Уширение уровней энергии ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами в ионах группы IIb термоизлучением окружающей среды

И.Л.Глухов, А.А.Каменский, В.Д.Овсянников

Представлен вывод простых аналитических выражений для расчетов индуцируемых излучением черного тела (ИЧТ) ширин ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами в ионах Zn^+, Cd^+, Hg^+ группы IIb периодической системы элементов при температурах окружающей среды от 100 до 3000 К. Рассчитаны вероятности радиационных переходов из возбужденных nS-, nP-, nD- и nF-состояний во все дипольно-доступные состояния ионов. При расчетах амплитуд связанно-связанных переходов использованы волновые функции метода квантового дефекта (МКД) для начального и конечного состояний ридберговского электрона. Определены зависимости вероятностей индуцированных распадов и возбуждений от температуры ИЧТ, главного и орбитального квантовых чисел ридберговского иона. Получены аналитические выражения для численных оценок вкладов вероятностей термоиндуцированных распадов и возбуждений в ширину ридберговского энергетического уровня. Рассчитаны численные значения коэффициентов интерполяционных полиномов, представляющих асимптотические разложения по степеням главного квантового числа n для относительных вероятностей распадов и возбуждений ридберговских состояний с большими значениями n и малыми орбитальными моментами l = 0, 1, 2, 3.

Ключевые слова: *атом, ион, группа IIb, ридберговские состояния, излучение черного тела, вероятность распада, возбуждения, метод квантового дефекта.*

1. Введение

Ионы в высоковозбужденных ридберговских состояниях рассматриваются как перспективные объекты исследований, направленных на создание новых стандартов частоты в оптическом и микроволновом диапазонах [1–5], а также высокоэффективных устройств обработки квантовой информации [6–8]. Атомы и ионы в ридберговских состояниях высокочувствительны к внешним полям и могут служить для прецизионного измерения температуры теплового излучения окружающей среды (называемого в литературе излучением черного тела – ИЧТ) непосредственно в области локализации ридберговских частиц [9], для измерения слабых полей [10], а также для метрологических измерений характеристик радиочастотного излучения [11]. Хорошо разработанные методы лазерного возбуждения состояний с высокой энергией делают экспериментально доступными ридберговские состояния с произвольными значениями главного (n) и орбитального (l) квантовых чисел валентного электрона [12–14].

Ионы группы II периодической системы элементов привлекают внимание исследователей не только в связи с доступностью чистых веществ, но и в связи с простотой одноэлектронного оптического спектра, напоминающего спектр атомов щелочных металлов и позволяющего использовать одноэлектронное приближение при расчетах характеристик взаимодействия с внешними электромагнитными полями. Структура спектра энергий возбуждения внешнего (валентного) электрона с хорошей точностью описывается формулой Ридберга, использующей понятие квантового дефекта. На основе формулы Ридберга разработаны и широко используются при численных расчетах полуэмпирические методы модельного потенциала Фьюса (МПФ) и метод квантового дефекта (МКД), в рамках которых одноэлектронные волновые функции представляются в виде модифицированных волновых функций водородоподобного атома, позволяющих получать аналитические выражения для восприимчивостей и амплитуд электромагнитных переходов в атомах и ионах [15]. При расчетах характеристик взаимодействия ионов группы IIb с полем ИЧТ в настоящей работе используется МКД, в котором численные значения квантовых дефектов определяются из наиболее надежных таблиц энергетических уровней [16, 17]. Для уровней с большими главными квантовыми числами, данные для которых отсутствуют в литературе, определение квантовых дефектов основано на асимптотических выражениях, параметры которых можно найти в работах [18, 19]. Сравнение результатов численных расчетов в рамках МКД с теоретическими и экспериментальными литературными данными для времен жизни возбужденных состояний ионов Zn^+, Cd^+, Hg^+ подтверждает применимость этого метода для расчетов амплитуд радиационных переходов из ридберговских состояний. В качестве примера такое сравнение приводится в табл.1 для ионов Zn^+.

В табл.1 представлены времена жизни полностью изолированного от внешней среды иона. Очевидно, что в реальных условиях атомный ион может испытывать воздействие различных внешних полей, в частности тех, что удерживают частицы в заданной области локализации [1], а также остаточных лабораторных и других стационарных и переменных полей. Влияние каждого конкрет-

И.Л.Глухов, А.А.Каменский, В.Д.Овсянников. Воронежский государственный университет, Россия, 394018 Воронеж, Университетская пл., 1; e-mail: glukhovofficial@mail.ru

Поступила в редакцию 29 марта 2021 г., после доработки – 22 апреля 2021 г.

Табл.1. Времена жизни (в наносекундах) возбужденных nS-, $n\mathrm{P}_{3/2}$-, $n\mathrm{D}_{5/2}$- и $n\mathrm{F}_{7/2}$-состояний иона Zn^+, рассчитанные в приближении МКД, в сравнении с данными метода МПФ [19], информационной системы [17] и с областью значений наиболее надежных теоретических и экспериментальных данных, приведенных в работах [20, 21].

Состояние	МКД	МПФ	[17]	Теория	Эксперимент
5S	2.594	3.24	1.7	1.4–2.5	1.7–3.9
6S	4.845	5.66	3.6	3.58–4.7	–
7S	8.858	9.89	7.3	–	–
8S	14.63	16.0	–	–	–
$4\mathrm{P}_{3/2}$	2.049	2.04	2.6	1.91–3.1	1.81–3.5
$5\mathrm{P}_{3/2}$	14.89	16.9	16.7	15.9–18.6	15.0–19.0
$6\mathrm{P}_{3/2}$	59.9	55.0	46.9	46.9–67.9	–
$7\mathrm{P}_{3/2}$	209.9	64.6	–	–	–
$8\mathrm{P}_{3/2}$	155.2	266.9	–	–	–
$4\mathrm{D}_{5/2}$	1.32	1.43	1.5	1.21–1.39	1.3–4.55
$5\mathrm{D}_{5/2}$	3.25	3.45	3.7	3.25–3.75	4.9–5.9
$6\mathrm{D}_{5/2}$	6.44	6.73	8.9	6.6–7.56	8.0–9.8
$7\mathrm{D}_{5/2}$	11.2	11.8	17.0	11.48	15.2–18.8
$8\mathrm{D}_{5/2}$	17.7	18.6	–		
$4\mathrm{F}_{7/2}$	4.79	4.97	4.3	4.2–4.8	4.35–7.2
$5\mathrm{F}_{7/2}$	9.86	9.91	9.4	8.53–9.5	–
$6\mathrm{F}_{7/2}$	17.2	17.0	17.3	17.11–18.8	–
$7\mathrm{F}_{7/2}$	27.9	27.2	–	–	–

ного поля на структуру спектра иона является самостоятельной задачей, решение которой позволяет исключить, скомпенсировать или учесть это влияние в каждом конкретном случае [2–8].

