неустойчивости (рис.4). Когда все узлы С заселены, система переходит в стационарный режим с диффузионным переносом частиц из левого резервуара в правый.

Использованный псевдоклассический подход обеспечивает также альтернативную точку зрения на роль межчастичных взаимодействий в квантовом переносе. Если в квантовой картине учет взаимодействий приводит к деградации когерентных свойств ОМП, то в классической картине, где взаимодействующие бозоны в каждом узле решетки рассматриваются как классические нелинейные осцилляторы, потеря когерентности связывается с дефазировкой (десинхронизацией) различных осцилляторов из-за зависимости частоты колебаний нелинейного осциллятора от амплитуды.

5. Заключение

Исследован ток невзаимодействующих и взаимодействующих бозе-носителей, протекающий по ромбической вихревой решетке. При исчезающе малом межчастичном взаимодействии перенос является баллистическим и ток определяется интерференционными эффектами из-за наличия двух альтернативных путей перехода между узлами С. При нулевом потоке интерференция конструктивна и ток максимален. При потоке, соответствующем фазе Пайерлса $\Phi = \pi$, наоборот, интерференция полностью деструктивна и ток равен нулю. При промежуточных значениях Φ обнаружено, что ток приблизительно пропорционален $\cos^2(\Phi/2)$.

В отличие от случая исчезающе малых взаимодействий, при умеренной силе взаимодействия, $g \approx J$, ток в основном обусловлен эффектами взаимодействия частиц, меняющими баллистический режим переноса на диффузионный. Исходя из общих соображений, можно ожидать, что диффузия разрушит интерференцию. Это предположение полностью подтверждается численным анализом динамики системы, из которого следует, что установившийся ток бозе-носителей не зависит от Φ .

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-12-00167).

1. Bloch F. *Z. Phys.*, **52**, 555 (1928).
2. Lebrat M., Grisins P., Husmann D., Häusler S., Corman L., Giamarchi T., Brantut J.-Ph., Esslinger T. *Phys. Rev. X*, **8**, 011053 (2018).
3. Prosen T., Žunković B. *New J. Phys.*, **12**, 025016 (2010).
4. Znidaric M. *J. Stat. Mech.*, **2010**, L05002 (2010).
5. Bruderer M., Belzig W. *Phys. Rev. A*, **85**, 013623 (2012).
6. Ivanov A., Kordas G., Komnik A., Wimberger S. *Eur. Phys. J. B*, **86**, 345 (2013).
7. Kordas G., Witthaut D., Wimberger S. *Ann. Phys.*, **527**, 619 (2015).
8. Kolovsky A.R., Denis Z., Wimberger S. *Phys. Rev. A*, **98**, 043623 (2018).
9. Bychek A.A., Muraev P.S., Maksimov D.N., Kolovsky A.R. *Phys. Rev. E*, **101**, 012208 (2020).
10. Vidal J., Douçot B., Mosseri R., Butaud P. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3906 (2000).
11. Longhi S. *Opt. Lett.*, **38**, 3570 (2013).
12. Mukherjee S., Thomson R.R. *Opt. Lett.*, **40**, 5443 (2015).
13. Khomeriki R., Flach S. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 245301 (2016).
14. Kolovsky A.R., Ramachandran A., Flach S. *Phys. Rev. B*, **97**, 045120 (2018).
15. Kun Woo Kim, Andreanov A., Flach S. *Phys. Rev. Res.*, **2**, 023067 (2020).
16. Danieli C., Andreanov A., Flach S. *Phys. Rev. B*, **102**, 041116 (2020).
17. Maksimov D.N., Bychek A.A., Kolovsky A.R. *Phys. Rev. A*, **102**, 033324 (2020).
18. Atala M., Aidelsburger M., Lohse M., Barreiro J.T., Paredes B., Bloch I. *Nat. Phys.*, **10**, 588 (2014).
19. Kolovsky A.R. *Phys. Rev. E*, **101**, 062116 (2020).