В настоящей работе рассмотрено влияние поля неустранимого вездесущего ИЧТ на сдвиг и уширение ридберговских уровней энергии однократно ионизованного атома из группы IIb периодической системы элементов. Рассчитаны численные значения вероятностей термоиндуцированных переходов из ридберговских состояний S-, P-, D- и F-серий ионов в состояния дискретного спектра как с испусканием (распады), так и с поглощением (возбуждения) фотонов ИЧТ. С помощью полученных данных рассчитаны коэффициенты кубических аппроксимационных полиномов, представляющих собой асимптотические зависимости вероятностей термоиндуцированного уширения ридберговских уровней энергии. Данные расчеты мотивированы тем, что полученные в начале 1980-х гг. асимптотические формулы [22–24] обеспечивают хорошее совпадение с результатами точных численных расчетов только для очень больших значений главного и орбитального квантовых чисел ($n > 30$, $n - l \ll n$) [24]. Кроме того, различие функциональных зависимостей от заряда Z остаточного иона для спонтанного и термоиндуцированного уширения [25] может существенно увеличить вклад эффектов ИЧТ в ионах по сравнению с его вкладом в нейтральных атомах. Аналитические выражения для поправок к асимптотической формуле уширения получены в [25, 26] для ридберговских состояний с большими значениями орбитального момента. Для состояний с малыми l в настоящей работе использована возможность получения аппроксимационных формул, основанная на результатах точных расчетов.

В разд.2 приведено асимптотическое выражение для штарковской энергии взаимодействия ридберговского иона с полем ИЧТ [22–26], содержащее в явном виде квадратичную зависимость действительной части (сдвиг) и линейную зависимость мнимой части (уширение) от температуры. Кроме того, мнимая часть энергии пропорциональна квадрату отношения заряда Z остаточного иона (здесь $Z = 2$) к главному квантовому числу n ридберговского состояния. Обсуждаются возможности и пределы применимости количественных оценок поправок к этим выражениям, полученным в аналитическом виде в [25, 26] для состояний с большими орбитальными моментами, а также возможности оценок с помощью интерполяции результатов численных расчетов, выполненных в настоящей работе.

В разд.3 обсуждается процедура расчета амплитуд спонтанных дипольных переходов с испусканием фотонов, которые используются для расчета вероятностей спонтанных переходов ионов из высоковозбужденных состояний с большими значениями главных квантовых чисел в состояния с меньшей энергией. Суммарные вероятности спонтанных переходов $\Gamma_{nl}^{\mathrm{sp}}$ преобразуются в численные значения спонтанных времен жизни $\tau_{nl}^{\mathrm{sp}} = 1/\Gamma_{nl}^{\mathrm{sp}}$. Полученные результаты используются для определения коэффициентов кубического полинома, аппроксимирующего τ_{nl}^{sp} с учетом асимптотической зависимости от главного квантового числа: $\tau_{nl}^{\mathrm{sp}} \propto n^3$ [18]. Параметры аппроксимации приведены ниже в табл.2.

В разд.4 и 5 рассчитаны вероятности вынужденных испусканий и возбуждений ридберговского атома, сопровождаемых радиационными переходами в более низкие и более высокие связанные состояния с испусканием и поглощением фотонов соответственно под действием ИЧТ. Аппроксимационные формулы для суммарных вероятностей испусканий и возбуждений выбираются одного и того же вида. Коэффициенты аппроксимационных полиномов определяются по численным значениям вероятностей, рассчитанным в рамках приближения МКД для ридберговских состояний с главными квантовыми числами n в диапазоне 15–400 каждой из выбранных серий с орбитальными моментами $l = 0, 1, 2, 3$.

Численные оценки показывают, что в рассматриваемой области температур ИЧТ от 100 до 3000 К относительный вклад ионизационных переходов в состояния непрерывного спектра в ширину ридберговского уровня энергии не превышает 1%–2% и быстро уменьшается с ростом n. Таким образом, основной причиной термоиндуцированного уширения высоких уровней являются переходы в состояния дискретного спектра. Полученные в разд.3–5 аппроксимационные выражения предоставляют подробную информацию о соотношении вероятностей термоиндуцированных испусканий и возбуждений в зависимости от температуры ИЧТ и от главных квантовых чисел ридберговских уровней с малыми орбитальными моментами ($l \leqslant 3$).

2. Термоиндуцированные сдвиг и ширина ридберговского уровня энергии

Представленные в работах [25, 26] аналитические выражения для поправок к асимптотическим формулам для уширений и сдвигов уровней энергии ридберговских состояний атомов [22–24] оказались неприменимыми к состояниям с малыми орбитальными моментами ($l < 10$). При выводе формул для этих поправок использовано разложение формулы Планка для распределения плотности числа тепловых фотонов в ряд по степеням параметра $z = \omega/k_{\mathrm{B}}T$ (здесь и далее используется атомная система единиц $e = m = \hbar = 1$, в которой скорость света численно совпадает с обратной постоянной тонкой структуры, $c = \alpha^{-1} = 137.036$, температура выражается в кельвинах, постоянная Больцмана определяется отношением атомной единицы энергии к атомной единице температуры, $k_{\rm B} = 1/T_{\rm a}$, и $T_{\rm a} = 315776$ K). Коэффициенты разложения по степеням $\omega/k_{\rm B}T$ оказываются пропорциональными суммам моментов сил осцилляторов электродипольных переходов $f^{(q)}_{n'l'm',nlm(\mu)} = 2\omega^{1+q}_{n'n}|\langle n'l'm'|r_\mu|nlm\rangle|^2$ из начального состояния $|nlm\rangle$ во все дипольно доступные состояния $|n'l'm'\rangle$ ридберговского электрона [25, 26]:

$$S^{(q)}_{nlm} = \frac{1}{3}\sum_{n'l'm'\mu} f^{(q)}_{n'l'm',nlm(\mu)}. \tag{1}$$

Суммы моментов $S^{(q)}_{nl}$ с $q = 0$, 1 определяют асимптотические выражения действительной ($\varepsilon_0(T)$) и мнимой ($\Gamma_0(T)$) частей для штарковской энергии взаимодействия атома с полем ИЧТ [22–26]

$$\mathcal{E}^{\rm BBR}_{nl}(T) \approx \varepsilon_0(T) - {\rm i}\frac{\Gamma_0(T)}{2} = \frac{\pi(k_{\rm B}T)^2}{3c^3} - {\rm i}\frac{2Z^2k_{\rm B}T}{3c^3n^2}$$

$$= \left[2416.65\left(\frac{T}{300}\right)^2 - {\rm i}5397.9\frac{TZ^2}{n^2}\right] [\text{Гц}]. \tag{2}$$

Аналитические выражения для зависящих от квантовых чисел n, l и от температуры T поправок к (2) также определяются суммами моментов (1) с положительными показателями q. При этом $S^{(q)}_{nl}$ с четными значениями q определяют поправки к действительной части

$${\rm Re}[\mathcal{E}^{\rm BBR}_{nl}(T)] = \varepsilon_{nl}(T) = \varepsilon_0(T) + \varepsilon_1(T) + \varepsilon_2(T) + \ldots, \tag{3}$$

где $\varepsilon_0(T) = \pi(k_{\rm B}T)^2/(3c^3)$ – асимптотическое значение сдвига, представленное явно в выражении (2). Аналогичное разложение для ширины можно записать в виде

$${\rm Im}[\mathcal{E}^{\rm BBR}_{nl}(T)] = \Gamma^{\rm tot}_{nl}(T) = \Gamma_0(T) + \Gamma_1(T) + \Gamma_2(T) + \ldots, \tag{4}$$

где асимптотическое значение $\Gamma^{\rm tot}_{nl}(T) \approx \Gamma_0(T) = 2k_{\rm B}T \times S^{(1)}_{nl}/c^3$ также представлено явно в (2). Последующие слагаемые пропорциональны отношениям сумм (1) с нечетными показателями к нечетным степеням температуры: $\Gamma_q(T) \propto S^{(2q+1)}_{nl}/(k_{\rm B}T)^{(2q-1)}$, где $q = 1, 2, 3, \ldots$ [25, 26]. Учитывая явную зависимость сумм (1) от квантовых чисел ридберговского состояния, соотношение последующих слагаемых сумм (3) и (4) при больших значениях главного квантового числа ($n \gg n_0$, где n_0 соответствует низшему энергетическому уровню серии с заданным орбитальным моментом $l > q > 1$) можно представить в виде

$$\frac{\varepsilon_{q+1}}{\varepsilon_q} \propto \frac{\Gamma_{q+1}}{\Gamma_q} \propto \left(\frac{Z^2}{l^3k_{\rm B}T}\right)^2, \tag{5}$$

при этом каждое слагаемое $\Gamma_q(T)$ в (4) убывает с ростом n пропорционально $1/n^3$. Таким образом, разложения (3) и (4) формально представляют собой первые члены асимптотических разложений по степеням параметра $Z^4 \times (l^3k_{\rm B}T)^{-2}$ действительной и мнимой частей энергии штарковского взаимодействия ридберговского атома с полем ИЧТ. Для состояний с малыми орбитальными моментами ($l < p$, $p = 2, 3, \ldots, 10$) суммы $S^{(2p)}_{nl}$ и $S^{(2p+1)}_{nl}$ обращаются в бесконечность. А для состояний с $l > p$ отношения (5) становятся малыми лишь при достаточно высоких температурах, позволяющих сделать убывающей последовательность слагаемых в разложениях (3) и (4). Так что использование двух-трех слагаемых этих разложений для оценки поправок к асимптотическим выражениям ε_0 и Γ_0 при комнатных или близких к комнатным температурах оказывается возможным только для состояний с большими орбитальными моментами, $l > 10$ [26].

Для расчета численных значений поправок ε_i, Γ_i ($i = 1, 2, 3\ldots$) к энергии состояний с малыми орбитальными моментами следует использовать другой подход, основанный на общих формулах для энергии штарковского взаимодействия атома с полем ИЧТ. Из результатов расчетов по этим формулам можно получить простые аппроксимационные выражения, позволяющие быстро и точно оценить вероятности вынужденных испусканий и поглощений, определяющих уширение уровней энергии стационарных состояний. Асимптотические выражения для ионов группы IIb определяются методом аппроксимирующих полиномов, ранее использованным для ионов группы IIa [27, 28].

Общее выражение для суммарной вероятности вынужденных радиационных переходов из состояния $|nlm\rangle$ под действием ИЧТ можно представить в виде [19, 29]

$$\Gamma^{\rm BBR}_{nl}(T) = \frac{4}{3c^3}\sum_{n'l'm'\mu}\frac{|\omega_{n'n}|^3|\langle n'l'm'|r_\mu|nlm\rangle|^2}{\exp[|\omega_{n'n}|/(k_{\rm B}T)] - 1}$$

$$= \frac{2}{3c^3(2l+1)}\sum_{n'l'}\frac{l_>|f^{(2)}_{n'l'nl}|}{\exp[|\omega_{n'n}|/(k_{\rm B}T)] - 1}. \tag{6}$$

Здесь $l_> = (l + l' + |l - l'|)/2$ – бо́льшая из двух величин l и l'; суммирование распространяется на все состояния $|n'l'm'\rangle$ из полного набора состояний атома/иона, включая интегрирование по состояниям непрерывного спектра с положительной энергией. Последнее выражение в (6) получено после суммирования по m' и μ и содержит только радиальную часть амплитуды дипольного перехода $f^{(2)}_{n'l'nl} = 2\omega^3_{n'n}|\langle n'l'|r|nl\rangle|^2$. Численные расчеты показывают, что вклад термоиндуцированных переходов в состояния непрерывного спектра из ридберговского состояния с орбитальным моментом $l \leqslant 3$ и главным квантовым числом n, принимающим значения от 15 до 400, для практически интересных интервалов температур $T <$ 1000 K не превышает 1%–2%. Поэтому в настоящей работе влияние термоиндуцированной ионизации на уширение уровня энергии ридберговского состояния не учитывается. Тогда вероятность (6) можно разложить на две составляющие, $\Gamma^{\rm BBR}_{nl}(T) = \Gamma^{\rm dec}_{nl}(T) + \Gamma^{\rm exc}_{nl}(T)$, соответствующие суммарной вероятности распадов (decays) и возбуждений (excitations) с излучением и поглощением фотонов ИЧТ соответственно. При этом $\Gamma^{\rm dec}_{nl}(T)$ определяется суммой слагаемых в (6), соответствующих более низкой энергии конечных состояний, чем энергия начального состояния, $E_{n'l'} < E_{nl}$, а $\Gamma^{\rm exc}_{nl}(T)$ определяется суммой по всем состояниям дискретного спектра с энергией $E_{n'l'} > E_{nl}$.

3. Спонтанные ширина и время жизни ридберговского состояния

Спонтанная ширина $\Gamma^{\rm sp}_{nl}$ уровня энергии состояния $|nl\rangle$ представляет собой суммарную вероятность дипольных радиационных переходов в состояния $|n'l' = l \pm 1\rangle$ с энергией $E_{n'l'} < E_{ln}$. Выражение для $\Gamma^{\rm sp}_{nl}$ совпадает с соответствующим выражением для $\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)$, в котором плотность числа состояний (населенность) фотонов ИЧТ $p^{\rm BBR}(T) = \{\exp[(\omega/(k_{\rm B}T)] - 1\}^{-1}$ заменяется не зависящей от температуры плотностью числа состояний спонтанных фотонов $p^{\rm sp} = 1$. Для циркулярного ридберговского состояния с моментом $l = n - 1$, переход из которого возможен только в одно-единственное нижележащее состояние с $n' = n - 1$, $l' = l - 1$ (тоже циркулярное), можно получить замкнутое аналитическое выражение для $\Gamma_{nl}^{\rm sp}$ [25, 30]. Такая возможность обусловлена водородоподобными волновыми функциями циркулярных состояний. Для состояний с малыми орбитальными моментами необходимо использовать приближенные волновые функции. Тем не менее, благодаря простым аналитическим выражениям функций МКД и МПФ, численные расчеты вполне доступны для современных компьютерных средств. Полученные при этом данные вполне удовлетворительно согласуются с имеющимися в литературе теоретическими и экспериментальными данными для естественных времен жизни $\tau_{nl}^{\rm sp} = 1/\Gamma_{nl}^{\rm sp}$ возбужденных состояний.

Расчеты для высоковозбужденных состояний с главными квантовыми числами n в диапазоне 15–400 для всех ридберговских серий с $l = 0, 1, 2, 3$ дают численные значения времен жизни, хорошо согласующиеся с асимптотической зависимостью $\tau_{nl}^{\rm sp} = \tau_l^{(0)} n^3$, где $\tau_l^{(0)}$ – постоянный для серии состояний с угловым моментом l численный множитель, не зависящий от главного квантового числа. Для повышения точности асимптотического приближения и расширения области его применимости можно ввести корректирующий множитель в виде кубического полинома по степеням обратного главного квантового числа, который в пределе $n \to \infty$ обращается в единицу, так что

$$\tau_{nl}^{\rm sp} = \tau_l^{(0)} n^3 \left(1 + \frac{\tau_l^{(1)}}{n} + \frac{\tau_l^{(2)}}{n^2} + \frac{\tau_l^{(3)}}{n^3}\right). \tag{7}$$

Коэффициенты $\tau_l^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ определяются методом полиномиальной аппроксимации для рассчитанных значений $\tau_{nl}^{\rm sp}$ конкретной серии ридберговских состояний с фиксированным орбитальным моментом l. В табл.2 приведены полученные в настоящей работе с использованием приближения МКД значения множителя $\tau_l^{(0)}$ (в наносекундах) и коэффициентов $\tau_l^{(i)}$ для серий ридберговских состояний S, $P_{3/2}$, $D_{5/2}$ и $F_{7/2}$ с максимальным полным орбитальным моментом $J = l + 1/2$ ионов группы IIb.

Табл.2. Параметры асимптотической аппроксимации (7) для времен жизни $\tau_l^{(0)}$ и коэффициентов $\tau_l^{(i)}$ кубического полинома для возбужденных nS-, $nP_{3/2}$-, $nD_{5/2}$- и $nF_{7/2}$-состояний ионов группы IIb.

Ион	Серия	$\tau_l^{(0)}$ (нс)	$\tau_l^{(1)}$	$\tau_l^{(2)}$	$\tau_l^{(3)}$
Zn^+	nS	0.059834	5.0513	–278.95	2287.3
	$nP_{3/2}$	0.12734	19.759	135.91	15507.1
	$nD_{5/2}$	0.048834	–1.9724	1.5145	–32.55
	$nF_{7/2}$	0.0843346	0.63229	–42.252	400.23
Cd^+	nS	0.0661534	1.5551	–292.84	2681.4
	$nP_{3/2}$	0.347681	11.859	–15.322	–666.88
	$nD_{5/2}$	0.047934	–3.3985	–6.1472	32.364
	$nF_{7/2}$	0.111851	40.157	–1138.0	8958.7
Hg^+	nS	0.0869103	3.1597	–449.73	4194.1
	$nP_{3/2}$	0.0903141	–1.9110	–58.046	153.10
	$nD_{5/2}$	0.0412015	–7.6834	36.613	–138.76
	$nF_{7/2}$	0.134523	33.325	–933.48	7221.4

Приведенные в табл.2 численные значения параметров $\tau_l^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ обеспечивают точность воспроизведения численных данных описанных выше расчетов с относительной погрешностью менее 5% в области значений главного квантового числа $15 < n < 500$; для $nP_{3/2}$-, $nD_{5/2}$- и $nF_{5/2}$-состояний Zn^+, $nD_{5/2}$-состояний Cd^+, а также $nP_{3/2}$- и $nD_{5/2}$-состояний Hg^+ погрешность не превышает 1% в области $12 < n < 1500$. Данные табл.2 могут быть полезными для дальнейших исследований свойств ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами в ионах Zn^+, Cd^+, Hg^+.

4. Индуцированные ИЧТ переходы из ридберговского состояния

Из данных табл.2 видно, что естественное время жизни ридберговского состояния с $n = 100$, в зависимости от орбитального момента иона, составляет от 34 до 127 мкс. Для $n = 450$ время жизни равно 3 –12 мс. Однако вездесущее тепловое излучение окружающей среды может существенно уменьшить время пребывания атома в сильно возбужденном состоянии и даже превратить атом в ион за счет фотоионизации [21–23]. Взаимодействие с ИЧТ приводит к уширению атомных уровней, которое представляет собой суммарную вероятность (6) вынужденных радиационных переходов. Слагаемые, соответствующие переходам из ридберговского состояния $|nlm\rangle$ в состояния $|n'l'm'\rangle$ с энергией ниже исходной, $E_{n'l'} < E_{nl}$, представляют собой суммарную вероятность термоиндуцированных переходов

$$\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T) = \frac{2}{3c^3(2l+1)} \sum_{\substack{n'l' = l\pm 1\\(E_{n'l'} < E_{nl})}} \frac{l_> |f_{n'l'nl}^{(2)}|}{\exp[|\omega_{n'n}|/(k_{\rm B}T)] - 1}, \tag{8}$$

где каждое слагаемое отличается от вероятности соответствующего спонтанного перехода множителем

$$p^{\rm BBR}(\omega_{n'n}, T) = \frac{1}{\exp[|\omega_{n'n}|/(k_{\rm B}T)] - 1}, \tag{9}$$

определяющим распределение Планка для плотности числа тепловых фотонов (населенности) на частоте $\omega_{nn'} = E_{nl} - E_{n'l'}$. Таким образом, функцию (9) можно рассматривать как относительную (по отношению к спонтанной) скорость вынужденного радиационного перехода. Очевидно, что максимальное значение эта функция имеет для минимального показателя экспоненты в знаменателе. При фиксированной температуре этому минимуму соответствует частота перехода в соседнее по энергии состояние, при которой показатель экспоненты $\omega_{nn'} \times (k_{\rm B}T)^{-1} \approx \eta \equiv Z^2/(n^3 k_{\rm B} T)$. Если $\eta \ll 1$, то населенность (9) становится пропорциональной произведению $n^3 T$: $p^{\rm BBR}(\omega_{n'n}, T) \approx n^3 k_{\rm B} T/Z^2$. Заметим что эта величина Z^2-кратно подавлена для ионов по сравнению с $p^{\rm BBR}(\omega_{n'n}, T)$ для нейтральных атомов. Такая оценка числа фотонов соответствует учету только главного слагаемого в разложении по степеням показателя экспоненты правой части выражения (9). Тем не менее она указывает на возможность получения достаточно эффективной аппроксимационной формулы для вероятности (8). Более информативной может быть аппроксимация для относительной вероятности $R_{nl}^{\rm dec}(T) = \Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)/\Gamma_{nl}^{\rm sp}$, непосредственно отражающая относительный вклад термоиндуцированных переходов в уширение уровня энергии в сравнении со спонтанным уширением. Учитывая основное влияние на вероятность $\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)$ вероятностей вынужденных переходов в соседние по энергии состояния, а также асимптотическое поведение времени жизни (7), можно записать аппроксимационное выражение, эффективно учитывающее все слагаемые в правой части (8), в виде дроби

$$R_{nl}^{\rm dec}(T) = \frac{(Z/n)^2 P_{nl}^{\rm dec}(x)}{D_n(T)}, \tag{10}$$

числителем которой является кубический полином

$$P_{nl}^{\rm dec}(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i^{\rm d}(T) x^i. \tag{11}$$

Аргумент полинома $x = 200/(nT^{1/3}) \propto \eta^{1/3}$ исчезает при $nT^{1/3} \to \infty$, а коэффициенты $a_i^{\rm d}(T)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ зависят от температуры. Таким образом, $P_{nl}^{\rm dec}(0) = a_0^{\rm d}(T)$ при $n \to \infty$ $(x \to 0)$ обращается в зависящую от T величину. Знаменатель $D_n(T) = \exp[Z^2/(n^3 k_{\rm B} T)] - 1$ определяет плотность числа фотонов ИЧТ на частотах $\omega \approx Z^2/n^3$ переходов в ближайшие состояния, дающих основной вклад в сумму (8). Множитель $(Z/n)^2$ в числителе дроби в (10) учитывает различие зависимостей асимптотик вероятностей термоиндуцированного $(\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T))$ и спонтанного $(\Gamma_{nl}^{\rm sp})$ переходов от заряда ионного остова Z и от главного квантового числа при $n \to \infty$. Для определения коэффициентов $a_i^{\rm d}(T)$ можно воспользоваться методом полиномиальной интерполяции функции $\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)$, рассчитанной при конкретных значениях температуры в некоторой области численных значений главного квантового числа. Полученные значения $a_i^{\rm d}(T)$ при конкретных значениях температуры T можно также использовать для определения их зависимости от температуры методом интерполяции кубическим полиномом вида

$$a_i^{\rm d}(T) = Q_i^{\rm d}(y) = \sum_{j=0}^{3} b_{ij}^{\rm d} y^j, \tag{12}$$

где $y = (100/T)^{1/3}$; $i = 0, 1, 2, 3$; $b_{ij}^{\rm d}$ – постоянные коэффициенты, зависящие только от орбитального момента l. Аргумент полинома $Q_i(y)$ выбран таким, чтобы при высоких температурах он становился не зависящей от температуры константой, $Q_i(y) \xrightarrow[T\to\infty]{} b_{i0}^{\rm d} = a_i^{\rm d}(\infty)$. Аналогичное условие $P_{nl}^{\rm dec}(x) \xrightarrow[n^3 T\to\infty]{} a_0^{\rm d}(\infty) = b_{00}^{\rm d}$ использовано при выборе коэффициентов полинома (11). Двойная интерполяция обусловлена зависимостью вероятности $\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)$ от трех величин – n, T и l. Зависимость $\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)$ от орбитального момента приводит к необходимости определения отдельных наборов коэффициентов $b_{ij}^{\rm d}$ для каждого значения l. Таким образом, для нахождения численных значений относительной вероятности $R_{nl}^{\rm dec}(T)$ при заданных значениях главного и орбитального квантовых чисел и температуры ИЧТ достаточно иметь матрицу коэффициентов $b_{ij}^{\rm d}$ для конкретной серии состояний с фиксированным орбитальным моментом l.

5. Возбуждения из ридберговского состояния, индуцированные ИЧТ

Вторая часть суммы в выражении (6) определяет полную вероятность возбуждений состояний $|n'l'\rangle$ с энергиями $E_{n'l'} > E_{nl}$:

$$\Gamma_{nl}^{\rm exc}(T) = \frac{2}{3c^3(2l+1)} \sum_{\substack{n'l'=l\pm 1 \\ (E_{n'l'} > E_{nl})}} \frac{l_> |f_{n'l'nl}^{(2)}|}{\exp[\omega_{n'n}/(k_{\rm B} T)] - 1}. \tag{13}$$

Как и для $\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)$, основной вклад в эту сумму дают слагаемые с $n' - n \ll n$. Несмотря на бесконечное количество связанных состояний с $n' > n$, из-за быстрого затухания радиальных амплитуд электродипольного перехода $\langle n'l \pm 1|r|nl\rangle$ вклад бесконечного числа состояний с $n' - n \gg 1$ оказывается существенно меньше вклада близких по энергии к $|nl\rangle$ состояний $|n'l'\rangle$ с $n' - n \ll n$. Таким образом, асимптотические зависимости $\Gamma_{nl}^{\rm exc}(T)$ и $\Gamma_{nl}^{\rm dec}(T)$ при больших значениях n и T практически одинаковы. Следовательно, аппроксимационное выражение для относительной вероятности возбуждения $R_{nl}^{\rm exc}(T) = \Gamma_{nl}^{\rm exc}(T)/\Gamma_{nl}^{\rm sp}$ можно записать аналогично (10) в виде

$$R_{nl}^{\rm exc}(T) = \frac{(Z/n)^2 P_{nl}^{\rm exc}(x)}{D_n(T)}, \tag{14}$$

где полином $P_{nl}^{\rm dec}(x)$ заменяется полиномом

$$P_{nl}^{\rm exc}(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i^{\rm e}(T) x^i$$

с тем же аргументом, что и в (11), $x = 200/(nT^{1/3})$, а коэффициенты $a_i^{\rm e}(T)$ определяются методом полиномиальной интерполяции численных значений суммарной вероятности (13) индуцированных ИЧТ возбуждений, рассчитанной при фиксированных значениях температуры T, аналогично коэффициентам $a_i^{\rm d}(T)$ (12) для суммарной вероятности термоиндуцированных переходов. При этом коэффициенты $b_{ij}^{\rm d}$ полинома $Q_i^{\rm d}(y)$ заменяются соответствующими коэффициентами $b_{ij}^{\rm e}$ полинома $Q_i^{\rm e}(y)$, представляемого разложением по степеням параметра $y = (100/T)^{1/3}$ аналогично разложению (12).

6. Результаты численных расчетов и их обсуждение

Данные численных расчетов по формулам (8) и (13) с использованием волновых функций МКД для вероятностей спонтанных и индуцированных ИЧТ с температурами 100–3000 K радиационных переходов для серий ридберговских состояний S, P, D и F с главными квантовыми числами в области от $n = n_0$ до $n = 400$ ионов Zn^+, Cd^+, Hg^+ были проинтерполированы и представлены в виде аппроксимационных выражений (10) и (14). Коэффициенты кубических полиномов (11), (12) получены методом полиномиальной интерполяции численных значений вероятностей для состояний с $n = 15$, 40, 80 и 120 при температурах $T = 100$, 300, 1000 и 2000 K. В табл.3–5 приведены численные значения коэффициентов $b_{ij}^{\rm d}$ и $b_{ij}^{\rm e}$, которые определяют относительные вероятности термоиндуцированных переходов в соответствии с выражениями (10) и (14).

Следует отметить, что коэффициенты $b_{00}^{\rm d}$ и $b_{00}^{\rm e}$ для каждой серии состояний позволяют оценить соотношение суммарных вероятностей индуцированных переходов из достаточно высоких ридберговских состояний с вынужденным излучением (распады) и поглощением (возбуждения) при достаточно высокой температуре ИЧТ. В частности для ионов кадмия вероятности распадов из

Табл.3. Коэффициенты полиномов (12), аппроксимирующих суммарные вероятности индуцированных ИЧТ распадов (10) b_{ij}^{d} и возбуждений (14) b_{ij}^{e} серий ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами ($l \leqslant 3$) в ионах Zn^+.

Серия	i	b_{i0}^{d}	b_{i1}^{d}	b_{i2}^{d}	b_{i3}^{d}	b_{i0}^{e}	b_{i1}^{e}	b_{i2}^{e}	b_{i3}^{e}
S	0	4.3472	−0.02559	0.1021	−0.0060	0.6807	−0.1303	0.2763	−0.1888
	1	2.0671	−9.282	9.083	−3.493	1.639	−3.930	3.706	−1.042
	2	−20.07	69.54	−84.79	35.33	−0.1474	0.1080	0.6471	−0.8913
	3	15.732	−60.10	78.01	−33.58	−0.0288	0.4046	−0.7939	0.6084
$P_{3/2}$	0	4.2744	0.0083	−0.0100	0.0060	5.4406	−0.2504	0.6237	0.4415
	1	−2.9950	4.4292	−5.8494	2.4580	21.579	−56.19	59.78	−21.82
	2	18.317	−64.96	80.79	−33.77	21.063	−69.00	87.62	−40.71
	3	25.835	−99.52	131.0	−56.88	190.96	−760.56	1002.1	−431.8
$D_{5/2}$	0	1.6196	−0.00296	0.06123	−0.0210	2.0159	0.2875	−0.5680	0.3251
	1	−0.35352	−1.574	1.468	−0.5401	−3.8145	9.000	−8.307	2.655
	2	0.90718	−3.191	4.602	−2.060	7.6057	−25.63	28.40	−10.81
	3	−0.99104	4.226	−5.891	2.639	−4.5544	17.04	−20.87	8.549
$F_{7/2}$	0	4.2861	−0.0441	0.1074	−0.0269	2.2144	0.3765	−0.7373	0.4083
	1	−6.3532	11.19	−13.15	5.254	−1.0887	1.504	0.5937	−1.021
	2	7.3282	−24.58	31.58	−13.40	4.1727	13.41	12.09	−3.667
	3	−3.1643	12.64	−17.05	7.480	−2.4772	8.654	−9.331	3.398

Табл.4. То же, что и в табл.3, для серий ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами ($l \leqslant 3$) в ионах Cd^+.

Серия	i	b_{i0}^{d}	b_{i1}^{d}	b_{i2}^{d}	b_{i3}^{d}	b_{i0}^{e}	b_{i1}^{e}	b_{i2}^{e}	b_{i3}^{e}
S	0	3.9271	−0.02767	0.05198	0.02910	1.6834	−0.0245	0.0595	−0.0412
	1	4.6613	−15.64	16.93	−6.781	1.750	−4.560	4.918	−1.648
	2	−25.149	86.21	−105.32	43.94	−9.148	31.86	−39.37	16.143
	3	17.175	−65.02	83.88	−35.97	7.1839	−27.95	36.72	−15.84
$P_{3/2}$	0	6.5008	−1.1653	2.455	−1.657	18.810	5.288	−9.598	4.786
	1	4.1867	−8.419	2.432	2.820	45.76	−143.3	190.8	−84.88
	2	15.987	−60.20	82.41	−39.78	24.813	−48.39	−7.069	23.06
	3	−10.248	42.27	−57.95	27.25	−37.377	107.17	−98.24	29.71
$D_{5/2}$	0	1.7392	−0.6652	0.1331	−0.07014	1.92994	0.2453	−0.4732	0.2552
	1	−0.59293	−0.2874	−0.09792	0.1836	−1.2535	2.369	−1.150	−0.03023
	2	−0.013664	−0.3767	1.402	−0.9033	2.3044	−7.101	5.796	−1.531
	3	−0.37448	1.930	−3.011	1.485	−1.7177	5.821	−6.168	2.225
$F_{7/2}$	0	7.34136	−0.1123	0.5234	−0.1636	1.75329	0.4078	−0.7624	0.3136
	1	28.9338	−83.765	89.66	35.03	15.8697	−43.27	50.94	−20.67
	2	−128.997	445.31	−547.3	228.2	−35.559	124.7	−160.5	68.48
	3	102.548	−394.17	514.07	−221.67	23.475	−92.44	124.04	−54.325

S-состояний примерно вдвое, а из F-состояний – в четыре раза превышают вероятности возбуждений. Для P-состояний картина противоположная: возбуждения почти втрое вероятнее распадов. Для D-состояний вероятности возбуждений и распадов практически одинаковы. Соответствующее уширение ридберговских уровней определяется суммарной вероятностью всех вынужденных и спонтанных распадов и возбуждений и может быть записано в виде

$$\Gamma_{nl}^{\mathrm{tot}}(T) = \Gamma_{nl}^{\mathrm{sp}} + \Gamma_{nl}^{\mathrm{dec}}(T) + \Gamma_{nl}^{\mathrm{exc}}(T)$$

$$= \Gamma_{nl}^{\mathrm{sp}}[1 + R_{nl}^{\mathrm{d}}(T) + R_{nl}^{\mathrm{e}}(T)]. \quad (15)$$

Заметим, что при малых значениях параметра η ($\eta = Z^2/(n^3 k_{\mathrm{B}} T) \ll 1$) в разложении распределения Планка в ряд по степеням показателя экспоненты в выражении (6) для $\Gamma_{nl}^{\mathrm{BBR}}(T) = \Gamma_{nl}^{\mathrm{dec}}(T) + \Gamma_{nl}^{\mathrm{exc}}(T)$ появляется не зависящее от температуры слагаемое, которое полностью компенсирует $\Gamma_{nl}^{\mathrm{sp}}$ [25, 26]. Тем не менее для расчетов аппроксимационных полиномов в (10) и (14) использованы точные выражения (8) и (13).

7. Заключение

Полученные в настоящей работе результаты дают важную информацию об относительных вероятностях термоиндуцированных возбуждений и распадов ридберговских состояний ионов группы IIb в поле ИЧТ. Численные значения коэффициентов, представленные в табл.3–5, позволяют оценить скорости распадов с переходом на нижние уровни и возбуждений с переходом в состояния с большей энергией из ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами.

Наряду с вероятностями отдельных процессов спонтанного распада и вынужденных распадов и возбуждений из количественных данных табл.2–5 можно оценить и полную ширину ридберговского уровня. Если предста-

Табл.5. То же, что и в табл.3, для серий ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами ($l \leqslant 3$) в ионах Hg^+.

Серия	i	b^{d}_{i0}	b^{d}_{i1}	b^{d}_{i2}	b^{d}_{i3}	b^{e}_{i0}	b^{e}_{i1}	b^{e}_{i2}	b^{e}_{i3}
S	0	3.8357	−0.002076	0.02964	0.04075	3.23202	0.2186	−0.4271	0.2610
	1	10.0336	−29.502	32.69	−13.10	5.0746	−14.101	16.81	−7.171
	2	−41.8764	144.6	−178.0	74.41	−27.342	95.96	−120.95	51.44
	3	29.2278	−112.6	146.8	−63.32	21.0187	−82.52	109.3	−47.67
$P_{3/2}$	0	2.11065	−0.07759	0.1647	−0.08750	4.59111	1.0002	−1.912	1.023
	1	−1.71419	4.057	−5.331	2.341	1.44581	−7.655	14.466	−7.738
	2	2.65271	−9.4865	12.67	−5.654	1.8896	−1.6956	−9.480	7.762
	3	−1.9035	7.429	−9.952	4.446	−6.113	19.135	−18.808	6.088
$D_{5/2}$	0	1.4831	−0.05220	0.1071	−0.05723	1.6690	0.2271	−0.4403	0.2443
	1	−0.89544	0.71389	−1.068	0.5266	−1.59713	3.339	−2.369	0.4661
	2	0.893183	−3.271	4.749	−2.234	2.61188	−8.149	7.429	−2.265
	3	−0.78603	3.233	−4.494	2.057	−1.68374	5.6632	−6.077	2.205
$F_{7/2}$	0	8.55152	−0.1059	0.4409	−0.08208	2.28538	0.6151	−1.116	0.4624
	1	29.3827	−85.16	91.00	−35.72	17.9806	−49.84	59.54	−24.35
	2	−121.997	418.5	−513.4	214.2	−36.4184	129.6	−169.6	73.02
	3	93.7923	−359.5	468.4	−201.9	23.2105	−93.32	127.3	−56.29

вить асимптотику для термоиндуцированной ширины (6) в виде $\Gamma^{\mathrm{BBR}}_{nl}(T) = \gamma_l Z^2\, T/n^2$, то из выражения $\Gamma_0(T) = 4Z^2 \times k_{\mathrm{B}}T/(3c^3n^2)$ для мнимой части штарковской энергии (2) получим множитель $\gamma_l = 4k_{\mathrm{B}}/(3c^3) = 67833.1$ К$^{-1}\cdot$с$^{-1}$, не зависящий от орбитального момента l. Для рассмотренных в настоящей работе серий ридберговских состояний S, P, D и F ионов группы IIb множители γ_l можно выразить через численные значения коэффициентов $\tau^{(0)}_{nl}$ и b^{d}_{00}, b^{e}_{00} из табл.2–5: $\gamma_l = 791.7004(b^{\mathrm{d}}_{00} + b^{\mathrm{e}}_{00})/\tau^{(0)}_l$. Эти константы существенно зависят от l.

Например, для ионов Hg^+ численные значения множителей (в К$^{-1}\cdot$с$^{-1}$) таковы: $\gamma_0 = 64382.6$, $\gamma_1 = 58748.1$, $\gamma_2 = 60568.6$, $\gamma_3 = 63777.7$. Такое различие асимптотик $\Gamma^{\mathrm{BBR}}_{nl}(T)$ и их пониженные значения по сравнению с $\Gamma_0(T)$ для ридберговских состояний с малыми орбитальными моментами l в нейтральных атомах отмечались в результатах численных расчетов работ [24, 29]. Пропорциональность квадрату заряда остаточного иона Z для $\Gamma^{\mathrm{BBR}}_{nl}(T)$ впервые записана явно в [30]. В настоящей работе получено общее выражение через коэффициенты асимптотических полиномов (7), (11), (12), (14) для корректирующего множителя γ_l, определяющего зависимость асимптотик $\Gamma^{\mathrm{BBR}}_{nl}(T)$ от орбитального момента ридберговского состояния.

Относительный вклад процессов ионизации в уширение ридберговских уровней энергии при фиксированной температуре не превышает 1%–2% и быстро убывает с ростом главного квантового числа. В связи с этим в настоящей работе ионизация ридберговских уровней ИЧТ не рассматривалась. Тем не менее численные значения вероятности ионизации и их зависимости от главного и орбитального квантовых чисел ридберговских состояний могут представлять отдельный интерес и рассчитываться с использованием полуэмпирических методов одноэлектронного приближения аналогично расчетам для ионов группы IIa [27, 28].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках госзадания по проекту FZGU-2020-0035.

1. Mokhberi A., Hennrich M., Schmidt-Kalera F. *Adv. Atom., Molec., Opt. Phys.*, **69**, 233 (2020); https://doi.org/10.1016/bs.aamop.2020.04.004.
2. Huntemann N., Sanner C., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 063001 (2016).
3. Yu Yan-mei, Sahoo B.K. *Phys. Rev. A*, **96**, 050502(R) (2017).
4. Чепуров С.В., Луговой А.А., Прудников О.Н., Тайченачев А.В., Багаев С.Н. *Квантовая электроника*, **49**, 412 (2019) [*Quantum Electron.*, **49**, 412 (2019)].
5. Заливако И.В., Семериков И.А., Борисенко А.С., Хабарова К.Ю., Сорокин В.Н., Колачевский Н.Н. *Квантовая электроника*, **47**, 426 (2017) [*Quantum Electron.*, **47**, 426 (2017)].
6. Заливако И.В., Борисенко А.С., Семериков И.А., Хабарова К.Ю., Колачевский Н.Н. *Квантовая электроника*, **48**, 448 (2018) [*Quantum Electron.*, **48**, 448 (2018)].
7. Chou C.W., Hume D.B., Koelemeij J.C.J., Wineland D.J., Rosenband T. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 070802 (2010).
8. Nandy D.K., Sahoo B.K. *Phys. Rev. A*, **94**, 032504 (2016).
9. Ovsiannikov V.D., Derevianko A., Gibble K. *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 093003 (2011).
10. Bowden W., Hobson R., et al. *Phys. Rev. A*, **96**, 023419 (2017).
11. Стельмашенко Е.Ф., Клезович О.А., Барышев В.Н., Тищенко В.А., Блинов И.Ю., Пальчиков В.Г., Овсянников В.Д. *Оптика и спектроскопия*, **128**, 1063 (2020) [*Opt. Spectrosc.*, **128**, 1067 (2020)].
12. Kleppner D. *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 233 (1981).
13. Hulet R.G., Hilfer E.S., Kleppner D. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2137 (1985).
14. Nguyen T.L., Raimond J.M., et al. *Phys. Rev. X*, **8**, 011032 (2018).
15. Manakov N.L., Ovsiannikov V.D., Rapoport L.P. *Phys. Rep.*, **141**, 319 (1986).
16. Ralchenko Yu., Kramida A., Reader J. http://physics.nist.gov/asd.
17. http://grotrian.nsu.ru.
18. Глухов И.Л., Никитина Е.А., Овсянников В.Д. *Оптика и спектроскопия*, **115**, 12 (2013) [*Opt. Spectrosc.*, **115** (1), 9 (2013)].
19. Glukhov I.L., Nikitina E.A., Ovsiannikov V.D. *Вестник ВГУ.Сер. Физика. Математика*, № 2, 33 (2013).
20. Blagoev K.B., Malcheva G., Penchev V., Biémont E., Xu H. L., Persson A., Svanberg S. *Phys. Scripta*, **69**, 433 (2004).
21. Martinson I., Curtis L. J., Huldt S., et al. *Phys. Scripta*, **19**, 17 (1979).
22. Gallagher T.F., Cooke W.E. *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 835 (1979).
23. Cooke W.E., Gallagher T.F. *Phys. Rev. A*, **21**, 588 (1980).
24. Farley J.W., Wing W.H. *Phys. Rev. A*, **23**, 2397 (1981).
25. Глухов И.Л., Каменский А.А., Овсянников В.Д. *Квантовая электроника*, **50**, 581 (2020) [*Quantum Electron.*, **50**, 581 (2020)].
26. Glukhov I.L., Kamenski A.A., Ovsiannikov V.D. *J. Phys. B*, **53**, 215004 (2020).
27. Glukhov I.L., Mokhnenko S.N., Nikitina E.A., Ovsiannikov V.D. *Eur. Phys. J. D*, **69**, 1 (2015).
28. Glukhov I.L., Nikitina E.A., Ovsiannikov V.D. *J. Phys. B*, **49**, 035003 (2016).
29. Glukhov I.L., Ovsiannikov V.D. *J. Phys. B*, **43**, 125002 (2010).
30. Каменский А.А., Овсянников В.Д., Глухов И.Л. *Квантовая электроника,* **49**, 464 (2019) [*Quantum Electron.*, **49**, 464 (2019)].